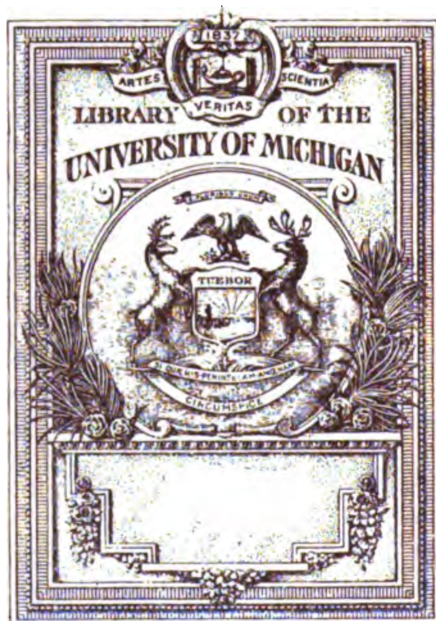

1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

VERZAMELING

VAN

WISKUNDIGE

VOORSTELLEN,

DOOR DE

LEDEN



VAN HET

WISKUNDIGE

GENOOTSCHAP,

ONDER DE ZINSPREUK:

EEN ONVERMOEIDE ARBEID KOMT ALLES TE BOVEN;

— ELKANDER TOT ONDERLINGE OEFENING OPGEGEVEN. —

DERDE DEEL.

(Gedrukt voor Rekening van het Genootschap.)

Te AMSTERDAM, bij

H. WEIJTING, Boekverkooper, op den Nieuwendijk, over de Nieuwstraat, N°. 50.

1827.

Gedrukt ter Boekdrukkerij van P. E. BRIËT te Amsterdam.

Geene Exemplaren worden voor echt erkend, dan die, welke aldus, volgens de wet, onderteekend zijn, door

Witlage

Tweede Secretaris.

Zoo wel van het 1e en 2e Deel, als van dit 3e Deel, zijn compleete exemplaren, of afzonderlijke stukjes om te completeeren, te bekomen, bij den Heer H Weijting, Boekhouder en tevens Uitgever van de Werken dezes Genootschaps.

NAAMLIJST

DER

LEDEN

VAN HET

WISKUNDIG GENOOTSCHAP,

Onder de Zinspreuk:

EEN ONVERMOEIDE ARBEID KOMT ALLES TE BOVEN,

Te Amsterdam.

Gerangschikt naar den tijd van hun Lidmaatschap, Aº. MDCCCXXIII.

BESTUURDERS.

O. S. BANGMA, Examinator der Stuurlieden te Amsterdam, Lid van het Koninklijk Nederlandsch Instituut van Wetenschappen, Letterkunde en Schoone Kunsten, enz. enz.
H. VAN WESSEM JACOBUSZ.
P. PREIJER.
A. VAN DER SWAN.
J. C. VAN SETTEN.
J. VAN DER LINDEN. } *te Amsterdam.*

I. R. SCHMIDT, 1e Secretaris. Lector in de Wiskunde, aan de Koninklijke Artillerie- en Genie-School, te Delft.

H. G. WITLAGE JR. 2e Secretaris.
C. TERMARS, Boekhouder. } *te Amsterdam.*

Bui-

Buitengewone Leden van Verdienſten in het Wetenſchappelijke Vak.

U. HUGUENIN, Generaal-Majoor, Directeur van de Koninklijke IJzer-Geſchutgieterij, te Luik.

Zijne Excelentie de Luitenant-Generaal C. R. T. KRAYENHOFF, Groot Kruis der Militaire Willems-orde, Inſpecteur Generaal der Fortificatien, en van het Korps Ingenieurs, de Mineurs- en Sappeurs, en Gouverneur der Stad Amſterdam, Lid van het Koninklijke Nederlandsch Inſtituut van Wetenſchappen, Letterkunde en Schoone Kunſten.

J. H. VOET, Luitenant-Generaal, Commandant en Directeur der Studien aan de Koninklijke Artillerie- en Genie-School te Delft.

Jonkheer J. M. C. van UTENHOVE, Lid van het Koninklijk Nederlandsch Inſtituut van Wetenſchappen, Letterkunde en Schoone Kunſten, te Jutphaas.

A. van den ENDE, Ridder van den Nederlandſchen Leeuw; Hoofd-Inſpecteur van het Middelbaar en Lager Onderwijs; Lid van het Koninklijk Nederlandsch Inſtituut van Wetenſchappen, Letterkunde en Schoone Kunſten, te Haarlem.

O. S. BANGMA. (zie boven)

J. de GELDER, Buitengewoon Hoogleeraar in de Wis- en Natuurkundige Wetenſchappen aan de Hooge School te Leyden.

Buitengewone Leden van Verdienſten in het Huishoudelijke Vak.

CHRISTOFFER MEIJLINK, te 's Gravenhage.

H. van WESSEM Jacobusz., te Amſterdam.

B. van HEIJNINGEN. te Amſterdam.

C. TERMARS, te Amſterdam.

Leden van de Wetenſchappelijke Commisſie.

O. S. BANGMA. (zie boven.)

J. DE GELDER. (zie boven.)
I. R. SCHMIDT. (zie boven.)
J. H. VOET. (zie boven.)
U. HUGUENIN. (zie boven.)
J. P. DELPRAT, Kapitein Ingenieur, te Delft.

Bibliothecaris.

O. S. BANGMA. (zie boven.)

Leden van Verdiensten der Tweede Klasse.

I. R. SCHMIDT. (zie boven.)
A. L. HECTOR, te Middelburg.
A. FOCK, te Amsterdam.
P. VAN EEGHEN, Chz., te Amsterdam.
R. LOBATTO, te 's Gravenhage.

Gewone Leden.

P. HOUTTUIN Gz., te Hoorn.
L. KOOPS, te Amsterdam.
W. C. BAKKER, te Purmerland.
KLAAS SMIT, te Amsterdam.
P. CALIS, te Schermer.
D. BRAUBACH, te Bremen.
C. MARTENS, te Bremen.
A. VOLKERSE, te Monnikendam.
J. KERKHOVEN, te Amsterdam.
A. HARREBOMÉE, te Heemstede.
A. HORSTMAN, te Amsterdam.
I. R. SCHMIDT, 1e Secretaris. (zie boven.)
J. H. THIERMAN, te Bremen.
W. J. VAN HEMERT, te Utrecht.

J. H. NIEUWVEEN, te Leyden.
J. BUIJS, Oud-Lector in de Natuurkunde bij de Maatschappij *Felix-Meritis*, te Amsterdam.
G. MOL JUNIOR, te Utrecht.
H. G. WITLAGE JUNIOR, 2e Secretaris, te Amsterdam.
A. L. HECTOR, te Middelburg.
J. C. VAN SETTEN, Bestuurder, te Amsterdam.
A. VAN DER SWAN, Bestuurder, te Amsterdam.
J. EISVELD, te Groningen.
C. TERMARS, Boekhouder, te Amsterdam.
Mr. G. BUIJS, Advokaat te Amsterdam.
L. VAN HEUSDEN, aan den Uithoorn.
C. J. VAN BRUSSEL, te Amsterdam.
D. H. WATERMAN, te Sapmeer.
M. LEMANS, te Amsterdam.
P. VAN EEGHEN CHZ., te Amsterdam.
W. VAN HAARST, te Sneek.
A. VAN DER SPUIJ, te 's Gravenhage.
J. P. BAUDET, te Vaassen.
M. TIELJARDT, te Amsterdam.
F. J. MÉAN, te Suriname.
P. ESAU, te Aarlanderveen.
A. DAHLHAUS, te Keulen.
C. LANTZ, te Amsterdam.
R. LOBATTO, te 's Gravenhage.
H. J. HEIJSTERMAN, te Amsterdam.
J. DEELEMAN BOM, te Amsterdam.
J. B. CANTOR, te Amsterdam.
A. F. DE PAUW, te Amsterdam.
S. J. MULDER, te Amsterdam,
A. D. ZILLESEN, te Arnhem.
G. S. LEENEMAN, te Amsterdam.
A W. HUIDEKOPER, te Amsterdam.
A. TOLLUS, Architect en Landmeter te 's Gravenhage.
G. E. BOSWEL, te Amsterdam.
J. KONING, te Amsterdam.

H.

H. F. FIJNJE, Adspirant van den Waterstaat en der Publieke werken, te Groningen.
J. VAN DER LINDEN, Bestuurder, te Amsterdam.
J. A. BUIJN, te Amsterdam.
J. ARBON, Examinator der Stuurlieden te Rotterdam.
P. PREIJER, Bestuurder, te Amsterdam.
R. C. VAN TUIJLL VAN SEROOSKERKEN, tot Hees en Leende, te Utrecht.
C. I. GLAVIMANS, Onder-Constructeur bij de Nederlandsche Marine, te Rotterdam.
H. P. KRETSCHMER, Directeur van het Wis- en Aardrijkskundig Instituut, te Zutphen.
P. DE LANGE, te Nijmegen.
R. DE JONGE Mz., te Amsterdam.
J. J. REEKERS, te Amsterdam.
J. PEEREBOOM, te Oostburg.
J. C. BEIJER, Nederduitsche Taalmeester bij de Koninklijke Artillerie- en Genie-School, te Delft.
J. M. PAUW, 1e Luitenant Ingenieur, te Gent.
J. VAN WIJK ROELDZ., te Hattem.
C. J. BOLTEN, Adspirant van den Waterstaat en der Publieke werken, te Alkmaar.
F. P. GISIUS NANNING, Luitenant Ingenieur te Delft,
F. BAUD, Ingenieur der Eerste Klasse van den Waterstaat en der Publieke Werken, te Delft.
H. FOEKES BAKKER, te Weesp.
J. E DUIJVENÉ, 1e Luitenant Ingenieur, te Gent.
F. W. WESTINK, te Leeuwarden.
W. HORA SICCAMA, 1e Luitenant ter Zee en Ridder van de 4e Klasse van de Militaire Willems Orde der Nederlanden, te Groningen.
H. VAN KRAAIJENOORD, te Batavia.
R. VAN WIJK JACOBUSZ., te Hattem.
C. DE JONGH, te Deventer.
D. H. BOSKAMP, te Haarlem.

P. J. PRINSEN, Directeur en Onderwijzer aan de Koninklijke Kweekschool voor Onderwijzers, te Haarlem.
S. KLIJNSMA, Kapitein Ingenieur, te Grave.
J. NICOLAIJ, Kapitein der Artillerie, Onder Directeur bij de Koninklijke IJzer-Geschutgieterij, te Luik.
. . . VON GAGEREN, Kapitein bij den Generalen Staf, te Dinant.
C. HOFFERS, te Haarlem.
M. B. JONG, te Grijpskerke.
C. J. DE JONG, te Arnhem.
M. C. PIERSON, Luitenant Ingenieur, te Charleroi.
J. W. MARTINI, te 's Hertogenbosch.
J. VAN DER STOK, Luitenant Ingenieur, te Oudenaarde.
J. P. DELPRAT, Kapitein Ingenieur, te Delft. (zie boven.)
H. ROODHUIJZEN, te Elburg.
G. J. SARLET te Haarlem.
J. W. SCHOLD, te Nijkerk.
W. TOP Wz., te Elburg.
A. P. H. KUIPERS, te Leeuwarden.
C. F. JULIUS, te Amsterdam.
A. J. BRINKERINK, te Nieuwendam.
W. SCHRAM, te Amsterdam.
E. G. STAAL, te Zwol.
R. VAN LIENEN, te Wijhe in Overijssel.
G. A. VAN KERKWIJK, Luitenant Ingenieur, te Delft.
P. DE VRIES, te Monnickendam.
H. K. GELLING, te Hattem.
B. BEKKING, te Amsterdam.
C. F. E. VAN INGEN, Luitenant Ingenieur, te Luik.
J. KOOPS, te Amsterdam.
G. BRANDSTEDER, te Melis en Mariekerke.
F. MOLENBROEK, te Amsterdam.
C. VAN HEIJNSBERGEN, Art. Lib. Mag. Ph. et Med. Doctor en Lector voor de Zeevaartkunde aan de Koninklijke Artillerie en Genie-School, te Delft.

L. RIJSTERBORGH, Eleve Adspirant van den Waterstaat en der Publieke werken, te 's Hertogenbosch.
P. T. GRINWIS, te Alkmaar.
J. CARSTEN, Luitenant Ingenieur, te Gent.
P. DE PEREZ, Adelborst der 1e Klasse bij de Koninklijke Marine.
H. WEIJTING, te Amsterdam.
L. LUBBERS, te Elburg.
L. BALL, te Zoutland op Walcheren.
J. BASSAN, te Amsterdam.
J. KÖHLER, te Amsterdam.
L. J. ULMAN, te Amsterdam.
A. B. DE BOCK JUNIOR, te Nieuwer-Amstel.
J. B. VOLMER VAN BORN, te Rotterdam.
A. E. TROMP, Kadet van de Scheepsbouw te Rotterdam.
J. ACQUOY, te Amsterdam.
W. N. ROSE, Luitenant Ingenieur, te Ath.
F. P. MASCHEK, Luitenant Ingenieur, te Gent.
H. RAZOUX, te Zwol.
H. STROOTMAN, Adjunct Onderwijzer te Bergen-op-Zoom
F. J. STAMKART, te Amsterdam.
J. JONKHERT, te Amsterdam.



WISKUNDIGE VOORSTELLEN

MET DERZELVER

ONTBINDINGEN.

I. VOORSTEL

Door U. HUGUENIN.

Den integraal van $\frac{x^m \partial x}{x^{2n} - 2a^n x^n \, Cos. n\alpha + a^{2n}}$ *in een eindig aantal termen uit te drukken?* (*)

OPLOSSING. *Door* U. HUGUENIN.

Men neemt hier aan, dat m en n geheele positieve getallen zijn, of door substitutie tot geheele positieve getallen kunnen worden gebragt; omdat alsdan, volgens het bekende theorema van DE MOIVRE, de noemer dezer breuk uit n factoren bestaat, die den vorm $x^2 - 2ax \, Cos. \omega + a^2$ hebben; zoodanig, dat de boog ω in deze n verschillende factoren wezen zal α, $\frac{2\pi}{n} + \alpha$, $\frac{4\pi}{n} + \alpha$, $\frac{6\pi}{n} + \alpha$, enz. tot $\frac{2(n-1)\pi}{n} + \alpha$, (†) of, dat op hetzelfde nederkomt, α; $\frac{2\pi}{n} - \alpha$, $\frac{2\pi}{n} + \alpha$, $\frac{4\pi}{n} - \alpha$, $\frac{4\pi}{n} + \alpha$, enz. tot $\frac{(n-1)\pi}{n} + \alpha$, als n oneven is, en tot $\pi - \alpha$ als n even is; waaruit zich alzoo laat opmaken, dat, onder gemelde voor-

waar-

(*) Men heeft, in den noemer, voor den bekenden hoek, $n\alpha$ en niet α gesteld, ten einde voor te komen, in de oplossing bestendig $\frac{\alpha}{n}$ in plaats van α te moeten schrijven.

(†) Zie *Wiskundige Lessen, tweede cursus*, door J. DE GELDER, *bl.* 375 en 376, als men namelijk in zijne formulen $\frac{x}{a}$ voor y en $n\alpha$ voor ϕ stelt.

waarden, zich de breuk $\frac{x^m}{x^{2n}-2a^nx^n\,Cos.\,n\omega+a^{2n}}$ moet laten ontbinden in n gedeeltelijke breuken, welke alle den vorm $\frac{A+Bx}{x^2-2ax\,Cos.\,\omega+a^2}$ hebben.

Om eene algemeene uitdrukking voor deze gedeeltelijke breuken te vinden, stelle men

$$\frac{x^m}{x^{2n}-2a^nx^n\,Cos.\,n\omega+a^{2n}}=\frac{A+Bx}{x^2-2ax\,Cos.\,\omega+a^2}+\frac{R}{S},$$

waarin R en S geheel onbekend zijn; doch men weet, dat als men deze breuken tot denzelfden noemer brengt, men zal moeten hebben

$$x^{2n}-2a^nx^n\,Cos.\,n\omega+a^{2n}=(x^2-2ax\,Cos.\,\omega+a^2)S \ldots (1),$$

en $x^m=(A+Bx)S+(x^2-2ax\,Cos.\,\omega+a^2)R \;\ldots\; (2)$,
hetgeen toereikende voor ons oogmerk is; want, daar x eene veranderlijke grootheid beteekent, zoo moeten deze vergelijkingen voor elke waarde van x doorgaan, en dus ook voor die, welke men zal vinden als men stelt

$$x^2-2ax\,Cos.\,\omega+a^2=0,$$

waaruit men, door de oplossing eener vierkantsvergelijking, verkrijgt

$$x=a\,Cos.\,\omega\pm a\,Sin.\,\omega\sqrt{-1},$$

zoodat, als men deze wortels uitdrukt door

$$x=a\,Cos.\,\omega+a\,Sin.\,\omega\sqrt{-1}=p$$

en

$$x=a\,Cos.\,\omega-a\,Sin.\,\omega\sqrt{-1}=q,$$

de som dezer wortels zal zijn $p+q=2a\,Cos.\,\omega$, terwijl derzelver product zal wezen $pq=a^2$.

Stelt men nu in de vergelijking (2) p of q in plaats van x, zoo wordt in beide gevallen de term

$$(x^2-2ax\,Cos.\,\omega+a^2)R=0,$$

en als men aanneemt, dat, door $x=p$ te stellen, S verandert in S′, en door $x=q$ te stellen, S verandert in S″, zoo verkrijgt men uit (2) de vergelijkingen

$$p^m=(A+Bp)S' \quad\text{en}\quad q^m=(A+Bq)S'',$$

waaruit men vindt

$$A=\frac{p^m q S''-q^m p S'}{(q-p)S'S''}=-\frac{p^m q}{(p-q)S'}+\frac{q^m p}{(p-q)S''}$$

en

en $B = \frac{p^m S'' - q^m S'}{(p-q)S'S''} = \frac{p^m}{(p-q)S'} - \frac{q^m}{(p-q)S''}$.

Ten einde nu S' en S'' in bekende grootheden uit te drukken, differentiëre men de vergelijking (1), waardoor men verkrijgt

$$2nx^{2n-1} - 2na^n x^{n-1} Cos.n\omega = (2x - 2aCos.\omega)S + (x^2 - 2axCos.\omega + a^2)\frac{\delta S}{\delta x};$$

en als men hierin vooreerst p en vervolgens q in plaats van x substitueert, waardoor S achtervolgens in S' en S'' verandert, en $x^2 - 2axCos.\omega + a^2 = 0$ wordt, zoo verkrijgt men de vergelijkingen

$$2np^{2n-1} - 2na^n p^{n-1} Cos.n\omega = (2p - 2aCos.\omega)S'$$

en $$2nq^{2n-1} - 2na^n q^{n-1} Cos.n\omega = (2q - 2aCos.\omega)S'',$$

waaruit men gemakkelijk vindt

$$S' = \frac{2n(p^{2n-1} - a^n p^{n-1} Cos.n\omega)}{2p - 2aCos.\omega} = \frac{2n(p^{2n-1} - a^n p^{n-1} Cos.n\omega)}{p-q}$$

en $$S'' = \frac{2n(q^{2n-1} - a^n q^{n-1} Cos.n\omega)}{2q - 2aCos.\omega} = -\frac{2n(q^{2n-1} - a^n q^{n-1} Cos.n\omega)}{p-q},$$

wanneer men namelijk, in beide uitdrukkingen, voor $2aCos.\omega$ derzelver waarde $p+q$ schrijft.

Substitueert men nu de waarde van S' en S'' in de gevondene uitdrukkingen voor A en B, zoo zal men verkrijgen

$$A = \frac{-p^m q}{2n(p^{2n-1} - a^n p^{n-1} Cos.n\omega)} - \frac{q^m p}{2n(q^{2n-1} - a^n q^{n-1} Cos.n\omega)}$$

$$= -\frac{pq}{2n}\left\{\frac{p^{m-1}}{p^{2n-1} - a^n p^{n-1} Cos.n\omega} + \frac{q^{m-1}}{q^{2n-1} - a^n q^{n-1} Cos.n\omega}\right\},$$

en $$B = \frac{p^m}{2n(p^{2n-1} - a^n p^{n-1} Cos.n\omega)} + \frac{q^m}{2n(q^{2n-1} - a^n q^{n-1} Cos.n\omega)}$$

$$= \frac{1}{2n}\left\{\frac{p^m}{p^{2n-1} - a^n p^{n-1} Cos.n\omega} + \frac{q^m}{q^{2n-1} - a^n q^{n-1} Cos.n\omega}\right\};$$

dat is, wanneer men de breuken onder en boven door derzelver noemer deelt en in aanmerking neemt, dat $pq = a^2$ is,

$$A = -\frac{a^2}{2n}\left\{\frac{1}{p^{2n-m} - a^n p^{n-m} Cos.n\omega} + \frac{1}{q^{2n-m} - a^n q^{n-m} Cos.n\omega}\right\}$$

en $$B = \frac{1}{2n}\left\{\frac{1}{p^{2n-m-1} - a^n p^{n-m-1} Cos.n\omega} + \frac{1}{q^{2n-m-1} - a^n q^{n-m-1} Cos.n\omega}\right\}.$$

Brengt men voorts in A en B de breuken tot denzelfden noemer, zoo vindt men

$$A = -\frac{a^2}{2n} \times \frac{p^{2n-m} + q^{2n-m} - (p^{n-m} + q^{n-m}) a^n Cos. n\alpha}{(pq)^{2n-m} - (pq)^{n-m}(p^n + q^n) a^n Cos. n\alpha + (pq)^{n-m} a^{2n} Cos.^2 n\alpha}$$

$$B = \frac{1}{2n} \times \frac{p^{2n-m-1} + q^{2n-m-1} - (p^{n-m-1} + q^{n-m-1}) a^n Cos. n\alpha}{(pq)^{2n-m-1} - (pq)^{n-m-1}(p^n + q^n) a^n Cos. n\alpha + (pq)^{n-m-1} a^{2n} Cos.^2 n\alpha}$$

Daar men nu voor ieder getal r heeft

$$a^r Cos. r\omega + a^r Sin. r\omega \sqrt{-1} = (a Cos. \omega + a Sin. \omega \sqrt{-1})^r = p^r$$

en $a^r Cos. r\omega - a^r Sin. r\omega \sqrt{-1} = (a Cos. \omega - a Sin. \omega \sqrt{-1})^r = q^r$,

waaruit door optelling volgt

$$2 a^r Cos. r\omega = p^r + q^r,$$

zoo is $p^n + q^n = 2 a^n Cos. n\omega$,

$$p^{n-m} + q^{n-m} = 2 a^{n-m} Cos. (n-m)\omega,$$

$$p^{2n-m} + q^{2n-m} = 2 a^{2n-m} Cos. (2n-m)\omega,$$

en zoo vervolgens; en daar bovendien $pq = a^2$ is, zoo gaan de waarden van A en B hierdoor over in,

$$A = -\frac{a^2}{2n} \times \frac{2a^{2n-m} Cos. (2n-m)\omega - 2a^{n-m} a^n Cos. (n-m)\omega Cos. n\alpha}{a^{2(2n-m)} - a^{2(n-m)} . 2a^n Cos. n\omega . a^n Cos. n\alpha + a^{2(n-m)} a^{2n} . Cos.^2 n\alpha}$$

$$= -\frac{a}{n . a^{2n-m-1}} \times \frac{Cos. (2n-m)\omega - Cos. (n-m)\omega Cos. n\alpha}{1 - 2 Cos. n\omega Cos. n\alpha + Cos.^2 n\alpha}.$$

$$B = \frac{1}{n . a^{2n-m-1}} \times \frac{Cos. (2n-m-1)\omega - Cos. (n-m-1)\omega Cos. n\alpha}{1 - 2 Cos. n\omega Cos. n\alpha + Cos.^2 n\alpha},$$

Deze waarden van A en B zijn algemeen en dienen voor de n gedeeltelijke breuken, waarin het gegeven gebroken ontbonden kan worden, zoodanig dat men, om A en B voor elk der gedeeltal der gebrokens te verkrijgen, in onze gevondene formulen voor ω achtervolgens zal moeten stellen α, $\frac{2\pi}{n} + \alpha$, $\frac{4\pi}{n} + \alpha$, $\frac{6\pi}{n} + \alpha$, enz. tot $\frac{2(n-1)\pi}{n} + \alpha$, van welke bogen de cosinussen elk eene verschillende waarde hebben. Daar echter in den algemeenen noemer van A en B de uitdrukking $Cos. n\omega$ voorkomt, die, voor de n achtervolgende gedeeltelijke breuken, worden zal $Cos. n\alpha$, $Cos. (2\pi + n\alpha)$, $Cos. (4\pi + n\alpha)$, $Cos. (6\pi + n\alpha)$, enz. tot $Cos. (2(n-1)\pi + n\alpha)$; welke alle aan elkander gelijk zijn, zoo gaat deze algemeene noemer over in

$$1 - 2 Cos. n\omega Cos. n\alpha + Cos.^2 n\alpha = 1 - 2 Cos.^2 n\alpha + Cos.^2 n\alpha = Sin.^2 n\alpha,$$

en

en hierdoor verkrijgen wij

$$A = -\frac{a}{n.a^{2n-m-1}\,Sin.^2 na} \times \left\{Cos.(2n-m)\omega - Cos.(n-m)\omega\,Cos.na\right\}$$

$$B = \frac{1}{n.a^{2n-m-1}\,Sin.^2 na} \times \left\{Cos.(2n-m-1)\omega - Cos.(n-m-1)\omega\,Cos\,na\right\},$$

waarin dan nu voor ω achtervolgens de reeks van uitdrukkingen moet worden gesteld, die boven is opgegeven, ten einde de waarden van A en B voor al de gedeeltelijke breuken te verkrijgen.

Stellen wij dan de waarden, die

$$Cos.(2n-m)\omega - Cos.(n-m)\omega\,Cos.na$$

voor de verschillende waarden van ω verkrijgt, achtervolgens voor door A_1, A_2, A_3, *enz.* tot A_n, terwijl wij de waarden, die

$$Cos.(2n-m-1)\omega - Cos.(n-m-1)\omega\,Cos.na$$

hierdoor verkrijgt, door B_1, B_2, B_3, *enz.* tot B_n uitdrukken, dan zullen wij vinden, voor de verschillende waarden van de eerste

$$A_1 = Cos.(2n-m)a - Cos.(n-m)a\,Cos.na,$$

$$A_2 = Cos.(2n-m)\left(\frac{2\pi}{n}+a\right) - Cos.(n-m)\left(\frac{2\pi}{n}+a\right)Cos.na,$$

$$A_3 = Cos.(2n-m)\left(\frac{4\pi}{n}+a\right) - Cos.(n-m)\left(\frac{4\pi}{n}+a\right)Cos.na,$$

enz. *enz.*

$$A_n = Cos.(2n-m)\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}+a\right) - Cos.(n-m)\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}+a\right)Cos.na.$$

en voor de verschillende waarden van de tweede

$$B_1 = Cos.(2n-m-1)a - Cos.(n-m-1)a\,Cos.na,$$

$$B_2 = Cos.(2n-m-1)\left(\frac{2\pi}{n}+a\right) - Cos.(n-m-1)\left(\frac{2\pi}{n}+a\right)Cos.na,$$

$$B_3 = Cos.(2n-m-1)\left(\frac{4\pi}{n}+a\right) - Cos.(n-m-1)\left(\frac{4\pi}{n}+a\right)Cos.na,$$

enz. *enz.*

$$B_n = Cos.(2n-m-1)\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}+a\right) - Cos.(n-m-1)\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}+a\right)C.na.$$

Deze waarden alzoo berekend hebbende, verkrijgen wij eindelijk de volgende uitdrukking voor de oorspronkelijke breuk:

$$\frac{x^m}{x^{2n} - 2a^n x^n Cos.na + a^{2n}} = \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{n \cdot a^{2n-2m-1} Sin^2. n a} \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{B_1 x - a A_1}{x^2 - 2 a x Cos. a + a^2} + \\ \frac{B_2 x - a A_2}{x^2 - 2 a x Cos. (\frac{2\pi}{n} + a) + a^2} + \\ \frac{B_3 x - a A_3}{x^2 - 2 a x Cos. (\frac{4\pi}{n} + a) + a^2} + \\ enz. \ldots\ldots + \\ \frac{B_n x - a A_n}{x^2 - 2 a x Cos. (\frac{2(n-1)\pi}{n} + a) + a^2} \end{array} \right\}$$

Vermenigvuldigt men nu het eerste lid, en de tellers der gedeeltelijke breuken in het tweede lid, met ∂x, zoo komt er de differentiaal formule te voorschijn, die geïntegreerd moet worden; daar echter de n gedeeltelijke breuken alle den vorm $\frac{(Mx - N)\partial x}{x^2 - 2bx + a^2}$ hebben, zoo behoeft men alleen den algemeenen integraal

$$\int \frac{(Mx - N)\partial x}{x^2 - 2bx + a^2} = \int \frac{Mx\partial x}{x^2 - 2bx + a^2} - \int \frac{N\partial x}{x^2 - 2bx + a^2}$$

te zoeken. De leerwijze hiertoe is genoegzaam bekend, en wanneer men den integraal zoodanig bepaalt, dat dezelve voor $x = 0$ verdwijnt, en de gelijksoortige termen vereenigt, zal men vinden

$$\int \frac{(Mx - N)\partial x}{x^2 - 2bx + a^2} = \tfrac{1}{2} M \; Nep. Log. \left\{ \frac{x^2 - 2bx + a^2}{a^2} \right\} + \frac{Mb - N}{\sqrt{(a^2 - b^2)}} \; Boog. Tang. \frac{x\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a^2 - bx}.$$

Stelt men in deze algemeene uitdrukking $M = B$, $N = aA$, en $b = a \, Cos. a$, zoo verkrijgt men voor den integraal van de eerste gedeeltelijke breuk

$$\int \frac{(B_1 x - aA_1)\partial x}{x^2 - 2ax Cos. a + a^2} = \tfrac{1}{2} B_1 \; Nep. Log. \left\{ \frac{x^2 - 2ax Cos. a + a^2}{a^2} \right\} + \frac{B_1 a Cos. a - a A_1}{\sqrt{(a^2 - a^2 Cos^2. a)}} \; Boog. Tang. \frac{x\sqrt{(a^2 - a^2 Cos^2. a)}}{a^2 - a x Cos. a}$$

of dat hetzelfde is

$$\int \frac{(B_1 x - aA_1)\partial x}{x^2 - 2ax Cos. a + a^2} = \tfrac{1}{2} B_1 \; Nep. Log. \left\{ \frac{x^2 - 2ax Cos. a + a^2}{a^2} \right\} + \ldots$$

B₁

$$\frac{B_1 Cos. a - A_1}{Sin. a} Boog. Tang. \frac{x Sin. a}{a - x Cos. a}$$

en wanneer men op gelijke wijze met de overige gedeeltelijke breuken te werk gaat, verkrijgt men voor den gezochten integraal

$$\int \frac{x^m \partial x}{x^{2n} - 2a^n x^n Cos. na + a^{2n}} = \frac{1}{n a^{2n-m-1} Sin^2. na} \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} B_1 Nep. Log. \frac{x^2 - 2ax Cos. a + a^2}{a^2} + \\ \frac{1}{2} B_2 Nep. Log. \frac{x^2 - 2ax Cos. (\frac{2\pi}{n} + a) + a^2}{a^2} + \\ \frac{1}{2} B_3 Nep. Log. \frac{x^2 - 2ax Cos. (\frac{4\pi}{n} + a) + a^2}{a^2} + \\ enz. \ldots\ldots\ldots + \\ \frac{1}{2} B_n Nep. Log. \frac{x^2 - 2ax Cos. (\frac{2(n-1)\pi}{n} + a) + a^2}{a^2} + \\ \frac{B_1 Cos\, a - A_1}{Sin. a} Boog. Tang. \frac{x Sin. a}{a - x Cos. a} + \\ \frac{B_2 Cos. (\frac{2\pi}{n} + a) - A_2}{Sin (\frac{2\pi}{n} + a)} Boog. Tang. \frac{x Sin. (\frac{2\pi}{n} + a)}{a - x Cos. (\frac{2\pi}{n} + a)} + \\ \frac{B_3 Cos. (\frac{4\pi}{n} + a) - A_3}{Sin (\frac{4\pi}{n} + a)} Boog. Tang. \frac{x Sin. (\frac{4\pi}{n} + a)}{a - x Cos. (\frac{4\pi}{n} + a)} + \\ enz. \ldots\ldots\ldots + \\ \frac{B_n Cos. (\frac{2(n-1)\pi}{n} + a) - A_n}{Sin. (\frac{2(n-1)\pi}{n} + a)} Boog. Tang. \frac{x Sin (\frac{2(n-1)\pi}{n} + a)}{a - x Cos. (\frac{2(n-1)\pi}{n} + a)} \end{array} \right\}$$

wel te verstaan, wanneer men hierin de vroeger gevondene waarden van A_1, A_2, A_3, enz. en B_1, B_2, B_3, enz. substitueert. Deze waarden kan men echter tot eenen meer eenvoudigen vorm herleiden dan dien, welken wij boven hebben opgegeven, door uit derzelver tweede term den factor *Cos. na* weg te nemen, het-

geen met behulp der bekende goniometrische formule $Cos. p\ Cos. q = \frac{1}{2} Cos. (p-q) + \frac{1}{2} Cos. (p+q)$ kan worden te weeg gebragt, en door, in plaats van $Cos. (2(n-1)\pi + A)$, te stellen $Cos. A$, als wanneer men verkrijgen zal.

$$A_1 = \tfrac{1}{2} Cos. (2n-m)a - \tfrac{1}{2} Cos. ma,$$

$$A_2 = \tfrac{1}{2} Cos. \left\{ (2n-m)a - m.\frac{2\pi}{n} \right\} - \tfrac{1}{2} Cos. m\left(\frac{2\pi}{n}+a\right),$$

$$A_3 = \tfrac{1}{2} Cos. \left\{ (2n-m)a - m.\frac{4\pi}{n} \right\} - \tfrac{1}{2} Cos. m\left(\frac{4\pi}{n}+a\right),$$

enz.

$$A_n = \tfrac{1}{2} Cos. \left\{ (2n-m)a - m.\frac{2(n-1)\pi}{n} \right\} - \tfrac{1}{2} Cos. m\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}+a\right);$$

en

$$B_1 = \tfrac{1}{2} Cos. (2n-m-1)a - \tfrac{1}{2} Cos. (m+1)a,$$

$$B_2 = \tfrac{1}{2} Cos. \left\{ (2n-m-1)a - (m+1).\frac{2\pi}{n} \right\} - \tfrac{1}{2} Cos. (m+1)\left(\frac{2\pi}{n}+a\right),$$

$$B_3 = \tfrac{1}{2} Cos. \left\{ (2n-m-1)a - (m+1).\frac{4\pi}{n} \right\} - \tfrac{1}{2} Cos. (m+1)\left(\frac{4\pi}{n}+a\right),$$

enz.

$$B_n = \tfrac{1}{2} Cos. \left\{ (2n-m-1)a - (m+1).\frac{2(n-1)\pi}{n} \right\} - \tfrac{1}{2} Cos. (m+1)\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}+a\right).$$

II. VOORSTEL.

Door I. W. MARTINI.

In een omwentelingsligchaam, voortgebragt door de omwenteling van eene ellips om de groote as, een' cilinder te beschrijven, waarvan de inhoud een maximum is, en tevens den inhoud te bepalen van de segmenten en van het ringvormig ligchaam, welke door het oppervlak van den cilinder uit dit omwentelingsligchaam gesneden worden?

OPGELOST *door* I. W. MARTINI, F. J. STAMKART, J. BASSAN, W. TOB Wz. en R. VAN WIJK Jz.

OPLOSSING *van* I. W. MARTINI.

Stellen wij de halve assen van de ellips, door welke het omwentelingsligchaam is voortgebragt, $AE = a$ en $CE = b$, *Fig.* 1, en laat GHIK den grootsten ingeschreven' cilinder verbeelden, dan zal alles bepaald zijn, indien wij de waarde van den afstand

AF

$AF = x$ kunnen vinden, welke het snijdende vlak KG van den top A heeft. Hiertoe heeft men $EF = a - x$ en $FG^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (2ax - x^2)$, zoodat

$$inh.\ cil.\ GHIK = \pi FG^2 \times 2 EF = 2\pi \frac{b^2}{a^2} (2ax - x^2)(a - x) \quad (1)$$

en daar deze inhoud een maximum moet zijn, behoeven wij alleen de functie

$$z = (2ax - x^2)(a - x) = 2a^2x - 3ax^2 + x^3$$

tot een maximum te maken.

De achtervolgende differentiaal quotienten dezer functie zijn

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2a^2 - 6ax + 3x^2,$$

en

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -6a + 6x = -6(a - x).$$

Daar nu voor het maximum het eerste differentiaal quotient gelijk 0 moet zijn, zoo is

$$3x^2 - 6ax + 2a^2 = 0,$$

waaruit

$$x = \tfrac{1}{3}a(3 \pm \sqrt{3}) = a \pm \tfrac{1}{3}a\sqrt{3}.$$

Deze twee waarden van x geven denzelfden cilinder te kennen; want daar $AE = a$ is, zoo zullen wij, $EF = EF' = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$ nemende, hebben $AF' = a + \frac{1}{3}a\sqrt{3}$ en $AF = a - \frac{1}{3}a\sqrt{3}$, waaruit blijkt, dat de twee verschillende waarden van x de afstanden doen kennen, die het boven- en benedenvlak des cilinders van den top A hebben.

Het is uit den aard der zaak klaar, dat de gevondene cilinder een maximum en geen minimum kan zijn. Substitueren wij $x = a - \frac{1}{3}a\sqrt{3} = AF$ in het tweede differentiaal quotient, dan vinden wij ook werkelijk $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2a\sqrt{3}$, hetgeen een maximum aanduidt.

Offschoon nu $x = a + \frac{1}{3}a\sqrt{3}$, zoo als wij reeds vroeger opmerkten, denzelfden cilinder geeft als $x = a - \frac{1}{3}a\sqrt{3}$, zoo maakt echter $x = AF' = a + \frac{1}{3}a\sqrt{3}$ het tweede differentiaal quotient gelijk $+2a\sqrt{3}$, en deze waarde van x toont dus een minimum aan. De cilinder HGKI kan alzoo als een maximum en als een minimum beschouwd worden, naar mate men KG dan uit IH als

 het

het bovenvlak aanmerkt. Men kan dit ook op de volgende wijze duidelijk maken; beschouwt men KG als het bovenvlak, dan ligt de hoogte GH beneden dit vlak, en deze toestand die zijnde, welke bij de oplossing is aangenomen, moet in dezelve alles als positief worden beschouwd. Neemt men nu IH als bovenvlak aan, dan ligt de hoogte GK boven dit vlak en dus in tegenovergestelde rigting van het voorgaande geval; dezelve zal dus als negatief moeten worden aangemerkt, waardoor dan ook de inhoud door een negatief getal zal worden uitgedrukt. — Hoe men dit nu ook beschouwt, blijft altijd HGKI de grootste cilinder, die in de ellipsoide kan worden beschreven, en dus die, welke bepaald moest worden.

Den inhoud van dezen grootsten cilinder vinden wij, door in (1) voor x de gevondene waarde $\frac{1}{3}a(3-\sqrt{3})$ te schrijven, waardoor wij voor denzelven vinden

$$\textit{Inh. cil.}\ \mathrm{HGKI} = \tfrac{2}{9}\pi a b^2 \sqrt{3} \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (8).$$

Om den inhoud van het elliptisch segment KAG te bepalen, kunnen wij op de volgende wijze te werk gaan. Snijden wij de ellipsoide en den omgeschreven bol door een zelfde vlak K′G′, loodregt door de as gaande, en stellen wij de inhouden der segmenten, die hierdoor van de ellipsoide en den bol gesneden worden, I en I′, dan is, AF $= x$ blijvende noemen,

$$\delta \mathrm{I} = \mathrm{FG}^2 \pi \delta x \quad \text{en} \quad \delta \mathrm{I}' = \mathrm{FG}'^2 \times \pi \delta x,$$

dat is, omdat $\mathrm{FG}^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$ en $\mathrm{FG}'^2 = 2ax - x^2$ is,

$$\delta \mathrm{I} = \frac{b^2 \pi}{a^2}(2ax - x^2)\delta x \quad \text{en} \quad \delta \mathrm{I}' = \pi(2ax - x^2)\delta x,$$

en daar deze uitdrukkingen tusschen dezelfde grenzen moeten worden geïntegreerd, zoo volgt hieruit

$$\delta \mathrm{I} = \frac{b^2}{a^2}\delta \mathrm{I}' \quad \text{en} \quad \mathrm{I} = \frac{b^2}{a^2}\mathrm{I}'.$$

Daar nu de inhoud van het bolvormig segment is $\mathrm{I}' = \frac{1}{3}x^2 \times (3a - x)\pi$, zoo volgt hieruit, voor het elliptisch segment $\mathrm{I}' = \frac{b^2 \pi}{3a^2}x^2(3a - x)$, en stellende hierin voor x de gevondene waarde $a - \frac{1}{3}a\sqrt{3}$, dan komt er

$$\textit{Segm.}\ \mathrm{KAG} = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{b^2}{a^2}\pi \cdot \tfrac{2}{3}a^2(2 - \sqrt{3}) \cdot \tfrac{1}{3}a(6 + \sqrt{3}),$$

dat

dat is, *Segm.* KAG $=$ *Segm.* IBH $= \frac{2}{27} b^2 a (9 - 4\sqrt{3})\pi$ . . . (3).

Tellen wij het dubbele segment bij den inhoud van den cilinder, dan komt er voor de som

$$\tfrac{4}{27} b^2 a (9 - 4\sqrt{3})\pi + \tfrac{4}{9} b^2 a \sqrt{3} . \pi,$$

dit is

$$\tfrac{4}{27} b^2 a (9 - \sqrt{3})\pi,$$

en trekkende dit af van den inhoud der ellipsoide, dat is van $\frac{b^2}{a} . \frac{4}{3} a^3 \pi$ of $\frac{4}{3} b^2 a \pi$, dan blijft er, voor den inhoud van het ringvormig ligchaam, door de omwenteling van KCI voortgebragt,

$$\textit{Inh. ringv. ligch.} = \tfrac{4}{27} b^2 a . \pi \sqrt{3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Uit de vergelijking dezer uitkomsten blijkt nog, dat de inhoud van het ringvormig ligchaam gelijk is aan een derde van den inhoud des grootsten cilinders, en dat de inhoud van dezen cilinder tot den inhoud van de geheele ellipsoide in reden is als 1 tot $\sqrt{3}$.

Daar AF $= a - \frac{1}{3} a \sqrt{3}$ geheel onafhankelijk van b is, zoo volgt hieruit, dat de vlakken KG en IH den grootsten cilinder bepalen voor al de ellipsoiden, die dezelfde groote as AB hebben. Indien dus GHIK de grootste cilinder is, die in de ellipsoide ACBD beschreven kan worden, zal ook G′H′I′K′ de grootste cilinder zijn, welke in den bol AC′BD′ kan worden geplaatst.

III. VOORSTEL.

Door I. W. MARTINI.

In het ligchaam, door de omwenteling van eene ellips om de groote as voortgebragt, eenen cilinder te beschrijven, waarvan het gebogen oppervlak een maximum is, en verder den inhoud der drie stukken te berekenen, waarin het oppervlak van dat omwentelings-ligchaam, door de omtrekken van het boven- en benedenvlak des cilinders, verdeeld wordt?

OPGELOST *door* I. W. MARTINI, F. J. STAMKART, J. BASSAN, W. TOP Wz. en R. VAN WIJK Jz.

OPLOSSING *van* I. W. MARTINI.

Stellen wij wederom, *Fig.* 2, dat GHIK de gevraagde cilinder is, en noemen wij nogmaals AE $= a$, CE $= b$ en AF $= x$, dan is FG $= \frac{b}{a} \sqrt{(2ax - x^2)}$; de omtrek van het grondvlak is alzoo $\frac{2b\pi}{a} \sqrt{(2ax - x^2)}$ en daar de hoogte FF′ $= 2(a - x)$ is, zoo vinden wij

ge-

$$\text{gebogen opperv. cil.} = \frac{4b\pi}{a}(a-x)\sqrt{(2ax-x^2)}$$

en het zal dus genoegzaam zijn de functie

$$z = (a-x)^2(2ax-x^2) = 2a^3x - 5a^2x^2 + 4ax^3 - x^4$$

tot een maximum te maken. Hiertoe hebben wij

$$\frac{\delta z}{\delta x} = 2a^3 - 10a^2x + 12ax^2 - 4x^3$$

en

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = -10a^2 + 24ax - 12x^2.$$

Het eerste differentiaal quotient gelijk nul stellende, komt er

$$4x^3 - 12ax^2 + 10a^2x - 2a^3 = 0,$$

waarvan de wortels zijn

$$x = a, \quad x = a + \tfrac{1}{2}a\sqrt{2} \quad \text{en} \quad x = a - \tfrac{1}{2}a\sqrt{2}.$$

Voor de eerste verdwijnt het gebogen oppervlak geheel en al, en deze voldoet alzoo niet aan de vraag. De twee anderen geven daarentegen denzelfden cilinder te kennen, daar, $EF = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$ makende, AF en AF′ de twee waarden van x zijn, en wij komen hier alzoo op dezelfde aanmerkingen neder, waartoe de twee waarden van AF en AF′ in het voorgaande vraagstuk aanleiding gaven.

De waarde van AF wordt geconstrueerd, door om de ellips een' regthoek LMNO te beschrijven, en in denzelven de diagonalen LN en OM te trekken; want derzelver doorsnijding met de ellips bepaalt den regthoek GHIK, die, door derzelver omwenteling, den begeerden cilinder voortbrengt. Wij hebben namelijk door deze constructie $EF : FG = a : b$ of $FG = \frac{b}{a} EF$; maar uit de eigenschap van de ellips is $FG^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - EF^2) = b^2 - \frac{b^2}{a^2}EF^2$, dus $\frac{b^2}{a^2}EF^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}EF^2$ of $\frac{2b^2}{a^2}EF^2 = b^2$, dat is $EF^2 = \frac{1}{2}a^2$, waaruit $EF = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$, en dus $AF = a - \frac{1}{2}a\sqrt{2} = x$. Daar wij nu in voorstel 241 gevonden hebben, dat de regthoek, door deze constructie voortgebragt, de grootste is, die in de ellips kan worden beschreven, zoo volgt hieruit, *dat de grootst mogelijke regthoek in eene ellips beschreven, door derzelver omwenteling om de groote as, den cilinder voortbrengt, waarvan het gebogen oppervlak een maximum is.*

Uit

Uit $EF = \frac{1}{2} a \sqrt{2}$ en onze constructie volgt onmiddellijk $FE = \frac{1}{2} b \sqrt{2}$, en hierdoor vinden wij voor het gebogen oppervlak van den cilinder

$$\text{geb. opp. cil.} = b \pi \sqrt{2} \times a \sqrt{2} = 2 \pi a b \quad (1).$$

De inhoud van het boven- of benedenvlak is $FG^2 \pi$ of $\frac{1}{2} b^2 \pi$, de som dezer twee vlakken is dus $b^2 \pi$ en bij gevolg gelijk den cirkel, die b tot straal heeft, dat is, gelijk de grootste cirkel, die uit de ellipsoide kan worden gesneden.

Om de stukken te berekenen, waarin het oppervlak van de ellipsoide verdeeld is, hebben wij, door de algemeene formule voor het oppervlak van eenig omwentelingsligchaam,

$$\partial O = 2 y \pi \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)};$$

nu is in ons geval $y = \frac{b}{a} \sqrt{(2ax - x^2)}$ dus $\partial y = \frac{b}{a} \cdot \frac{a - x}{\sqrt{(2ax - x^2)}} \partial x$

en $\partial x^2 + \partial y^2 = \frac{a^2 b^2 + 2a(a^2 - b^2)x - (a^2 - b^2)x^2}{a^2 (2ax - x^2)} \cdot \partial x^2$, substituerende dit in de waarde van ∂O, dan komt er

$$\partial O = \frac{2 b \pi}{a^2} \partial x \sqrt{\{a^2 b^2 + 2a(a^2 - b^2)x - (a^2 - b^2)x^2\}}$$

en $$O = \frac{2 b \pi}{a^2} \int \partial x \sqrt{\{a^2 b^2 + 2a(a^2 - b^2)x - (a^2 - b^2)x^2\}},$$

Stellende hierin $x = a - u$, dan is $\partial x = -\partial u$ en de laatste formule gaat over in

$$O = -\frac{2 b \pi \sqrt{(a^2 - b^2)}}{a^2} \int \partial u \sqrt{\left\{\frac{a^4}{a^2 - b^2} - u^2\right\}}.$$

Stellende verder tot bekorting $\frac{a^4}{a^2 - b^2} = n^2$, dan komt er

$$O = -\frac{2 b \pi \sqrt{(a^2 - b^2)}}{a^2} \int \partial u \sqrt{(n^2 - u^2)}$$

of, wanneer wij $u = n z$ stellen,

$$O = -2 b \pi \cdot \frac{1}{n} \int n \partial z \sqrt{(n^2 - n^2 z^2)} = -2 b \pi n \int \partial z \sqrt{(1 - z^2)}$$

$$= -2 b \pi n \left\{ \int \frac{\partial z}{\sqrt{(1 - z^2)}} - \int \frac{z^2 \partial z}{\sqrt{(1 - z^2)}} \right\}.$$

Nu is $\int \frac{\partial z}{\sqrt{(1 - z^2)}} = \text{Boog. Sin. } z$

en

en $\int \frac{z^2 \partial z}{\sqrt{(1-z^2)}} = \frac{1}{2}$ Boog. Sin. $z - \frac{1}{2} z\sqrt{(1-z^2)}$,

dus $\int \partial z \sqrt{(1-z^2)} = \frac{1}{2}$ Boog. Sin. $z + \frac{1}{2} z\sqrt{(1-z^2)} + C$;

en $O = 2b\pi n \{C - \frac{1}{2}$ Boog. Sin. $z - \frac{1}{2} z\sqrt{(1-z^2)}\}$;

dat is $O = b\pi n\{C -$ Boog. Sin. $z - z\sqrt{(1-z^2)}\}$;

nu is $n = \sqrt{\frac{a^4}{a^2-b^2}}$ en $z = \frac{u}{n} = \frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a^2} u = \frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a^2}(a-x)$,

waardoor

$$O = \frac{ba^2\pi}{\sqrt{(a^2-b^2)}}\left\{C - \text{Boog.Sin.}\frac{(a-x)\sqrt{(a^2-b^2)}}{a^2} - \frac{(a-x)\sqrt{(a^2-b^2)}}{a^2} \times \sqrt{\left(1-\frac{(a^2-b^2)(a-x)^2}{a^4}\right)}\right\};$$

daar nu deze integraal voor $x = 0$ moet verdwijnen, zoo is

$$C = \text{Boog. Sin.}\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a} + \frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}\sqrt{\left(1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)}$$

$$= \text{Boog. Sin.}\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a} + \frac{b\sqrt{(a^2-b^2)}}{a^2},$$

waardoor de integraal eindelijk overgaat in

$$O = \frac{ba^2\pi}{\sqrt{(a^2-b^2)}}\left\{\text{Boog.Sin.}\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a} - \text{Boog.Sin.}\frac{(a-x)\sqrt{(a^2-b^2)}}{a^2} + \frac{b\sqrt{(a^2-b^2)}}{a^2} - \frac{(a-x)\sqrt{(a^2-b^2)}}{a^4}\sqrt{(a^4-(a^2-b^2)(a-x)^2)}\right\} \;.\;.\; (2)$$

Stellende hierin $x = a$, dan komt er voor het halve oppervlak van de ellipsoide

$$\frac{ba^2\pi}{\sqrt{(a^2-b^2)}}\text{Boog. Sin.}\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a} + b^2\pi,$$

en wij hebben dus voor het geheele oppervlak

$$\text{Opp. Ellipsoide} = 2\pi b\left\{b + \frac{a^2}{\sqrt{(a^2-b^2)}}\text{Boog. Sin.}\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}\right\} \;.\;.\; (3)$$

Om het oppervlak van het segment KAG te vinden moeten wij in (2) stellen $x = a - \frac{1}{2}a\sqrt{2}$, en dit geeft ons

$$\text{Opp. Segm. KAG} = \frac{ba^2\pi}{\sqrt{(a^2-b^2)}}\left\{\text{Boog. Sin.}\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a} - \text{Boog. Sin.}\frac{\sqrt{2(a^2-b^2)}}{2a}\right\} + \frac{1}{2}b\pi\left\{2b - \sqrt{(a^2+b^2)}\right\} \;.\;.\; (4)$$

of,

of, de twee bogen vereenigende,

$$Op.Seg.KAG = \frac{ba^2\pi}{\sqrt{(a^2-b^2)}} Boog.Sin. \frac{\sqrt{2(a^2-b^2)}}{2a} (\sqrt{(a^2+b^2)}-b).$$

$$+\tfrac{1}{2}b\pi\left\{2b-\sqrt{(a^2+b^2)}\right\}.$$

Trekkende eindelijk het dubbel van dit segment af van het geheele oppervlak, dan blijft er voor het middelste stuk

$$b\pi\sqrt{(a^2+b^2)} + \frac{2\pi b a^2}{\sqrt{(a^2-b^2)}} Boog.Sin. \frac{\sqrt{2(a^2-b^2)}}{2a}.$$

IV. VOORSTEL.

Door I. W. MARTINI.

Van eenen driehoek is gegeven de lijn, welke den tophoek in twee gegevene deelen verdeelt, benevens de reden der stukken, waarin dezelve de overstaande zijden verdeelt. Men vraagt denen driehoek, zoo wel door constructie als door berekening, op te lossen?

OPGELOST *door* I. W. MARTINI, L. J. ULMAN, F. J. STAMKART, J. BASSAN, A. B. DE BOCK JR. en W. TOP WZ.

OPLOSSING *van* I. W. MARTINI.

Stellen wij de gegevens AD $= a$, *Fig.* 3, $\angle$ BAD $= \alpha$, $\angle$ CAD $= \beta$ en BD : DE $= p : q$; verder stelle men BD $= v$, DC $= w$ en $\angle$ ADB $= \phi$, en men heeft alsdan $\angle$ ABD $= 180° - (\alpha + \phi)$ en $\angle$ ACD $= \phi - \beta$, waardoor

$$v : a = Sin.\alpha : Sin.(\alpha+\phi) \quad \text{en} \quad w : a = Sin.\beta : Sin.(\phi-\beta)$$

zoodat $v = a \times \dfrac{Sin.\alpha}{Sin.(\alpha+\phi)}$ en $w = a \times \dfrac{Sin.\beta}{Sin.(\phi-\beta)}$

Daar nu $v : w = p : q$ is, zoo geven ons de bovenstaande uitdrukkingen, daar zij beide den factor a bevatten,

$$\frac{Sin.\alpha}{Sin.(\alpha+\phi)} : \frac{Sin.\beta}{Sin.(\phi-\beta)} = p : q.$$

of $$p \times \frac{Sin.\beta}{Sin.(\phi-\beta)} = q \times \frac{Sin.\alpha}{Sin.(\alpha+\phi)}$$

dat is $$p\, Sin.\beta\, Sin.(\alpha+\phi) = q\, Sin.\alpha\, Sin.(\phi-\beta)$$

of wanneer wij $Sin.(\alpha+\phi)$ en $Sin.(\phi-\beta)$ ontwikkelen en alles door $Sin.\phi$ deelen

$$p\, Sin.\beta\,(Sin.\alpha + Cos.\alpha\, Tang.\phi) = q\, Sin.\alpha\,(Cos.\beta\, Tang.\phi - Sin.\beta)$$

dat is $(q\, Sin.\alpha\, Cos.\beta - p\, Sin.\beta\, Cos.\alpha)\, Tang.\phi = (p+q) Sin.\alpha\, Sin.\beta$,

zoodat $$Tang.\phi = \frac{(p+q)\, Sin.\alpha\, Sin.\beta}{q\, Sin.\alpha\, Cos.\beta - p\, Sin.\beta\, Cos.\alpha}$$

of

of onder en boven door $Sin.\alpha\ Sin.\beta$ deelende,

$$Tang.\,\phi = \frac{p+q}{q\,Cot.\,\beta - p\,Cot.\,\alpha},$$

en hierdoor ϕ berekend hebbende, is al het overige bepaald, om dat wij hebben $\angle ABD = 180° - (\alpha + \phi)$, $\angle ACD = \beta - \phi$,

$$BD = v = a\frac{Sin.\,\alpha}{Sin.\,(\alpha+\phi)} \text{ en } w = a\frac{Sin.\,\beta}{Sin.\,(\phi-\beta)},$$ waaruit verder

$$BC = v + w, \quad AB = \frac{v\,Sin.\,\phi}{Sin.\,\alpha} \text{ en } AC = w \times \frac{Sin.\,\phi}{Sin.\,\beta}.$$

Den driehoek alzoo door berekening opgelost hebbende, gaan wij over om aan te wijzen, hoe dezelve geconstrueerd kan worden.

Maak de hoeken GAD en DAH gelijk de gegevene hoeken α en β en maak AD gelijk de gegevene lijn a. Trek door D eene willekeurige lijn IK, snijdende AH in E. Neem DF zoodanig, dat DE : DF $= q : p$ is en trek FB evenwijdig met AH. Indien dan door B en D de lijn BDC getrokken wordt, zal BAC de gevraagde driehoek zijn.

Daar namelijk de hoeken BAD en DAC benevens de lijn AD reeds gelijk de gegevene grootheden zijn, moeten wij alleen aanwijzen, dat BD : DC $= p : q$ is. Nu hebben wij, uit hoofde van de evenwijdigheid der lijnen BF en AH, de evenredigheid BD : DC = FD : DE, maar volgens de constructie is FD : DE $= p : q$ en dus is ook BD : DE $= p : q$, zoodat de driehoek BAC aan al de voorwaarden van het vraagstuk voldoet.

ANDERE CONSTRUCTIE *door* L. J. ULMAN.

Neem op eene willekeurige lijn AC, *Fig.* 4, de stukken AB en BC zoodanig, dat AB : BC $= p : q$ is. Beschrijf op AB een cirkelsegment, dat den gegeven hoek α en op BC een cirkelsegment, dat den gegevenen hoek β bevat. Indien dan het snijpunt E dezer cirkelbogen met A, B en C vereenigd wordt, dan is aan al de voorwaarden van het vraagstuk voldaan, behalve aan die, dat de lijn EB niet gelijk de gegevene lijn a is; makende dus EF gelijk a, en trekkende door F de lijn GH evenwijdig met AC, dan zal GEH de gevraagde driehoek zijn; want om dat nu EF $= a$ en GF : FH $=$ AB : BC $= p : q$ is, zoo voldoet deze driehoek aan al de opgegevene voorwaarden.

V. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

De naam van eene zekere stad wordt geschreven met 9 letters, doch gewoonlijk noemt men dezelve verkort met 4 letters; wanneer men nu a, b, c, enz. tot z, door 1, 2, 3, enz. tot 26 voorstelt, dan zullen de eerste en vierde letters van den eigenlijken naam dier stad gelijk zijn, en zoo ook de derde en vijfde; verder is alsdan de som van de eerste en vierde gelijk de achtste, en de som van de tweede en zesde gelijk de negende; voorts is de tweede gelijk het product van de zesde en zevende, of ook gelijk het product van de eerste en zesde verminderd met de zesde. Vervolgens is de eerste letter een quadraat en de zesde een vijfhoekig getal, hebbende gelijke wortels. De eerste, tweede, derde en negende letter van den geheelen naam maken den verkorten naam uit, en wanneer men in den geheelen en in den verkorten naam de som der letters neemt, dan hebben deze twee sommen de som van de eerste en tweede letter tot gemeenen deeler; terwijl de quotienten achtervolgens gelijk zijn aan de zesde en de zevende letter. Welke stad is dit?

OPGELOST *door* B. LUBBERS, C. F. JULIUS, J. KÖHLER, L. J. ULMAN, F. J. STAMKART, W. TOP WZ., A. VAN DER SWAN, J. BASSAN en A. B. DE BOCK, JUN.

OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

Stel de eerste letter, daar dezelve een quadraat moet zijn, voor door

eerste letter . . . x^2,

dan hebben wij, daar de vierde gelijk de eerste moet zijn,

vierde letter . . . x^2,

en, omdat de achtste gelijk moet zijn aan de som van de eerste en vierde,

achtste letter . . . $2x^2$.

De zesde een vijfhoekig getal zijnde, dat met het eerste denzelfden wortel heeft, zoo is dezelve

zesde letter . . . $\frac{1}{2}(3x^2-x)$,

en, daar de tweede gelijk is aan het product van de eerste en zesde, verminderd met de zesde,

tweede letter . . . $\frac{1}{2}(3x^4-x^3-3x^2+x)$.

Verder is de negende gelijk de som van de tweede en zesde, en bij gevolg

negende letter . . . $\frac{1}{2}(3x^4 - x^3)$.

Daar verder de tweede gelijk is aan het product van de zesde en zevende, zoo is de zevende gelijk het quotient van de tweede door de zesde, en dit geeft

zevende letter . . . $x^2 - 1$.

Vervolgens is de derde letter gelijk de vijfde; indien wij dus ftellen

derde letter . . . y,

dan zullen wij, bij gevolg, ook hebben

vijfde letter . . . y.

Tellen wij al deze uitdrukkingen bij elkander, dan verkrijgen wij voor derzelver fom

fom van den geheelen naam . $3x^4 - x^3 + 5x^2 - 1 + 2y$;

en nemen wij de fom van de eerfte, tweede, derde en negende letter, dan verkrijgen wij

fom van den verkorten naam . $\frac{x}{2}(6x^4 - 2x^3 - x^2 + x + 2y)$.

Eindelijk is de fom van de eerfte en tweede letter

$$\frac{x}{2}(3x^4 - x^3 - x^2 + x)$$

en daar deze fom, in de tweede voorgaande fommen gedeeld, de zesde en zevende letter moet voortbrengen, zoo verkrijgen wij de twee volgende vergelijkingen

$$\frac{6x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 2 + 4y}{3x^4 - x^3 - x^2 + x} = \frac{3x^2 - x}{2} \quad . . . (1)$$

en

$$\frac{6x^4 - 2x^3 - x^2 + x + 2y}{3x^4 - x^3 - x^2 + x} = x^2 - 1, \quad . . . (2)$$

Uit elke dezer vergelijkingen de waarde van y afzonderende, verkrijgen wij

$$y = \frac{x}{8}(9x^6 - 6x^5 - 14x^4 + 8x^3 - 31x^2 + 4)$$

en

$$y = \frac{x}{2}(3x^6 - x^5 - 10x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 2x),$$

welke waarde van y aan elkander gelijk gefteld, na herleiding geven

$$3x^6 + 2x^5 - 26x^4 + 8x^3 + 29x^2 - 8x - 4 = 0.$$

Wij vinden 2 en 1 voor de eenigfte geheele getallen, welke wortels van deze vergelijkingen zijn, en daar uit den aard der zaak x niet alleen een geheel, maar ook een pofitief getal moet zijn, zoo moeten wij voor derzelver waarde nemen $x = 2$, waaruit $y = 18$; ftellen wij deze waarden in de formulen, waardoor

wij

wij de letters van den naam hebben uitgedrukt, dan vinden wij

1e. *letter* 4 of D	4e. *letter* 4 of D	7e. *letter* 3 of C
2e. *letter* 15 of O	5e. *letter* 18 of R	8e. *letter* 8 of H
3e. *letter* 18 of R	6e. *letter* 5 of E	9e. *letter* 20 of T

zoodat de gevraagde naam is DORDRECHT.

Aanmerking. Indien men in aanmerking neemt, dat x een geheel positief getal moet zijn, dan kan men de oplossing van de zesde magtsvergelijking, waartoe wij zoo even geraakt zijn, op de volgende wijze ontwijken: nemen wij het dubbel van (2) en trekken wij van hetzelve (1) af, dan blijft er

$$\frac{6x^4-2x^3-12x^2+2x+2}{3x^4-x^3-x^2+x}=\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{2}x-2,$$

deelen wij nu den teller door den noemer, dan verkrijgen wij 2 tot quotient, en er blijft eene rest $-10x^2+2$; doch x een geheel positief getal zijnde, zou deze rest negatief worden, waaruit volgt, dat de noemer geen tweemaal op den teller begrepen kan wezen; daar nu ondertusschen de deeling op moet gaan, zoo blijkt hieruit, dat het quotient niets anders kan zijn dan 1, en daar dit quotient ook wordt uitgedrukt door $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-2$, zoo hebben wij $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-2=1$ of $x^2+x=6$, waarvan de positieve wortel is $x=2$: wij hebben dus $x=2$, waardoor $y=18$ zoo als boven.

VI. VOORSTEL.

Door B. Lubbers.

Men vraagt een driehoekig, een vierhoekig en een vijfhoekig getal te vinden, van denzelfden wortel, zoodanig, dat het product van het eerste en tweede een vijfhoekig getal worde, waarvan de wortel gelijk is aan het eerste der gevraagde getallen?

Opgelost door J. Bassan, F. J. Stamkart, B. Lubbers, J. Kohler, C. F. Julius, A. B. de Bock, Jun. L. J. Ulman en A. van der Swan.

Oplossing van J. Bassan.

Stel den wortel van de drie gevraagde getallen x, dan zijn dezelve $\frac{1}{2}(x^2+x)$, x^2 en $\frac{1}{2}(3x^2-x)$, en wij hebben alzoo de vergelijking

$$\tfrac{1}{2}x^2(x^2+x)=\tfrac{1}{8}\left(3(x^2+x)^2-2(x^2+x)\right)$$

of $$4x^2(x^2+x)-3(x^2+x)^2+2(x^2+x)=0,$$

dat is $(x^2+x)(4x^2-3(x^2+x)+2)=0$,
dus $(x^2+x)(x^2-3x+2)=0$,
of $x(x+1)(x-1)(x-2)=0$,
de vier wortels van deze vergelijking zijn klaarblijkelijk $x=0$, $x=-1$, $x=+1$ en $x=+2$, welke alzoo tot 4 verschillende antwoorden op het vraagstuk aanleiding geven.

1°. Nemen wij namelijk $x=0$, dan worden de getallen 0, 0 en 0.

2°. Nemen wij $x=-1$, dan worden de getallen 0, 1 en +2.

3°. Nemen wij $x=+1$, dan worden de getallen 1, 1 en 1.

4°. Nemen wij eindelijk $x=2$, dan zijn de getallen 3, 4 en 5, en het is gemakkelijk zich te overtuigen, dat elk dezer antwoorden aan de voorwaarden van het vraagstuk voldoet.

VII. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Drie kooplieden handelen te zamen. Het kapitaal van den eersten is een vierkant, dat van den tweeden een twaalfhoekig en dat van den derden een cubiek getal. Het aantal maanden, dat elks kapitaal uitstaat, vormt eene meetkunstige reeks, waarvan de eerste en derde termen vierkanten zijn, terwijl de tweede een driehoekig getal en ook een pronik is. Beschouwt men dezen tweeden term als een driehoekig getal, dan is deszelfs wortel gelijk aan den vierkantswortel uit den eersten term; doch beschouwt men denzelven als een pronik, dan is deszelfs pronikwortel gelijk aan den vierkantswortel uit den derden term. De winsten, welke de kooplieden van hunne kapitalen trekken, maken almede eene meetkunstige reeks uit. De eerste term van deze reeks is eene vierde magt, de tweede een negentienhoekig getal en de derde een quadraat, wiens wortel een trigonaal is; nemende den vierden magtswortel uit den eersten term, den negentienhoekswortel uit den tweeden term en den trigonaalwortel des quadraatwortels uit den derden, dan verkrijgt men gelijke, positieve en geheele getallen. Hoe groot is nu elks kapitaal en winst, en hoe lang heeft ieder kapitaal uitgestaan?

OPGELOST *door* B. LUBBERS, F. J. STAMKART, J. BASSAN, L. J. ULMAN, A. B. DE BOCK, JUN. A. VAN DER SWAN, W. TOP Wz. en C. F. JULIUS.

Op-

OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

Stellen wij het gevraagde aantal maanden achtervolgens

$$v^2,\quad \tfrac{1}{2}(v^2+v) \quad \text{en} \quad \tfrac{1}{4}(v+1)^2,$$

dan maken dezelve eene meetkunstige reeks, omdat elk gelijk is aan de voorgaande, vermenigvuldigd met $\frac{1}{2}(v+1)$ en gedeeld door v. De eerste en derde zijn bovendien vierkanten, en de tweede is een driehoekig getal, waarvan de wortel gelijk is aan den vierkantswortel uit den eersten; al hetwelk met de voorwaarde van de vraag overeenkomstig is. Daar nu de pronikwortel uit den tweeden gelijk den vierkantswortel uit den derden moet zijn, zoo is de tweede de pronik van $\frac{1}{2}(v+1)$, en bij gevolg is

$$\tfrac{1}{2}(v^2+v) = \tfrac{1}{4}(v+1)^2 + \tfrac{1}{2}(v+1),$$

of wanneer wij door $v+1$ deelen en met 4 vermenigvuldigen,

$$2v = (v+1)+2, \text{ zoodat } v=3,$$

waaruit dan volgt, dat het gevraagde aantal maanden voor den eersten is $v^2=9$, voor den tweeden $\frac{1}{2}(v^2+v)=6$, en voor den derden $\frac{1}{4}(v+1)^2=4$.

Stellen wij verder voor de achtervolgende winsten der kooplieden

$$x^4,\quad \frac{17x^2-15x}{2} \quad \text{en} \quad \left(\frac{x^2+x}{2}\right)^2,$$

dan is de eerste eene vierde magt, de tweede een negentienhoekig getal en de derde een quadraat, waarvan de wortel een trigonaal is, en wel zoodanig, dat de vierde magtswortel uit de eerste, de negentienhoekswortel uit de tweede, en de trigonaalwortel van den vierkantswortel uit de derde, hetzelfde getal x opleveren; al hetgeen wederom in de opgaaf gevorderd werd. Deze drie uitdrukkingen moeten nu eene meetkunstige reeks uitmaken, en wij hebben dus

$$\tfrac{1}{4}x^4(x^2+x)^2 = \tfrac{1}{4}(17x^2-15x)^2,$$

of alles door x^2 deelende en met 4 vermenigvuldigende,

$$x^4(x+1)^2 = (17x-15)^2,$$

waarvan de vierkantswortel is

$$x^2(x+1) = 17x-15;$$

of

$$x^3+x^2-17x+15=0;$$

waarvan de wortels zijn $x=1$, $x=3$ en $x=-5$.

Daar nu, volgens het vraagstuk, x een geheel positief getal

 moet

moet zijn, vervallen -5 en 1, omdat het eerste neatief is en de eenheid niet als getal kan worden beschouwd. Wij behouden alzoo $x=3$, en dan zijn de winsten 81, 54 en 36.

Deze winsten zijn evenredig met de getallen 9, 6 en 4, die wij voor het aantal maanden gevonden hebben, waaruit volgt, dat de kapitalen aan elkander gelijk moeten zijn, en dit kapitaal zal dus een getal moeten wezen, dat te gelijker tijd een quadraat, een twaalfhoekig getal en een cubus is.

Stellen wij voor hetzelve w^6, dan is er aan de eerste en derde voorwaarde voldaan, en dan moet w nog zoodanig bepaald worden, dat w^6 een twaalfhoekig getal is. Nu heeft elk twaalfhoekig getal de eigenschap, dat hetzelve met 5 vermenigvuldigd en bij de uitkomst 4 geteld, de som een quadraat wordt, en dus zal $5w^6+4$ een quadraat moeten zijn. Stellen wij den wortel van dit quadraat $2+uw^3$, dan is

$$5w^6+4=4+4uw^3+u^2w^6,$$

of

$$5w^6=4uw+u^2w^6,$$

dus

$$5w^3=4u+u^2w^3,$$

waaruit

$$w^3=\frac{4u}{5-u^2}.$$

Daar men nu gemakkelijk inziet, dat aan deze vergelijking voldaan wordt, door $u=2$ te nemen, waardoor $w^3=8$ en $w=2$, zoo is het kapitaal w^6 of 64.

VIII. Voorstel.

Door A. E. Tromp.

Onderstel dat eenig omwentelingsligchaam zoodanig op eene vloeistof van het soortelijk gewigt g drijft, dat de as verticaal staat, en laat bovendien bekend zijn, dat, hetzelve tot eene diepte h ingezonken zijnde, de verplaatste vloeistof alsdan een gewigt P heeft. Indien men nu, door trapsgewijze vermeerdering of vermindering van het gewigt des ligchaams, hetzelve tot andere diepten doet inzinken, zal ook de menigte verplaatste vloeistof hierdoor veranderen, en het gewigt van deze verplaatste vloeistof zal dus kunnen worden aangezien als eene functie van de diepte x, waartoe het ligchaam is ingezonken, zoodanig, dat wij dit gewigt der verplaatste vloeistof zullen kunnen beschouwen als de ordinaat van eene kromme lijn, welke de ingezonkene diepte x tot absis heeft. Nu vraagt

men

men vooreerst, door welke formule in het algemeen het gewigt der verplaatste vloeistof zal worden uitgedrukt; en ten andere, welke de loop der gemelde kromme lijn zal zijn, in de bijzondere gevallen, waarin het ligchaam een bol is, of waarin hetzelve is voortgebragt, door de omwenteling van eene parabool om derzelver as?

Opgelost *door* A. E. Tromp, W. Top Wz., F. J. Stamkart en R. van Wijk Jz.

Oplossing *van* A. E. Tromp.

Zij *FB*, *Fig.* 5, de kromme, welke door derzelver omwenteling om de verticale as BE het ligchaam heeft voortgebragt, en zij $BD = h$, dan weten wij, dat het ligchaam, tot op deze diepte ingedompeld zijnde, de verplaatste menigte vloeistof ABC een gewigt P heeft, zoodanig dat wij hebben

$$P = Inh. ABC \times g\gamma,$$

wanneer namelijk g het soortelijk gewigt van de vloeistof beteekent, en γ het gewigt van eene cubieke eenheid zuiver gedistilleerd water, tot deszelfs grootste digtheid gebragt.

Zinkt nu, door vermindering van het gewigt des ligchaams, hetzelve slechts tot de hoogte $BG = x$ in, en stellen wij het gewigt van de alsdan verplaatste menigte vloeistof HBI gelijk X, dan hebben wij, op dezelfde wijze,

$$X = Inh. HBI \times g\gamma,$$

en uit deze twee vergelijkingen volgt

$$\frac{X}{P} = \frac{Inh.\ HBI}{Inh.\ ABC},$$

of

$$X = \frac{P}{Inh.\ ABC} \times Inh.\ HBI,$$

en daar wij, door de bekende formule voor den inhoud van eenig omwentelingsligchaam, hebben $Inh. HBI = \pi \int y^2 \partial x$, zoo verkrijgen wij

$$X = \frac{P}{Inh.\ ABC} \times \pi \int y^2 \partial x, \quad \ldots \ldots (1)$$

waardoor het eerste gedeelte van het vraagstuk voldaan is; want offchoon in de gevondene formule de hoogte h niet voorkomt, zoo hangt de inhoud ABC echter van deze hoogte af, omdat *Inh.* ABC niets anders is dan de waarde, die $\pi \int y^2 \partial x$ verkrijgt, wanneer $x = h$ genomen wordt.

Is de omwentelende lijn een cirkel, en dus het ligchaam een bol, dan is $y^2 = 2rx - x^2$, en bij gevolg $\pi \int y^2 \partial x = \pi \int (2rx - x^2) \partial x = \pi (rx^2 - \frac{1}{3}x^3) = \frac{\pi}{3} x^2 (3r - x)$, waarbij geene standvastige grootheid moet worden gevoegd, omdat de integraal naar behooren voor $x = 0$ verdwijnt. Nemen wij hierin $x = h$, dan komt er *Inh.* ABC $= \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h)$, en substituerende deze gevondene waarden van $\int y^2 \partial x$ en *Inh.* ABC in de formule (I), dan komt er

$$X = P \times \frac{x^2 (3r - x)}{h^2 (3r - h)},$$

of wanneer wij kortheidshalve $\frac{P}{h^2 (3r - h)} = \frac{1}{a^2}$ stellen,

$$X = \frac{1}{a^2} x^2 (3r - x),$$

hetgeen dan nu de vergelijking is van de kromme lijn, die de diepten x, waartoe het ligchaam is ingezonken tot abscis, en het gewigt van de verplaatste menigte vloeistof tot ordinaat heeft.

De loop van deze kromme lijn is zeer gemakkelijk na te gaan. Stellen wij namelijk, dat Ox en OX, *Fig.* 6, de asfen van de x en X zijn, dan is het klaar, dat X niet gelijk nul kan worden, als voor $x = 0$ en $x = 3r$, nemende dus OA $= 3r$, dan zullen O en A de punten zijn, die de kromme met de as $x'x$ gemeen heeft. Daar verder $x^2 (3r - x) = 0$ twee wortels $x = 0$ heeft, zoo raakt de kromme de as xx' in O. Voorts kan voor elke waarde van x slechts eene waarde van X bestaan, en voor x kan geene waarde genomen worden, die X onbestaanbaar maakt. Nemende x tusschen o en $3r$, dan blijft X altijd positief; neemt men x grooter dan $3r$, dan wordt X negatief, en wel grooter en grooter negatief, naarmate x grooter genomen wordt; neemt men eindelijk x negatief, dan wordt X altijd positief, al hetwelke te zamen genomen ten duidelijkste aantoont, dat de kromme de figuur moet hebben, die in *Fig.* 6 is aangewezen.

Het is uit dezen loop der kromme klaar, dat er tusschen O en A een maximum voor x moet bestaan. Om hetzelve te bepalen hebben wij

∂X

$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{3}{a^2}(2rx - x^2)$, $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{6}{a^2}(r - x)$, $\frac{\partial^3 X}{\partial x^3} = -\frac{6}{a^2}$.

Stellende dus $\frac{\partial X}{\partial x} = 0$, dan komt er $x = 0$ of $x = 2r$, waarvan de eerste $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$ positief en de tweede $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$ negatief makende aantoont, dat bij O een minimum voor X plaats heeft, terwijl OB $= 2r$ nemende, BC het maximum van X zal zijn, voor welk maximum wij vinden BC $= \frac{4r^3}{a^2}$.

Even duidelijk is het, dat er tusschen O en A een buigpunt moet bestaan; stellen wij, om hetzelve te bepalen, $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 0$, dan komt er $x = r$, en daar deze waarde $\frac{\partial^3 X}{\partial x^3}$ niet gelijk 0 maakt, zoo volgt hieruit, dat OD $= r$ nemende, E het gevraagde buigpunt zal zijn.

Is de omwentelende lijn eene parabool, dan is $y^2 = px$, zoodat $\pi \int y^2 \partial x = \pi p \int x \partial x = \frac{\pi}{2} p x^2$, welke geene standvastige grootheid behoeft, als naar behooren voor $x = 0$ verdwijnende. Stellende hierin $x = h$, dan komt er *Inh.* ABC $= \frac{\pi}{2} p h^2$, en substitueerende dit in de vergelijking (I), dan komt er

$$X = P \frac{x^2}{h^2},$$

of, wanneer wij $\frac{P}{h^2} = \frac{1}{a}$ stellen,

$$X = \frac{1}{a} x^2, \text{ dat is } x^2 = aX,$$

hetgeen ten duidelijkste de vergelijking van eene parabool is, die a of $\frac{h^2}{P}$ tot parameter heeft.

IX. VOORSTEL.

Door A. E. TROMP.

Laat ondersteld worden, dat een regte cilinder met willekeurig grondvlak op eene vloeistof drijft, zoodanig, dat de beschrijvende lijnen evenwijdig met den waterspiegel loopen, en bij gevolg het

grond- en bovenvlak loodregt op den waterspiegel staan. Zij bovendien bekend, dat de cilinder, tot de hoogte h ingedompeld zijnde, de verplaatste vloeistof het gewigt P heeft. Indien men dan den cilinder tot andere diepten doet inzinken, zal men het gewigt der verplaatste vloeistof, in elken stand, wederom kunnen beschouwen als de ordinaat van eene kromme lijn, die de hoogte van het ingedompelde deel tot abscis heeft. Men vraagt wederom de algemeene formule voor het gewigt der verplaatste vloeistof en dezelve toe te passen op de gevallen, waarin het grondvlak eene parabool is, waarvan de as eenen verticalen stand heeft, of waarin dit grondvlak een cirkel is?

OPGELOST *door* A. E. TROMP, F. J. STAMKART en W. TOP Wz.

OPLOSSING *van* A. E. TROMP.

Zij ADC, *Fig.* 7, eene doorsnede van den cilinder, loodregt op de beschrijvende lijnen, en dus den vorm van deszelfs grondvlak, en stellen wij, dat al de ordinaten door de verticale as BD midden door gedeeld worden. Is nu de cilinder tot de hoogte DG$=h$ ingezonken, en stellen wij de lengte van den cilinder l; dan is de inhoud van de verplaatste vloeistof *Inh.* EDF$\times l$; wanneer wij dus het soortelijk gewigt van de vloeistof g en het gewigt van eene cubieke eenheid zuiver water gelijk γ stellen, dan zullen wij voor het gewigt van deze verplaatste vloeistof hebben

$$P = g\gamma l \times Inh.\,EDF.$$

Zinkt verder, door vermindering van het gewigt des ligchaams, hetzelve niet verder in dan tot de diepte DH$=x$, dan zullen wij, het gewigt van de nu verplaatste vloeistof X stellende, op dezelfde wijze hebben

$$X = g\gamma l \times Inh.\,IDK,$$

uit welke twee vergelijkingen volgt

$$\frac{X}{P} = \frac{Inh.\,IDK}{Inh.\,EDF},$$

of

$$X = \frac{P}{Inh.\,EDF} \times Inh.\,IDK.$$

Stellende nu HK$=$HI$=y$, dan is de inhoud van het vlak IDK gelijk $2\int y\partial x$, en hierdoor vinden wij in het algemeen voor het gewigt van de verplaatste vloeistof

$$X = \frac{2P}{Inh.\,EDF} \times \int y\partial x, \quad \ldots\ldots \quad (I)$$

in

in welke formule *Inh.* EDF de waarde is, welke $2\int y\,\partial x$ verkrijgt, wanneer $x = h$ genomen wordt.

Is ADC eene parabool, dan is $y^2 = px$, dus $y = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$, en $2\int y\,\partial x = 2p^{\frac{1}{2}}\int x^{\frac{1}{2}}\partial x = \frac{4}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}$, welke geene standvastige grootheid noodig heeft, als van zelve voor $x = 0$ verdwijnende. Stellen wij hierin $x = h$, dan komt er *Inh.* DEF $= \frac{4}{3} p^{\frac{1}{2}} h^{\frac{3}{2}}$, en hierdoor verkrijgen wij alzoo

$$X = P \times \frac{x^{\frac{3}{2}}}{h^{\frac{3}{2}}} \quad \text{of} \quad X^2 = \frac{P^2}{h^3} x^3,$$

of wanneer wij kortheidshalve en om de gelijkslachtigheid te bevorderen $\frac{P^2}{h^3} = \frac{1}{a}$ stellen,

$$X^2 = \frac{1}{a} x^3,$$

hetgeen de vergelijking van eene cubiesche parabool is.

Is het grondvlak daarentegen een cirkel, dan is de vergelijking

$$y = \sqrt{(2rx - x^2)},$$

zoodat $$2\int y\,\partial x = 2\int \partial x \sqrt{(2rx - x^2)},$$

voor welke integraal men vindt

$$2\int y\,\partial x = C - (r - x)\sqrt{(2rx - x^2)} - r^2\,\textit{Boog. Sin.}\frac{r - x}{r}. \text{ (*)}$$

daar nu deze integraal voor $x = 0$ moet verdwijnen, zoo is $C = r^2\,\textit{Boog. Sin.}\,1 = r^2 \times \frac{1}{2}\pi$, en hierdoor verkrijgen wij

$$2\int y\,\partial x = -(r - x)\sqrt{(2rx - x^2)} + r^2\left(90^\circ - \textit{Boog. Sin.}\frac{r - x}{r}\right),$$

of, omdat $90^\circ - \textit{Boog. Sin.}\frac{r - x}{r} = \textit{Boog. Cos.}\frac{r - x}{r} =$

$\textit{Boog. Sin.}\frac{\sqrt{(2rx - x^2)}}{r} = 2\,\textit{Boog. Sin.}\sqrt{\frac{x}{2r}}$ is,

$$2\int y\,\partial x = -(r - x)\sqrt{(2rx - x^2)} + 2r^2\,\textit{Boog. Sin.}\sqrt{\frac{x}{2r}}.$$

Stellende hierin $x = h$, dan komt er

$$\textit{Inh.}\,\text{EDF} = -(r - h)\sqrt{(2rh - h^2)} + 2r^2\,\textit{Boog. Sin.}\sqrt{\frac{h}{2r}},$$

waar-

(*) Zie *Diff. en Int.* Rekening van J. R. SCHMIDT, pag. 281.

waardoor de formule (I) in ons geval overgaat in

$$X = P \times \frac{(r-x)\sqrt{(2rx-x^2)} - 2r^2 \text{ Boog. Sin.} \sqrt{\frac{x}{2r}}}{(r-h)\sqrt{(2rh-h^2)} - 2r^2 \text{ Boog. Sin.} \sqrt{\frac{h}{2r}}},$$

of, de standvastige coeficient

$$\frac{P}{(r-h)\sqrt{(2rh-h^2)} - 2r^2 \text{ Boog. Sin.} \sqrt{\frac{h}{2r}}} = \frac{1}{a}$$

stellende,

$$X = \frac{1}{a}\left\{(r-x)\sqrt{(2rx-x^2)} - 2r^2 \text{ Boog. Sin.} \sqrt{\frac{x}{2r}}\right\},$$

waardoor dan nu voor elke hoogte x het gewigt van de verplaatste vloeistof kan worden berekend.

Wij zullen ons met de constructie van deze kromme lijn niet ophouden, daar derzelver beoordeeling meer lastig dan belangrijk zou zijn.

X. VOORSTEL.

Door A. E. Tromp.

Drie getallen maken eene harmonische evenredigheid uit. Het tweede en derde zijn de zijden van een regthoekig trapezium, welke het eerste getal tot bazis heeft. De inhoud van dit trapezium is gelijk aan eën vierkant, dat het tweede getal tot zijde heeft, of ook gelijk aan eenen regthoek, waarvan de eene zijde gelijk is aan het eerste getal opgeteld met de eenheid, terwijl de andere zijde het verschil is tusschen het derde en tweede getal: welke zijn deze getallen?

Opgelost *door* A. E. Tromp, W. Top Wz., L. J. Ulman, C. F. Julius, J. Bassan, F. J. Stamkart, J. Köhler, A. van der Swan, A. B. de Bock, Jun. en H. Razoux.

Oplossing *van* A. E. Tromp.

Stellen wij de getallen x, y en z, dan is uit den aard der harmonische evenredigheden

$$x : z = y - y : y - z \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

De inhoud van het trapezium, dat y en z tot opstaande zijde en x tot bazis heeft, gelijk zijnde aan $\frac{1}{2}x(y+z)$, zoo hebben wij verder, volgens de voorwaarden van het vraagstuk,

$$\tfrac{1}{2}x(y+z) = y^2, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

en

en $$y^2 = (x+1)(z-y). \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Uit de eerste vergelijking vinden wij terstond

$$xy - xz = xz - zy,$$

waaruit $$y = \frac{2xz}{x+z},$$

en brengende deze waarde in de twee andere vergelijkingen over, dan komt er

$$x\left(\frac{2xz}{x+z} + z\right) = \frac{8x^2z^2}{(x+z)^2}, \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

en $$\frac{4x^2z^2}{(x+z)^2} = (x+1)\left(z - \frac{2xz}{x+z}\right). \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Deelende de eerste vergelijking door xz en de tweede door z, en vermenigvuldigende beide met $(x+z)^2$, dan verkrijgen wij

$$(3x+z)(x+z) = 8xz \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

en $$4x^2z = (x+1)(z^2-x^2) \quad \ldots\ldots \quad (7).$$

Ontwikkelen wij (6), dan zal er komen

$$z^2 - 4xz + 3x^2 = 0,$$

of $$(z-3x)(z-x) = 0,$$

zoodat $$z = 3x \text{ of } z = x.$$

Nemen wij $z = x$, dan gaat (7) hierdoor over in

$$4x^3 = (x+1).0,$$

waaruit $x = 0$ en dus ook $z = 0$, zoodat $y = \frac{2xz}{x+z} = \frac{2x^2}{2x} = x = 0.$

Nemen wij daarentegen $z = 3x$, dan verandert (7) in

$$12x^3 = (x+1).8x^2,$$

of $$3x = 2(x+1),$$

waaruit $$x = 2,$$

en de drie getallen zijn bij gevolg, bij deze onderstelling, $x = 2$, $z = 3x = 6$ en $= \frac{2xz}{x+z} = 3.$

XI. VOORSTEL.

Door B. BEKKING.

Twee reeksen, elk van drie termen, te vinden, de eerste eene rekenkunstige en de tweede eene meetkunstige, zoodanig, dat de som van al de termen dezer twee reeksen 112 *bedraagt. De eerste en tweede termen der meetkunstige reeks zijn ieder in het bijzonder het dub-*

dubbel der eerste en tweede termen van de rekenkunstige reeks, en de derde term der rekenkunstige reeks staat tot den derden term van de meetkunstige in reden als 4 tot 9?

Opgelost *door* J. Bassan, F. J. Stamkart, L. J. Ulman, A. B. de Bock, Jun. C. F. Julius, J. Köhler, B. Bekking en A. van der Swan.

Oplossing *van* J. Bassan.

Stel de rekenkunstige reeks y, $2x+\frac{1}{2}y$ en $4x$, dan is de meetkunstige $2y$, $4x+y$ en $9x$; daar nu in de tweede het product der uiterste termen gelijk moet zijn aan het vierkant van den middelsten term, zoo is

$$18xy=(4x+y)^2,$$

of $$16x^2-10x+y^2=0,$$

dat is $$(y-8x)(y-2x)=0,$$

waaruit $$y=8x \text{ of } y=2x.$$

Nemen wij $y=8x$, dan zijn de reeksen

$$8x,\ 6x,\ 4x \text{ en } 16x,\ 12x \text{ en } 9x,$$

en daar de som van al deze termen 112 moet bedragen, zoo is $55x=112$, waaruit $x=2\frac{2}{55}$ en dus $y=8x=16\frac{16}{55}$, zoodat de reeksen alsdan zijn

$$16\tfrac{16}{55},\ 12\tfrac{12}{55},\ 8\tfrac{8}{55} \text{ en } 32\tfrac{32}{55},\ 24\tfrac{24}{55},\ 18\tfrac{18}{55}.$$

Nemen wij daarentegen $y=2x$, dan zijn de reeksen

$$2x,\ 3x,\ 4x \text{ en } 4x,\ 6x,\ 9x,$$

zoodat wij, de som gelijk 112 stellende, hebben $28x=112$, of $x=4$, en de twee reeksen zijn alsdan

$$8,\ 12,\ 16 \text{ en } 16,\ 24,\ 36.$$

XII. Voorstel.

Door B. Bekking.

Twee getallen 2☐5 *en* △33 *geven tot product* 20☐0△5; *wanneer nu het cijfer* △ *het dubbel is van het cijfer* ☐, *dan vraagt men naar beide de bedekte cijfers en dus naar de voorgestelde getallen?*

Opgelost *door* B. Bekking, J. Köhler, L. J. Ulman, H. Razoux, A. van der Swan, C. F. Julius, A. B. de Bock, Jun. J. Bassan en F. J. Stamkart.

Oplossing *door* B. Bekking.

Stel ☐$=x$, dan is △$=2x$, en wij zullen dus, volgens het vraagstuk, moeten hebben

205+

$$(205 + 10x)(200x + 33) = 200005 + 1020x$$

of, wanneer wij het eerste lid ontwikkelen, en de vergelijking verder herleiden,

$$2000x^2 + 40310x = 193240,$$

dat is $$x^2 + 20\tfrac{31}{200}x = 96\tfrac{31}{50},$$

waaruit wij voor den wortel in geheele getallen, welke de eenigste is, die hier bedoeld wordt, vinden $x = 4$. Wij hebben dus $\square = x = 4$ en $\triangle = 2x = 8$, zoodat de gevraagde getallen zijn 245 en 833, waarvan het product werkelijk is 204085.

XIII. VOORSTEL.

Door B. BEKKING.

Men verlangt het getal 36 in drie zulke deelen te verdeelen, dat het kleinste met de helft van het middelste en een vierde van het grootste gelijk zij aan de helft van het getal, en dat het middelste plus de helft van het kleinste deel gelijk zij aan het grootste.

OPGELOST *door* B. BEKKING, J. KÖHLER, H. RAZOUX, J. BASSAN, C. F. JULIUS, A. VAN DER SWAN, L. J. ULMAN, A. B. DE BOCK, JUN. en F. J. STAMKART.

OPLOSSING *van* B. BEKKING.

Stel het kleinste deel x en het middelste y, dan is het grootste $36 - x - y$, en wij hebben bij gevolg

$$x + \tfrac{1}{2}y + 9 - \tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{4}y = 18,$$

en $$y + \tfrac{1}{2}x = 36 - x - y,$$

of wanneer wij de gebrokens wegmaken, en de gelijksoortige termen vereenigen,

$$3x + y = 36 \quad \text{en} \quad 4y + 3x = 72.$$

Deze vergelijkingen van elkander aftrekkende, blijft er $3y = 36$, waaruit $y = 12$, zoodat $x = \tfrac{1}{3}(36 - y) = 8$, de drie deelen van 36 zijn dus 8, 12 en 16.

XIV. VOORSTEL.

Door J. KÖHLER.

Een kapitaal van a guldens is uitgezet tegen b ten honderd, intrest op intrest. Na verloop van n jaren komt men overeen, dat de bruiker jaarlijks eene bepaalde som van c guldens zal afdoen. In hoe veel jaren zal op deze wijze het kapitaal geheel zijn afgelost?

Opgelost *door* F. J. Stamkart, L. J. Ulman, J. Bassan, J. Köhler, C. F. Julius en A. B. de Bock, Jr.

Oplossing *van* F. J. Stamkart.

Stelt men kortheidshalve $1+\frac{b}{100}=m$, dan is genoegzaam bekend, dat het kapitaal a, na n jaren, tegen zamengestelde intrest overgaat in am^n; doch daar de bruiker na n jaren aanvangt jaarlijks c guldens af te doen, zoo blijft dit kapitaal

na n jaren . . . am^n-c,

over $n+1$ jaren is alzoo kapitaal en intrest $(am^n-c)m$, en daar hiervan wederom c afgaat, blijft er

na $n+1$ jaren $am^{n+1}-cm-c$,

en op deze wijze voortgaande, zullen wij vinden, dat er overblijft

na $n+2$ jaren $am^{n+2}-cm^2-cm-c$,

na $n+3$ jaren $am^{n+3}-cm^3-cm^2-cm-c$,

zoodat er in het algemeen zal blijven

na $n+x$ jaren $am^{n+x}-c(m^x+m^{x-1}+m^{x-2}+enz..+1)$.

en daar deze som na x jaren gelijk o moet zijn, zoo hebben wij

$$am^{n+x}-c(m^x+m^{x-1}+m^{x-2}+enz.+1)=0,$$

of $$am^{n+x}=c(m^x+m^{x-1}+m^{x-2}+enz. . . +1).$$

Het tweede lid eene meetkunstige reeks zijnde, vinden wij, door dezelve de sommeren,

$$am^{n+x}=c\times\frac{m^{x+1}-1}{m-1},$$

of $$a(m-1)m^n\times m^x=cm.m^x-c;$$

dat is $$m^x(cm-a(m-1)m^n)=c,$$

waaruit $$m^x=\frac{c}{m(c-a(m-1)m^{n-1})},$$

of wanneer wij aan beide zijden de logarithmen nemen

$$x\,Log.m=Log.c-Log.m-Log.\{c-a(m-1)m^{n-1}\},$$

zoodat $$x=\frac{Log.c-Log.\{c-a(m-1)m^{n-1}\}}{Log.m}-1,$$

en het gevraagde aantal jaren is bij gevolg

$$n+x=\frac{Log\ c-Log.\{c-a(m-1)m^{n-1}\}}{Log.m}+n-1,$$

waarin, $m=1+\frac{b}{100}=\frac{b+100}{100}$ zijnde, $Log.m=Log.(100+b)-2$

is

is; zijnde het, bij de toepassing op getallen, het best, den term $a(m-1)m^{n-1}$ mede door logarithmen te berekenen.

Zal de vraag mogelijk zijn, dat is, zal het kapitaal op voorschrevene wijze in een bepaald aantal jaren kunnen worden afgelost, dan blijkt uit onze formule, dat c grooter dan $a(m-1)m^{n-1}$ moet wezen; want had dit geen plaats, dan zou $c-a(m-1)m^{n-1}$ negatief, en dus derzelver logarithmus onbestaanbaar worden, en was c gelijk $a(m-1)m^{n-1}$, dan zou deze logarithmus, en dus ook x, oneindig groot worden.

XV. VOORSTEL.

Door S. KLIJNSMA.

Van eenen driehoek is de inhoud benevens twee der zijden bekend, men vraagt de derde zijde te berekenen?

OPGELOST *door* S. KLIJNSMA, F. J. STAMKART, L. J. ULMAN, J. BASSAN, A. B. DE BOCK, JUN. J. KÖHLER en H. RAZOUX.

OPLOSSING *van* S. KLIJNSMA.

Stellen wij, *Fig.* 8, den inhoud I, de twee gegevene zijden a en b, en den hoek, welken dezelve bevatten ϕ, dan is, door de bekende formule voor den inhoud van eenen driehoek, $I=\frac{1}{2}ab\times Sin.\phi$, zoodat $Sin.\phi=\frac{2I}{ab}$ en $Sin^2.\phi=\frac{4I^2}{a^2b^2}$, waaruit $Cos.\phi=$

$$\surd(1-Sin^2.\phi)=\pm\surd\left(1-\frac{4I^2}{a^2b^2}\right)=\frac{\surd(a^2b^2-4I^2)}{ab}.$$

Stellende nu de derde zijde van den driehoek x, dan is genoegzaam bekend, dat men heeft

$$x=\surd(a^2+b^2-2ab\,Cos.\phi),$$

en substitüerende hierin de gevondene waarde van $Cos.\phi$, dan komt er

$$x=\surd\{a^2+b^2\pm2\surd(a^2b^2-4I^2)\}.$$

AANMERKINGEN. I°. Uit deze oplossing blijkt, dat er twee verschillende driehoeken bestaan, die aan het gevraagde voldoen. Zulks is ook klaar uit *Fig.* 8; want is ABC een dezer driehoeken, en trekken wij AD en CD evenwijdig met BC en BA, dan zal ABD de andere driehoek zijn, daar deze driehoeken klaarblijkelijk gelijken inhoud en bovendien beide a en b tot zijden hebben. De hoeken ϕ en ϕ' zijn in deze driehoeken elkanders supplement, en de derde zijden x en x' zijn de diagonalen van

een zelfde parallelogram, al hetgeen ook uit onze gevondene formulen is op te maken.

II°. Zal het vraagstuk mogelijk zijn, dan moet $a^2 b^2$ niet kleiner dan $4 I^2$ wezen, daar anders $\sqrt{(a^2 b^2 - 4 I^2)}$ onbestaanbaar zou worden. Meer wordt er ondertusschen niet tot de mogelijkheid gevorderd; want daar $a^2 + b^2 - 2ab$, als een volkomen quadraat zijnde, altijd positief, en bovendien $2\sqrt{(a^2 b^2 - 4 I^2)}$ kleiner dan $2ab$ is, zoo is $a^2 + b^2 - 2\sqrt{(a^2 b^2 - 4 I^2)}$ altijd positief, en $\sqrt{(a^2 + b^2 - 2\sqrt{(a^2 b^2 - 4 I^2)})}$ zal dus nooit onbestaanbaar kunnen zijn, wanneer slechts $\sqrt{(a^2 b^2 - 4 I^2)}$ bestaanbaar is.

III°. Daar dan $4 I^2$ niet grooter dan $a^2 b^2$ en dus I niet grooter dan $\frac{1}{2} ab$ kan zijn, zoo volgt hieruit nog, dat de grootste driehoek, welke onder twee gegevene zijden a en b geconstrueerd kan worden, diegene is, waarvan de inhoud I gelijk $\frac{1}{2} ab$ is, dat is diegene, waarin de gegevene zijden eenen regten hoek bevatten.

IV°. Men had de waarde van x ook op de volgende wijze kunnen vinden. Stellen wij de onbekende zijde x, dan hebben wij voor den inhoud de formule

$$I = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+x)(a+b-x)(x+b-a)(x+a-b)},$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{\{(a+b)^2 - x^2\} \times \{x^2 - (a-b)^2\}},$$

of quadraterende en met 16 vermenigvuldigende

$$16 I^2 = \{(a+b)^2 - x^2\} \times \{x^2 - (a-b)^2\},$$

hetwelk ontwikkeld zijnde, geeft

$$x^4 - 2(a^2+b^2)x^2 + 16 I^2 + (a^2 - b^2)^2 = 0.$$

Dit als eene vierkantsvergelijking oplossende, komt er

$$x^2 = a^2 + b^2 \pm \sqrt{(4a^2 b^2 - 16 I^2)},$$

waaruit $$x = \pm\sqrt{\{a^2 + b^2 \pm 2\sqrt{(a^2 b^2 - 4 I^2)}\}},$$

even zoo als wij boven gevonden hebben.

XVI. VOORSTEL.

Door S. KLIJNSMA.

Van eenen driehoek eene der zijden, benevens de twee aanliggende hoeken gegeven zijnde, begeert men den straal van den in- en omgeschrevenen cirkel in deze gegevens uit te drukken?

OPGELOST *door* S. KLIJNSMA, F. J. STAMKART, J. BASSAN, L. J. ULMAN, J. KÖHLER en A. B. DE BOCK, JR.

Op-

OPLOSSING *van* S. KLIJNSMA.

Stellen wij de zijden van den driehoek a, b en c, en de overstaande hoeken A, B en C, dan moeten wij, de stralen der in- en omgeschreven cirkels r en R stellende, r en R uitdrukken in a, B en C.

Hiertoe nemen wij als bekend aan, dat men heeft

$$r=\frac{2\,I}{a+b+c} \quad \text{en} \quad R=\frac{abc}{4\,I},$$

verder is, $\frac{a}{Sin.\,A}=\frac{b}{Sin.\,B}=\frac{c}{Sin.\,C}$ zijnde,

$$b=a\frac{Sin.\,B}{Sin.\,A}=a\frac{Sin.\,B}{Sin.\,(B+C)} \text{ en } c=a\frac{Sin.\,C}{Sin.\,A}=a\frac{Sin.\,C}{Sin.\,(B+C)},$$

zoodat $$a+b+c=a.\frac{Sin.\,B+Sin.\,C+Sin.\,(B+C)}{Sin.\,(B+C)},$$

en $$abc=a^3\frac{Sin.\,B\,Sin.\,C}{Sin^2.\,(B+C)};$$

daar eindelijk $I=\frac{1}{2}a^2\frac{Sin.\,B\,Sin.\,C}{Sin.\,(B+C)}$ is, zoo vinden wij, deze waarden in die van r en R substitueerende,

$$r=a.\frac{Sin.\,B\,Sin.\,C}{Sin.\,B+Sin.\,C+Sin.\,(B+C)},$$

en $$R=\frac{a}{2\,Sin.\,(B+C)}.$$

Men kan aan de uitdrukking voor r eene meer eenvoudige gedaante geven; want ontwikkelen wij den noemer, dan wordt dezelve

$$Sin.\,B+Sin.\,C+Sin.\,B\,Cos.\,C+Cos.\,B\,Sin.\,C,$$

of $$Sin.\,B\,(1+Cos.\,C)+Sin.\,C\,(1+Cos.\,B),$$

dat is $$2\,Sin.\tfrac{1}{2}B\,Cos.\tfrac{1}{2}B\,.\,2\,Cos^2\tfrac{1}{2}C+2\,Sin.\tfrac{1}{2}C\,Cos.\tfrac{1}{2}C\,.\,2\,Cos^2.\tfrac{1}{2}B,$$

of $$4\,Cos.\tfrac{1}{2}B\,Cos.\tfrac{1}{2}C\,(Sin.\tfrac{1}{2}B\,Cos.\tfrac{1}{2}C+Cos.\tfrac{1}{2}B\,Sin.\tfrac{1}{2}C),$$

dat is $$4\,Cos.\tfrac{1}{2}B\,Cos.\tfrac{1}{2}C\,Sin.\tfrac{1}{2}(B+C),$$

en daar de teller van r gelijk is aan

$$4\,Sin.\tfrac{1}{2}B\,Cos.\tfrac{1}{2}B\,Sin.\tfrac{1}{2}C\,Cos.\tfrac{1}{2}C,$$

zoo verkrijgen wij, deze uitdrukkingen door elkander deelende,

$$r=a.\frac{Sin.\tfrac{1}{2}B\,Sin.\tfrac{1}{2}C}{Sin.\tfrac{1}{2}(B+C)},$$

of onder en boven door $Sin. \frac{1}{2} B \, Sin. \frac{1}{2} C$ deelende,

$$r = \frac{a}{Cot. \frac{1}{2} B + Cot. \frac{1}{2} C}.$$

XVII. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

De som der hoogte en grondlijn van een hellend vlak is 19 voeten; de kracht, welke, horizontaal aangebragt, den last in evenwigt houdt, bedraagt, met den last te zamen genomen, $63\frac{1}{3}$ ponden. Indien nu het product van het aantal eenheden, begrepen in de hoogte van het vlak en in den last, gelijk 280 is, vraagt men naar de hoogte en grondlijn van het hellend vlak en tevens naar de grootte van den last?

Hierbij wordt als bekend aangenomen, dat, in het opgegeven geval, de kracht tot den last in reden is als de hoogte van het hellend vlak tot deszelfs grondlijn. (1)

OPGELOST door G. BRANDSTEDER, F. J. STAMKART, A. B. DE BOCK, JUN. C. F. JULIUS, L. J. ULMAN, H. RAZOUX, J. BASSAN en J. KÖHLER.

OPLOSSING van G. BRANDSTEDER.

Stellen wij de hoogte x, dan is de grondlijn $19-x$ voeten; stellen wij verder de kracht y, dan is de last $63\frac{1}{3}-y$ ponden, en daar de kracht tot den last in reden is als de hoogte tot de grondlijn, zoo is

$$y : 63\tfrac{1}{3} - y = x : 19 - x,$$

of

$$19y - xy = 63\tfrac{1}{3}x - xy,$$

dat is

$$19y = 63\tfrac{1}{3}x,$$

waaruit

$$y = \tfrac{10}{3}x = 3\tfrac{1}{3}x.$$

Volgens het vraagstuk en onze aangenomene stelling moeten wij eindelijk hebben

$$x(63\tfrac{1}{3} - y) = 280,$$

en schrijvende hierin voor xy derzelver waarde

$$x(63\tfrac{1}{3} - 3\tfrac{1}{3}x) = 280,$$

of

$$10x^2 - 190x + 840 = 0,$$

dat is

$$x^2 - 19x + 84 = 0,$$

waaruit

$$x = + \tfrac{19}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{361}{4} - 84)} = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{5}{2},$$

dat

(1) PRINSEN, *Algebra voor de Scholen*, bl. 132. N°. 49.

dat is $x = 12$ of $x = 7$.

Er zijn alzoo twee antwoorden op het vraagstuk; want nemen wij $x = 12$, dan is de hoogte van het vlak $x = 12$, de grondlijn $19 - x = 7$, de kracht $y = 3\frac{1}{3}x = 40$ en de last $63\frac{1}{3} - y = 23\frac{1}{3}$; maar nemen wij $x = 7$, dan is de hoogte $x = 7$, de grondlijn $19 - x = 12$, de kracht $y = 3\frac{1}{3}x = 23\frac{1}{3}$ en de last $63\frac{1}{3} - y = 40$.

XVIII. VOORSTEL.

Door W. TOP, Wz.

Onder welk eenen hoek snijden de omtrekken van twee cirkels elkander, die r en r' tot stralen hebben, en waarvan de middelpunten op eenen afstand a van elkander verwijderd zijn?

OPGELOST *door* F. J. STAMKART, J. KÖHLER, A. B. DE BOCK, JUN. L. J. ULMAN en W. TOP, Wz.

OPLOSSING *van* F. J. STAMKART.

De hoek, welken de omtrekken der cirkels met elkander maken, is niets anders dan de hoek, gevormd door de raaklijnen van het snijpunt, en daar deze raaklijnen loodregt op de stralen van het snijpunt staan, zoo is derzelver hoek het supplement van den hoek dezer stralen, zoodanig dat wij, den gevraagden hoek ϕ en den hoek der stralen A stellende, zullen hebben $\phi = 180° - A$.

Daar nu A de hoek is, die over de zijde a staat in eenen driehoek, waarvan de zijden zijn a, r en r', zoo hebben wij door de bekende formule

$$Sin.\tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+r-r')(a+r'-r)}{rr'}},$$

en daar $Cos.\tfrac{1}{2}\phi = Cos.(90° - \tfrac{1}{2}A) = Sin.\tfrac{1}{2}A$ is,

$$Cos.\tfrac{1}{2}\phi = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+r-r')(a+r'-r)}{rr'}}.$$

AANMERKING. Hebben de cirkels gelijken straal, dan is $r = r'$ en bij gevolg $Cos.\tfrac{1}{2}\phi = \dfrac{a}{2r}$.

XIX. VOORSTEL.

Door C. F. JULIUS.

Van eene rekenkunstige reeks van vijf termen is de som gelijk de eerste term, vermenigvuldigd met zesmaal het gemeene verschil der termen. De middelste term is verder een pronik, wiens wor-

 tel

tel gelijk is aan het gemeen verschil der termen, min den eersten term. Welke is deze reeks?

OPGELOST *door* F. J. STAMKART, L. J. ULMAN, A. B. DE BOCK, JUN. A. VAN DER SWAN, C. F. JULIUS, J. BASSAN en J. KÖHLER.

OPLOSSING *van* F. J. STAMKART.

Stellen wij de gevraagde reeks voor door

$$x,\ x+y,\ x+2y,\ x+3y \text{ en } x+4y,$$

dan hebben wij de vergelijkingen .

$$5x+10y=x\times 6y, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

en $$x+2y=(y-x)^2+(y-x), \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Zonderen wij uit de eerste vergelijking y af, dan vinden wij

$$y=\frac{5x}{6x-10}=\frac{5x}{2(3x-5)}.$$

De tweede vergelijking ontwikkelende en herleidende, geeft dezelve

$$y^2-2xy+x^2-2x=0,$$

en brengende hierin de gevondene waarde van y over, dan komt er

$$\frac{25x^2}{4(3x-5)^2}-\frac{5x^2}{3x-5}+x^2-\frac{5x}{2(3x-5)}-2x=0,$$

of wanneer wij de gebrokens wegmaken,

$$25x^2-20x^2(3x-5)+4x^2(3x-5)^2-10x(3x-5)-8x(3x-5)^2=0$$

dat is $25x^2-10x(2x+1)(3x-5)+4x(x-2)(3x-5)^2=0$,

hetgeen, ontwikkeld en naar de magten van x gerangschikt zijnde, geeft

$$36x^4-252x^3+435x^2-150x=0,$$

of alles door 3 deelende,

$$12x^4-84x^3+145x^2-50x=0.$$

Deze vergelijking heeft vooreerst tot wortel $x=0$, en de overige zijn alzoo begrepen in de vergelijking

$$12x^3-84x^2+145x-50=0.$$

Passende hierop de leerwijze voor het vinden der meetbare wortels toe, dan vinden wij, dat $x=2$ een wortel is. Deelende alzoo door $x-2$, dan komt er

$$12x^2-60x+25=0,$$

en

en losfende deze vierkantsvergelijking op, dan vinden wij voor de twee overige wortels

$$x=\tfrac{5}{6}(3\pm\sqrt{6}).$$

De vier waarden van x zijn dus

$$x=0,\ x=2,\ x=\tfrac{5}{6}(3+\sqrt{6}),\ x=\tfrac{5}{6}(3-\sqrt{6}),$$

en hieruit volgt voor de vier overeenkomstige waarden van y

$$y=0,\ y=5,\ y=\tfrac{1}{6}(3+2\sqrt{6}),\ y=\tfrac{1}{6}(3-2\sqrt{6}).$$

Er zijn dus vier rekenkunstige reeksen, die aan de vraag voldoen, te weten:

0,	0,	0,	0,	0,
2,	7,	12,	17,	22,
$\tfrac{5}{6}(3+\sqrt{6})$,	$\tfrac{1}{6}(18+7\sqrt{6})$,	$\tfrac{1}{2}(7+3\sqrt{6})$,	$\tfrac{1}{6}(24+11\sqrt{6})$,	$\tfrac{1}{6}(27+13\sqrt{6})$.
$\tfrac{5}{6}(3-\sqrt{6})$,	$\tfrac{1}{6}(18-7\sqrt{6})$,	$\tfrac{1}{2}(7-3\sqrt{6})$,	$\tfrac{1}{6}(24-11\sqrt{6})$,	$\tfrac{1}{6}(27-13\sqrt{6})$.

XX. VOORSTEL.

Door C. F. JULIUS.

De som eener rekenkunstige reeks van vier termen is gelijk het product van den eersten term met het drievoud van het gemeen verschil der termen. Het dubbel van den laatsten term is een pronik, wiens wortel gelijk is aan de helft van de som der beide eerste termen. Welke is deze reeks?

OPGELOST *door* J. KÖHLER, F. J. STAMKART, A. B. DE BOCK, JUN. J. BASSAN. L. J. ULMAN, C. F. JULIUS en A. VAN DER SWAN.

OPLOSSING *van* J. KÖHLER.

Laat de rekenkunstige reeks worden voorgesteld door

$$x,\ x+y,\ x+2y,\ x+3y \text{ en } x+4y,$$

dan heeft men, naar aanleiding van het voorstel,

$$3xy=4x+6y,$$

en
$$2x+6y=\tfrac{1}{4}(2x+y)^2+\tfrac{1}{2}(2x+y),$$

of, wat hetzelfde is,

$$x(3y-4)=6y,$$

en
$$(2x+y)^2=4x+22y.$$

Uit de eerste dezer twee vergelijkingen is

$$x=\frac{6y}{3y-4},$$

en brengende dit in de tweede over, dan komt er

$$\left(\frac{12y}{3y-4}+y\right)^2=\frac{24y}{3y-4}+22y,$$

of $$(3y^2+8y)^2=24y(3y-4)+22y(3y-4)^2,$$

dat is, ontwikkelende en herleidende,

$$9y^4-150y^3+520y^2-256y=0.$$

Stellen wij $y=\frac{1}{3}u$, dan gaat deze vergelijking over in

$$u^4-50u^3+520u^2-768u=0;$$

en, wanneer wij hierin $u=2v$ stellen, in

$$v^4-25v^3+130v^2-96v=0.$$

Deze vergelijking heeft een' wortel $v=0$, en de overige zijn begrepen in

$$v^3-25v^2+130v-96=0.$$

Hieruit vinden wij verder $v=6$, deelende alzoo door $v-6$, dan komt er

$$v^2-19v+16=0,$$

waaruit $$v=\tfrac{1}{2}(19\pm3\sqrt{33}).$$

Wij hebben alzoo voor v deze vier waarden

$$v=0,\ v=6,\ v=\tfrac{1}{2}(19+3\sqrt{33}),\ v=\tfrac{1}{2}(19-3\sqrt{33}),$$

en daar $y=\frac{1}{3}u=\frac{2}{3}v$ is, zoo zijn de vier waarden van y

$$y=0,\ y=4,\ y=\tfrac{1}{3}(19+3\sqrt{33}),\ y=\tfrac{1}{3}(19-3\sqrt{33}).$$

Waaruit dan voor de overeenkomstige waarden van x volgt

$$x=0,\ x=3,\ x=\tfrac{1}{3}(1+\sqrt{33}),\ x=\tfrac{1}{3}(1-\sqrt{33}).$$

Er zijn dus vier rekenkunstige reeksen, die aan de vraag voldoen, te weten:

1°. 0,	0,	0,	0.
2°. 3,	7,	11,	15.
3°. $\frac{1}{3}(1+\sqrt{33})$,	$\frac{1}{3}(20+4\sqrt{33})$,	$\frac{1}{3}(39+7\sqrt{33})$,	$\frac{1}{3}(58+10\sqrt{33})$.
4°. $\frac{1}{3}(1-\sqrt{33})$,	$\frac{1}{3}(20-4\sqrt{33})$,	$\frac{1}{3}(39-7\sqrt{33})$,	$\frac{1}{3}(58-10\sqrt{33})$.

XXI. VOORSTEL.

Door S. KLIJNSMA.

Vijf punten, A, B, C, D *en* E, *Fig.* 9, *liggen in den omtrek van eenen cirkel; wanneer men nu drie dezer punten* D, C *en* E *door regte lijnen tot eenen driehoek, en de twee overige door eene koorde* AB *vereenigt, en men eindelijk uit* D *eene lijn* DF *zoodanig trekt, dat zij met de overstaande zijde* CE *eenen hoek maakt gelijk den hoek, gelegen in het segment, dat door de koorde* AB *bepaald wordt, dan*

dan zal de volgende evenredigheid plaats hebben : AB : DE = DC : DF. *Men vraagt deze meetkunstige stelling te bewijzen?*

Opgelost *door* S. Klijnsma, A. B. de Bock, Jun. L. J. Ulman, F. J. Stamkart, en J. Bassan.

Oplossing *van* S. Klijnsma.

Laat DF verlengd worden, tot zij den omtrek van den cirkel in B′ ontmoet, en verder, B′A′ = BA gemaakt hebbende, B′D en B′E getrokken worden, dan zal vooreerst driehoek A′B′H gelijkvormig wezen met driehoek DHE, omdat de overstaande hoeken H gelijk zijn, en bovendien de hoeken HA′B en HDE, op denzelfden boog B′E rustende, even groot zijn. Deze driehoeken geven ons alzoo

A′B′ : DE = B′H : HE . . . . . . (1).

Voorts zijn de driehoeken B′EH en B′EF gelijkvormig; want zij hebben den hoek FB′E gemeen, en verder de hoeken HEB′ en B′FE gelijk, omdat volgens de onderstelling de hoek DFC gelijk genomen is aan den hoek A′EB′, welke op de koorde A′B′, die wij gelijk AB genomen hebben, rust. Deze driehoeken geven dus

B′H : HE = B′E : FE . . . . (2).

Eindelijk zijn ook de driehoeken B′FE en CFD gelijkvormig, want zij hebben den hoek bij F gemeen, en bovendien de hoeken FB′E en FCD, als op denzelfden boog DE staande, gelijk. Hieruit volgt dan

B′E : FE = CD : FD . . . . (3).

Daar nu de laatste reden van elke dezer evenredigheden tevens de eerste reden van de volgende evenredigheid is, zoo hebben wij, omdat verder A′B′ = AB is,

AB : DE = CD : DF,

dat te bewijzen was.

XXII. Voorstel.

Door S. Klijnsma.

Van eenen onregelmatigen vierhoek, waarin twee overstaande hoeken gelijk zijn, de vier zijden gegeven zijnde, vraagt men deszelfs inhoud te berekenen?

Opgelost *door* S. Klijnsma, F. J. Stamkart, J. Jonkheert, J. Bassan en A. B. de Bock, Jun.

OPLOSSING *van* S. KLIJNSMA.

Zij ABCD, *Fig.* 10, de vierhoek, waarin wij de hoeken A en C even groot onderstellen. Stellen wij dan $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ en $DA = d$, dan is

$$BD^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\,Cos.\,C \quad \text{en} \quad BD^2 = a^2 + d^2 - 2\,ad\,Cos.\,A$$

en dus, omdat $Cos.\,A = Cos.\,C$ is,

$$b^2 + c^2 - 2\,bc\,Cos.\,C = a^2 + d^2 - 2\,ad\,Cos.\,C$$

waaruit
$$Cos.\,C = \frac{(a^2 + d^2) - (b^2 + c^2)}{2\,(ad - bc)}$$

waardoor dan de hoek C en dus ook A = C bekend wordt.

De inhouden der driehoeken ADB en CDB worden uitgedrukt door $\frac{1}{2}\,ad\,Sin.\,C$ en $\frac{1}{2}\,bc\,Sin.\,C$, en daar de inhoud van den vierhoek gelijk is aan de som dezer driehoeken, zoo wordt de gevraagde inhoud

$$I = \tfrac{1}{2}\,(ad + bc)\,Sin.\,C.$$

Wil men dezen inhoud in de vier zijden uitdrukken, dan moeten wij, uit de gevondene waarde van *Cos.* C, die van *Sin.* C afleiden. Hiertoe hebben wij

$$Sin^2.\,C = 1 - Cos^2\,C = 1 - \frac{\{(a^2+d^2)-(b^2+c^2)\}^2}{4\,(ad-bc)^2}$$

$$= \frac{4\,(ad-bc)^2 - \{(a^2+d^2)-(b^2+c^2)\}^2}{4\,(ad-bc)^2}$$

$$= \frac{\{2(ad-bc)+(a^2+d^2)-(b^2+c^2)\}\,\{2(ad-bc)-(a^2+d^2)+(b^2+c^2)\}}{4\,(ad-bc)^2}$$

$$= \frac{\{(a+d)^2 - (b+c)^2\}\,\{(b-c)^2 - (a-d)^2\}}{4\,(ad-bc)^2}$$

$$= \frac{(a+b+c+d)\,(a-b-c+d)\,(a+b-c-d)\,(-a+b-c+d)}{4\,(ad-bc)^2}.$$

Hieruit den wortel trekkende, komt er

$$Sin.\,C = \frac{\sqrt{\{a+b+c+d\}\,\{(a+d)-(b+c)\}\,\{(a+b)-(c+d)\}\,\{(b+d)-(a+c)\}}}{2\,(ad-bc)}$$

hetwelk in de formule voor I overgebragt geeft

$$I = \tfrac{1}{4} \times \frac{ad+bc}{ad-bc} \times \ldots\ldots\ldots$$
$$\sqrt{\{a+b+c+d\}\,\{(a+d)-(b+c)\}\,\{(a+b)-(c+d)\}\,\{(b+d)-(a+c)\}}.$$

XXIII.

XXIII. VOORSTEL.

Door S. KLIJNSMA.

Van eenen onregelmatigen vierhoek gegeven zijnde de vier zijden, benevens een der diagonalen, vraagt men de deelen te berekenen, waarin de diagonalen elkander snijden?

OPGELOST *door* S. KLIJNSMA, J. BASSAN, F. J. STAMKART, A. B. DE BOCK, JUN. en J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* S. KLIJNSMA:

Stellen wij, *Fig.* 10, AB $= a$, BC $= b$, CD $= c$, DA $= d$ en de diagonaal AC $= p$, dan is hierdoor de andere diagonaal q bepaald, omdat tusschen deze zes grootheden de volgende vergelijking bestaat (*)

$$\begin{aligned}&(a^4c^2 + a^2c^4 + b^4d^2 + b^2d^4 + p^4q^2 + p^2q^4)\\ &+ (a^2b^2p^2 + c^2d^2p^2 + b^2c^2q^2 + a^2d^2q^2)\\ &- \left\{\begin{array}{l} + a^2c^2b^2 + a^2c^2d^2 + a^2c^2p^2 + a^2c^2q^2 \\ + b^2d^2a^2 + b^2d^2c^2 + b^2d^2p^2 + b^2d^2q^2 \\ + p^2q^2a^2 + p^2q^2b^2 + p^2q^2c^2 + p^2q^2d^2 \end{array}\right\} = 0.\end{aligned}$$

In deze vergelijking klimt q alleen tot den tweeden en vierden graad op; stellen wij dus dezelve op de volgende wijze voor

$$q^4 + Aq^2 = B,$$

waarin nu A en B de volgende waarden hebben

$$A = p^2 - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + \frac{(a^2 - b^2)(d^2 - c^2)}{p^2}$$

en $$B = (a^2 - d^2)(c^2 - b^2) - \frac{(a^2c^2 - b^2d^2)(a^2 + c^2 - b^2 - d^2)}{p^2}$$

dan is $$q = \sqrt{\{-\tfrac{1}{2}A \pm \sqrt{(B + \tfrac{1}{4}A^2)}\}}.$$

Wij zullen alzoo deze twee diagonalen in den verderen loop der oplossing als bekend beschouwen.

Stel het deel DE $= x$ en het deel DE $= y$, dan is AE $= p - x$ en BE $= q - y$ en wij hebben

$$Cos.\ m = \frac{c^2 + q^2 - b^2}{2cq}, \quad Cos.\ n = \frac{d^2 + q^2 - a^2}{2dq},$$

$$Cos.\ r = \frac{c^2 + p^2 - d^2}{2cp}, \quad Cos.\ s = \frac{b^2 + p^2 - a^2}{2bp};$$

maar

(*) Zie J. DE GELDER, *Meetkundige Analysis*, *pag.* 112. alwaar het regelmatige dezer vergelijking tevens op de duidelijkste wijze is aangetoond.

maar wij hebben van den anderen kant ook

$$Cos.\ m = \frac{c^2 + x^2 - y^2}{2cx}, \quad Cos.\ n = \frac{d^2 + x^2 - (p-y)^2}{2dx},$$

$$Cos.\ r = \frac{c^2 + y^2 - x^2}{2cy}, \quad Cos.\ s = \frac{b^2 + y^2 - (q-x)^2}{2by},$$

en de waarde van de cosinusfen der gelijke hoeken geven ons dus deze vier vergelijkingen:

$$\frac{c^2 + x^2 - y^2}{x} = \frac{c^2 + q^2 - b^2}{q},$$

$$\frac{c^2 + y^2 - x^2}{y} = \frac{c^2 + p^2 - d^2}{p},$$

$$\frac{d^2 + x^2 - (p-y)^2}{x} = \frac{d^2 + q^2 - a^2}{q}$$

$$\frac{b^2 + y^2 - (q-x)^2}{y} = \frac{b^2 + p^2 - a^2}{p}.$$

Wij hebben ter bepaling van x en y flechts twee dezer vergelijkingen noodig, daar elke twee van dezelve in de twee andere benevens de betrekking tusfchen de zes gegevens liggen opgefloten. Dat wij alzoo deze vier vergelijkingen hebben ter neder gefteld, is alleen om dezelve zoodanig met elkander te kunnen verbinden, dat de oplosfing er gemakkelijker door afloopt.

Trekken wij de eerfte van de derde, dan komt er

$$\frac{d^2 - c^2 + 2py - p^2}{x} = \frac{d^2 - c^2 + b^2 - a^2}{q},$$

of $(d^2 - c^2 + b^2 - a^2)x - 2pqy = q(d^2 - c^2 - p^2) \ldots (\alpha)$.

Trekken wij daarentegen de tweede van de vierde, dan blijft er

$$\frac{b^2 - c^2 + 2qx - q^2}{y} = \frac{b^2 - c^2 - a^2 + d^2}{p},$$

of $(d^2 - c^2 + b^2 - a^2)y - 2pqx = p(b^2 - c^2 - q^2) \ldots (\beta)$.

De fom en het verfchil der vergelijkingen (α) en (β) nemende, vinden wij

$$(d^2 - c^2 + b^2 - a^2 - 2pq)(x+y) = q(d^2 - c^2 - p^2) + p(b^2 - c^2 - q^2),$$

$$(d^2 - c^2 + b^2 - a^2 + 2pq)(x-y) = q(d^2 - c^2 - p^2) - p(b^2 - c^2 - q^2),$$

en wij hebben bijgevolg

$$x + y = \frac{q(d^2 - c^2 - p^2) + p(b^2 - c^2 - q^2)}{(d^2 - c^2 + b^2 - a^2) - 2pq},$$

en

en $$x - y = \frac{q(d^2-c^2-p^2)-p(b^2-c^2-q^2)}{(d^2-c^2+b^2-a^2)+2pq},$$

waarvan de halve ſom en het halve verſchil is

$$x = \frac{\frac{1}{2}\{q(d^2-c^2-p^2)+p(b^2-c^2-q^2)\}\{(d^2-c^2+b^2-a^2)+2pq\} + \frac{1}{2}\{q(d^2-c^2-p^2)-p(b^2-c^2-q^2)\}\{(d^2-c^2+b^2-a^2)-2pq\}}{(d^2-c^2+b^2-a^2)^2-4p^2q^2},$$

$$y = \frac{\frac{1}{2}\{q(d^2-c^2-p^2)+p(b^2-c^2-q^2)\}\{(d^2-c^2+b^2-a^2)+2pq\} - \frac{1}{2}\{q(d^2-c^2-p^2)-p(b^2-c^2-q^2)\}\{(d^2-c^2+b^2-a^2)-2pq\}}{(d^2-c^2+b^2-a^2)^2-4p^2q^2},$$

welke uitdrukkingen gemakkelijk herleid worden tot de volgende

$$x = q.\frac{(a^2-b^2+c^2-d^2)(p^2+c^2-d^2)-2p^2(q^2+c^2-b^2)}{(a^2-b^2+c^2-d^2)^2-4p^2q^2},$$

$$y = p.\frac{(a^2-b^2+c^2-d^2)(q^2+c^2-b^2)-2q^2(p^2+c^2-d^2)}{(a^2-b^2+c^2-d^2)-4p^2q^2}.$$

De waarde van x en y gevonden hebbende, vinden wij voor de andere deelen, door aftrekking, gemakkelijk

$$q - x = q.\frac{(d^2-c^2+b^2-a^2)(p^2+b^2-a^2)-2p^2(q^2+b^2-c^2)}{(d^2-c^2+b^2-a^2)^2-4p^2q^2},$$

$$p - y = p.\frac{(d^2-c^2+b^2-a^2)(q^2+d^2-a^2)-2q^2(p^2+d^2-c^2)}{(d^2-c^2+b^2-a^2)^2-4p^2q^2},$$

waardoor het vraagſtuk is opgelost.

ANDERE OPLOSSING *door* J. BASSAN.

Indien men de deelen der diagonalen niet in de oorſpronkelijke gegevens wil uitdrukken, maar alleen het ſtelſel van achtervolgende vergelijkingen wil kennen, door welke zij uit de gegevens kunnen worden berekend, dan kan men den volgenden weg inſlaan.

Vooreerst geeft de figuur terſtond

$$Cos.\ m = \frac{c^2+q^2-d^2}{2cq} \quad \text{en} \quad Cos.\ n = \frac{d^2+q^2-a^2}{2dq}$$

en hierdoor worden de hoeken m en n bekend.

Verder is *driehoek* CDA = *driehoek* CDE + *driehoek* EDA of $\frac{1}{2}\ cd\ Sin.\ (m+n) = \frac{1}{2}\ cx\ Sin.\ m + \frac{1}{2}\ dx\ Sin.\ n$ en hieruit wordt gemakkelijk gevonden

$$x = \frac{cd\ Sin.\ (m+n)}{c\ Sin.\ m + d\ Sin.\ n}.$$

Wij

Wij achten dit genoeg om te doen zien, dat y even eens gevonden zal worden, door de vergelijkingen

$$Cos.\ r = \frac{c^2+p^2-d^2}{2cp}, \qquad Cos.\ s = \frac{b^2+p^2-a^2}{2bp},$$

en

$$y = \frac{bc\ Sin.\ (r+s)}{b\ Sin.\ s + c\ Sin.\ r},$$

de overige ſtukken worden eindelijk gevonden, door x en y van q en p af te trekken.

XXIV. VOORSTEL.

Door F. J. STAMKART.

Zeker vat is op de volgende wijze bepaald. De beide bodems zijn ellipſen, en de duigen elliptiſche bogen. Wanneer men de ellipſen der duigen voltooit, hebben alle eene gemeene as, welke door de middelpunten der beide bodems gaat en loodregt op deze beide bodems ſtaat. Dit vat heeft zulk eene ligging, dat gezegde gemeene as horizontaal is, doch dat de groote asſen der beide bodems eenen hoek a met het horizontale vlak maken. Wanneer het vat nu tot op zekere hoogte met water gevuld wordt, dan wordt gevraagd deze hoeveelheid water te berekenen, in de onderſtelling, dat gegeven is de lengte van het vat gelijk $2l$, de ſponningsdiepte gelijk $2b$, de halve groote asſen der bodems gelijk m, derzelver halve kleine asſen gelijk n en de verticale diepte van het water beneden de as van het vat, gelijk h?

OPGELOST door J. P. DELPRAT en F. J. STAMKART.

OPLOSSING van J. P. DELPRAT.

Wanneer men zich drie, elkander in één punt regthoekig doorſnijdende, asſen voorſtelt, die ieder door het gemeene ſnijpunt midden door gedeeld worden, dan kan men zich door twee dezer asſen eene ellips denken, en in deze ellips vele middellijnen trekkende, door elke dezer middellijnen en de overgeblevene derde as wederom ellipſen laten gaan. De meetkunſtige plaats van al deze ellipſen zal dan een oppervlak wezen, overeenkomende met het gebogen oppervlak van het vat, waarvan in het vraagſtuk geſproken wordt.

Om dit te bewijzen, zullen wij de vergelijking van het omſchrevene oppervlak bepalen. Laat AC en BD, *Fig.* 11, de

de twee eerste asfen zijn en ABCD de ellips, die door dezelve bepaald wordt, dan is derzelver vergelijking

$$y'^2 = \frac{b^2}{c^2}(c^2 - x'^2) \ldots\ldots\ldots (1)$$

waarin nu OD $= c$ en OC $= b$, OQ $= x'$ en QN $= y'$ is.

Voor de projectie M van eenig punt des oppervlaks, op het vlak der ellips ABCD, stellen wij OP $= x$, PM $= y$ en ON $= b'$, dan zal de hoogte z van dit punt, boven of beneden het vlak ABCD, worden uitgedrukt door de ordinaat van de ellips, die N'N en de derde as, die loodregt op het vlak ABCD staat, tot asfen heeft, en in welke nu OM de middelpunts abscis is. Stellen wij dan deze derde halve as gelijk d, dan zal de hoogte z gevonden worden door de vergelijking

$$z^2 = \frac{d^2}{b'^2}(b'^2 - OM^2) \ldots\ldots\ldots (2),$$

maar $OM^2 = x^2 + y^2$ en $b'^2 = ON^2 = x'^2 + y'^2$ zijnde, zoo hebben wij, omdat $OM^2 : ON^2 = x^2 : x'^2$ is, $x^2 + y^2 : x'^2 + y'^2 = x^2 : x'^2$ en dus $x'^2 + y'^2 = \frac{x'^2}{x^2}(x^2 + y^2)$, brengende hierin de waarde van y'^2 uit (1) over

$$x'^2 + b^2 - \frac{b^2}{c^2}x'^2 = \frac{x'^2}{x^2}(x^2 + y^2),$$

en losfende hieruit x'^2 op, dan vinden wij gemakkelijk

$$x'^2 = \frac{b^2c^2x^2}{b^2x^2 + c^2y^2},$$

waardoor $b'^2 = x'^2 + y'^2 = \frac{x'^2}{x^2}(x^2 + y^2 = \frac{b^2c^2(x^2+y^2)}{b^2x^2+c^2y^2}$.

Brengende dus deze waarde, benevens die van OM^2 in (2) over, zoo verkrijgen wij

$$z^2 = \frac{d^2}{b'^2}(b'^2 - OM^2) = d^2 - \frac{d^2}{b'^2}OM^2;$$

$$= d^2\left(1 - \frac{OM^2}{b'^2}\right) = d^2\left(1 - \frac{b^2x^2 + c^2y^2}{b^2c^2}\right)$$

waaruit door eene gemakkelijke herleiding gevonden wordt

$$b^2c^2z^2 + b^2d^2x^2 + c^2d^2y^2 = d^2b^2c^2 \ldots (3)$$

hetgeen dan nu de vergelijking van het omschrevene vlak is.

De vergelijking van eenig vlak, loodregt door de as der z gaande, is in het algemeen

$$z = q,$$

en deze met de vergelijking (3) verbindende, komt er voor de vergelijking van de kromme, volgens welke het gebogen oppervlak door een vlak gesneden wordt, dat evenwijdig aan ABCD en van hetzelve op eenen afstand q verwijderd is,

$$d^2c^2y^2 + b^2d^2x^2 = b^2c^2d^2 - b^2c^2q^2,$$

waaruit blijkt, dat deze doorsnede eene ellips is, waarvan de halve asſen gevonden worden, door beurtelings x en y gelijk o te ſtellen; zoodanig dat wij voor deze halve asſen vinden

$$\left.\begin{array}{l} \text{Halve as volgens de rigting OC gelijk } \frac{b}{d}\sqrt{(d^2-q^2)} \\ \text{Halve as volgens de rigting OD gelijk } \frac{c}{d}\sqrt{(d^2-q^2)} \end{array}\right\} \ldots (4)$$

en daar de betrekking tusſchen deze halve asſen $\frac{b}{c}$ is, zoo volgt hieruit, dat de gevondene ellips gelijkvormig is met de ellips ABCD. Snijdt men dus het oppervlak, door de vergelijking (3) voorgeſteld, door vlakken, die loodregt op de as van de z ſtaan, dan zullen al deze doorsneden gelijkvormige ellipſen zijn, waarvan de halve asſen door de uitdrukkingen (4) gevonden worden, zoodra de afſtand q, die het ſnijdende vlak van het middelpunt heeft, gegeven is. Niets is gemakkelijker dan te bewijzen, dat deze merkwaardige eigenſchap ook plaats moet hebben voor vlakken, die loodregt op eene der twee andere asſen ſtaan.

Daar nu het ronde oppervlak des vats, in het vraagſtuk omſchreven, niets anders dan de meetkunſtige plaats is van de ellipſen, gaande door de twee ellipſen der bodems, en hebbende eene gemeenſchappelijke as, terwijl de ellips door het ſpongat gaande eene gegevene kleine as heeft, zoo volgt ten klaarſte uit het hier boven aangetoonde, dat als men het oppervlak der vergelijking (3) door twee vlakken, op gelijken afſtand van het middelpunt, en loodregt op de langſte der asſen, doorſnijdt, het gedeelte, tusſchen de beide ſnijvlakken gelegen, volkomen met het vat zal overeenkomen.

In het vraagſtuk is ſlechts eene der asſen onmiddellijk gegeven,

ten, namelijk de halve spongatsdiepte b; tevens zijn de halve asfen der bodems gelijk m en n gegeven, terwijl de afstanden der bodems van het middelpunt gegeven zijn gelijk l. De uitdrukkingen (4) leeren ons dus, dat wij hier zullen hebben

$$n^2 = \frac{b^2 (d^2 - l^2)}{d^2} \quad \text{en} \quad m^2 = \frac{c^2 (d^2 - l^2)}{d^2},$$

daarenboven hebben wij $n : m = b : c$, waaruit

$$c = \frac{m}{n} b \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

terwijl de vergelijking $n^2 = \frac{b^2}{d^2} (d^2 - l^2) = b^2 - \frac{b^2}{d^2} l^2$

ons geeft

$$d = \frac{lb}{\sqrt{(b^2 - n^2)}} \quad \ldots\ldots (6)$$

daar ons alzoo de vergelijkingen (5) en (6) de halve asfen c en d in de gegevens b, l, m en n doen kennen, zullen wij in den verderen loop der oplosfing de halve asfen b, c en d blijven gebruiken.

Zij nu *Fig.* 12. MRmS eene doorfnede van het vat, loodregt op deszelfs as, en op eenen afstand z van het middelpunt. Zij verder UW eene waterpasse lijn, en tv de hoogte, waarop de vloeistof in deze doorfnede staat, dan zal de stand van het vat ten opzigte van een waterpas vlak bekend zijn, zoodra de hoek MUW $= a$ van eene der asfen met de lijn UW gegeven is, terwijl de asfen van deze ellips volgens (4) zullen worden uitgedrukt door

$$PS = b' = \frac{b}{d} \sqrt{(d^2 - z^2)} \;(7) \;\text{en}\; PM = c' = \frac{c}{d} \sqrt{(d^2 - z^2)} \;(8)$$

Onderstelt men nu eene tweede doorfnede, evenwijdig met deze eerste, en op eenen afstand δz van dezelve verwijderd, dan zal de inhoud van het, met vocht gevulde, gedeelte des vats gevonden worden door de uitdrukking

$$\int \mathit{Inh: segm: tov} \times \delta z,$$

te berekenen, en hiertoe zal het dus noodig zijn, met het vinden van den inhoud des fegments tov aan te vangen.

Trekken wij de middellijn PV en de raaklijn or evenwijdig met UW, en vervolgens de middellijn oPO, dan zullen PV en

oP halve toegevoegde middellijnen van de ellips zijn. Stellen wij dus OP $= b_,$ en PV $= c_,$, dan is de vergelijking op deze toegevoegde middellijnen

$$y_,^2 = \frac{c_,^2}{b_,^2}(b_,^2 - x_,^2),$$

waarin nu $zP = x_,$ en $tz = zv = y_,$ is, terwijl wij alsdan door de eigenschappen der ellips nog zullen hebben

$$b_,^2 + c_,^2 = b'^2 + c'^2 \quad \text{en} \quad b_, c_, Sin. \text{OPV} = b'c',$$

alsmede de vergelijking op de regthoekige asfen

$$y'^2 = \frac{c'^2}{b'^2}(b'^2 - x'^2).$$

Nu is, $c' Sin. a = x'$ zijnde, $c_, Cos. a = y'$, derhalve

$$c_,^2 Cos^2 a = \frac{c'^2}{b'^2}(b'^2 - c_,^2 Sin^2. a),$$

waaruit volgt

$$c_,^2 = \frac{c'^2 b'^2}{c'^2 Sin^2. a + b'^2 Cos^2. a},$$

en, uit hoofde van $b'^2 + c'^2 = b_,^2 + c_,^2$,

$$b'^2 = \frac{(b'^2 + c'^2)(c'^2 Sin^2. a + b'^2 Cos^2. a) - c'^2 b'^2}{c'^2 Sin^2. a + b'^2 Cos^2. a} = \frac{c'^4 Sin^2. a + b'^4 Cos^2. a}{c'^2 Sin^2 a + b'^2 Cos^2. a}.$$

Stelt men nu hoek OPM $= \beta$, dan is OPV $= a + \beta$, en dus

$$Sin. (a + \beta) = \frac{b'c'}{b_, c_,} = \frac{c'^2 Sin^2 a + b'^2 Cos^2. a}{\sqrt{(c'^4 Sin^2. a + b'^4 Cos^2. a)}} \ldots (9)$$

door welke vergelijking de hoek β bekend wordt.

Daar verder $\frac{b'}{c'} = \frac{b}{c}$ is, zoo kan deze vergelijking ook aldus geschreven worden

$$Sin. (a + \beta) = \frac{c^2 Sin^2. a + b^2 Cos^2. a}{\sqrt{\{c^4 Sin^2. a + b^4 Cos^2. a\}}} \ldots\ldots (10).$$

Nu is het bekend, dat de inhoud van segment toy wordt uitgedrukt door $2 Sin. (a + \beta) \int y_, \delta x_,$, of voor $y_,$ derzelver waarde stellende, door

$$\frac{2c_,}{b_,} Sin. (a + \beta) \int \delta x_, \sqrt{(b_,^2 - x_,^2)},$$

en deze formule integrerende hebben wij alzoo

segm.

$$segm. tov = \frac{c_{,}}{b_{,}} Sin.(\alpha+\beta) \left\{ -b_{,}^2 Boog. Cos. \frac{x_{,}}{b_{,}} + x_{,} \surd(b_{,}^2 - x_{,}^2) \right\}.$$

Daar nu volgens de opgaaf Pu = h is, zoo is Pz = $h' = \frac{h}{Sin.(\alpha+\beta)}$. Wij zullen onze integraal alzoo van $x = h'$ tot $x_{,} = b_{,}$ moeten nemen en dit geeft ons

$$segm. tov = \frac{c_{,}}{b_{,}} Sin.(\alpha+\beta) \left\{ b_{,}^2 Boog. Cos. \frac{h'}{b_{,}} - h' \surd(b_{,}^2 - h'^2) \right\}. (11)$$

Nu hebben wij vroeger gevonden

$$b_{,}^2 = \frac{c'^4 . Sin^2. \alpha + b'^4 Cos^2. \alpha}{c'^2 Sin^2. \alpha + b'^2 Cos^2. \alpha},$$

en brengen wij hierin de waarden van b' en c' uit (7) en (8) over, dan komt er

$$b_{,}^2 = \frac{(c^4 Sin^2. \alpha + b^4 Cos^2. \alpha)(d^2 - z^2)}{d^2 (c^2 Sin^2. \alpha + b^2 Cos^2. \alpha)}.$$

Daar verder, door de voorgaande formulen

$$\frac{c_{,}}{b_{,}} = \frac{c' b'}{\surd(c'^4 Sin^2. \alpha + b'^4 Cos^2. \alpha)} = \frac{b c}{\surd(c^4 Sin^2. \alpha + b^4 Cos^2. \alpha)}$$

en bijgevolg eene standvastige grootheid is, zullen wij dezelve in onze formulen gemakshalve door $\frac{c_{,}}{b_{,}}$ blijven voorstellen. Brengen wij, dit opgemerkt hebbende, de waarde $b_{,}^2$ in (11) over, hierbij kortheidshalve

$$\frac{c^4 Sin^2. \alpha + b^4 Cos^2. \alpha}{d^2 (c^2 Sin^2. \alpha + b^2 Cos^2. \alpha)} = k^2 \quad \ldots \quad (12)$$

stellende, dan verkrijgen wij

$$segm. tov = \frac{c_{,}}{b_{,}} Sin.(\alpha+\beta) \left\{ k^2 (d^2 - z^2) Boog. Cos. \frac{h'}{k\surd(d^2 - z^2)} - \ldots \ldots h' \surd\left\{k^2(d^2 - z^2) - h'^2\right\} \right\},$$

en hierdoor zal dan voor den inhoud van het met vocht gevulde deel des vats komen

$$\frac{c_{,}}{b_{,}} Sin.(\alpha+\beta) \int \left\{ k^2 (d^2 - z^2) Boog. Cos. \frac{h'}{k\surd(d^2 - z^2)} - \ldots \ldots h' \surd\left\{k^2(d^2 - z^2) - h'^2\right\} \right\} \partial z$$

of wat hetzelfde is

I =

$$\mathrm{I} = \frac{c_1}{b_1}\, Sin.\,(\alpha+\beta)\left\{k^2 \int \delta z\,(d^2-z^2)\, Boog.\,Cos.\,\frac{h'}{k\sqrt{(d^2-z^2)}} - \right.$$

$$\left. \ldots\ldots h' \int \delta z \sqrt{\left\{k^2(d^2-z^2)-h'^2\right\}}\right\} \ldots\ldots (13)$$

en het zal er dus nog alleen op aankomen, de waarden van

$$\int \delta z\,(d^2-z^2)\, Boog.\,Cos.\,\frac{h'}{k\sqrt{(d^2-z^2)}} \ldots\ldots (\mathrm{I})$$

en $$\int \delta z \sqrt{\left\{k^2(d^2-z^2)-h'^2\right\}} \ldots\ldots (\mathrm{II})$$

te bepalen.

Voor de eerste stellen wij $\frac{h'}{k\sqrt{(d^2-z^2)}} = Cos.\,\phi$, waardoor $Sin.\,\phi = \sqrt{(1-Cos^2.\phi)} = \sqrt{\frac{k^2(d^2-z^2)-h'^2}{k^2(d^2-z^2)}}$, waardoor wij verder vinden $\delta\phi.\,Sin.\,\phi = -\frac{h'z\delta z}{k(d^2-z^2)^{\frac{3}{2}}}$, en hierin de waarde van $Sin.\,\phi$ overbrengende, verkrijgen wij

$$\delta\phi = -\frac{h'z\delta z}{\sqrt{\left\{k^2(d^2-z^2)-h'^2\right\}}} \times \frac{1}{d^2-z^2}.$$

De formule (I) gaat door deze stelling vooreerst over in

$$\int \delta z\,(d^2-z^2)\, Boog.\,Cos.\,\frac{h'}{k\sqrt{(d^2-z^2)}} = \int \delta z\,(d^2-z^2)\,\phi.\,(14)$$

maar, door de algemeen bekende herleidingsformule is

$$\int \delta z\,(d^2-z^2)\,\phi = z\,(d^2-\tfrac{1}{3}z^2)\,\phi - \int z\,(d^2-\tfrac{1}{3}z^2)\,\delta\phi$$

en hierin de boven gevondene waarde van $\delta\phi$ overbrengende, verkrijgen wij

$$\int \delta z(d^2-z^2)\phi = z(d^2-\tfrac{1}{3}z^2)\phi + h'\int \frac{z^2(d^2-\tfrac{1}{3}z^2)\delta z}{(d^2-z^2)\sqrt{\left\{k^2(d^2-z^2)-h'^2\right\}}}$$

of

$$\int \delta z(d^2-z^2)\phi = z(d^2-\tfrac{1}{3}z^2)\phi + h'd^2\int \frac{z^2\delta z}{(d^2-z^2)\sqrt{\left\{k^2(d^2-z^2)-h'^2\right\}}}$$

$$\ldots\ldots -\tfrac{1}{3}h\int \frac{z^4\delta z}{(d^2-z^2)\sqrt{\left\{k^2(d^2-z^2)-h'^2\right\}}} \ldots\ldots (15).$$

Stellen wij hierin $k^2(d^2-z^2)-h'^2$, dat is $(k^2d^2-h^2)-k^2z^2 = \mathrm{Y}$, dan is

$\int \delta z$

$$\int \partial z\,(d^2 - z^2)\,\phi = z\,(d^2 - \tfrac{1}{3}z^2)\,\phi + h'\,d^2 \int \frac{z^2\,\partial z}{(d^2 - z^2)\sqrt{Y}}$$

$$\ldots\ldots - \tfrac{1}{3}h' \int \frac{z^4\,\partial z}{(d^2 - z^2)\sqrt{Y}} \ldots\ldots (16)$$

De eerste dezer integralen kunnen wij aldus herleiden

$$\int \frac{z^2\,\partial z}{(d^2 - z^2)\sqrt{Y}} = \int \left(\frac{d^2}{d^2 - z^2} - 1\right) \frac{\partial z}{\sqrt{Y}} = d^2 \int \frac{\partial z}{(d^2 - z^2)\sqrt{Y}} - \int \frac{\partial z}{\sqrt{Y}} . (17)$$

maar $\frac{1}{d^2 - z^2} = \frac{1}{2d}\left(\frac{1}{d+z} + \frac{1}{d-z}\right)$ zijnde, zoo heeft men

$$\int \frac{\partial z}{(d^2 - z^2)\sqrt{Y}} = \frac{1}{2d} \int \frac{\partial z}{(d+z)\sqrt{Y}} + \frac{1}{2d} \int \frac{\partial z}{(d-z)\sqrt{Y}},$$

waardoor de vergelijking (17) overgaat in

$$\int \frac{z^2\,\partial z}{(d^2 - z^2)\sqrt{Y}} = \tfrac{1}{2}d \int \frac{\partial z}{(d+z)\sqrt{Y}} + \tfrac{1}{2}d \int \frac{\partial z}{(d-z)\sqrt{Y}} - \int \frac{\partial z}{\sqrt{Y}} \ldots (18)$$

Eveneens is

$$\int \frac{z^4\,\partial z}{(d^2 - z^2)\sqrt{Y}} = \int \left(\frac{d^4}{d^2 - z^2} - (z^2 + d^2)\right) \frac{\partial z}{\sqrt{Y}}$$

$$= d^4 \int \frac{\partial z}{(d^2 - z^2)\sqrt{Y}} - d^2 \int \frac{\partial z}{\sqrt{Y}} - \int \frac{z^2\,\partial z}{\sqrt{Y}},$$

of stellende voor $\int \frac{\partial z}{(d^2 - z^2)\sqrt{Y}}$ de zoo even gevondene waarde

$$\int \frac{z^4\,\partial z}{(d^2 - z^2)\sqrt{Y}} = \tfrac{1}{2}d^3 \int \frac{\partial z}{(d+z)\sqrt{Y}} + \tfrac{1}{2}d^3 \int \frac{\partial z}{(d-z)\sqrt{Y}}$$

$$\ldots\ldots - d^2 \int \frac{\partial z}{\sqrt{Y}} - \int \frac{z^2\,\partial z}{\sqrt{Y}} \ldots\ldots (19)$$

brengen wij alzoo (18) en (19) over in (16) dan komt er

$$\int \partial z\,(d^2 - z^2)\,\phi = z\,(d^2 - \tfrac{1}{3}z^2)\,\phi \ldots\ldots$$

$$+ \tfrac{1}{2}d^3 h' \int \frac{\partial z}{(d+z)\sqrt{Y}} + \tfrac{1}{2}d^3 h' \int \frac{\partial z}{(d-z)\sqrt{Y}} - d^2 h' \int \frac{\partial z}{\sqrt{Y}} \ldots\ldots$$

$$- \tfrac{1}{6}d^3 h' \int \frac{\partial z}{(d+z)\sqrt{Y}} - \tfrac{1}{6}d^3 h' \int \frac{\partial z}{(d-z)\sqrt{Y}} + \tfrac{1}{3}d^2 h' \int \frac{\partial z}{\sqrt{Y}} + \tfrac{1}{3}h' \int \frac{z^2\,\partial z}{\sqrt{Y}}$$

of wat hetzelfde is

$$\int \partial z\,(d^2 - z^2)\,\phi = z\,(d^2 - \tfrac{1}{3}z^2)\,\phi + \tfrac{1}{3}d^3 h' \int \frac{\partial z}{(d+z)\sqrt{Y}} + \tfrac{1}{3}d^3 h' \int \frac{\partial z}{(d-z)\sqrt{Y}}$$

$$\ldots\ldots - \tfrac{2}{3}h'\,d^2 \int \frac{\partial z}{\sqrt{Y}} + \tfrac{1}{3}h' \int z^2 \frac{\partial z}{\sqrt{Y}} \ldots\ldots (20).$$

Stellen wij nu voor Y derzelver waarde, dan is

$\int z^2$

$$\int z^2 \frac{\partial z}{\sqrt{Y}} = \int \frac{z^2 \partial z}{\sqrt{\{(k^2 d^2 - h'^2) - k^2 z^2\}}} = \frac{1}{k} \int \frac{z^2 \partial z}{\sqrt{((d^2 - \frac{h'^2}{k^2}) - z^2)}},$$

welke integraal (zie I. R. SCHMIDT., *Dif en Int. rek.* § 204) is:

$$\int z^2 \frac{\partial z}{\sqrt{Y}} = \frac{-1}{2k} z \sqrt{((d^2 - \frac{h'^2}{k^2}) - z^2)} + \frac{1}{2k}(d^2 - \frac{h'^2}{k^2}) \textit{Boog Sin} \frac{z}{\sqrt{(d^2 - \frac{h'^2}{k^2})}}.$$

of wanneer wij kortheidshalve stellen

$$d^2 - \frac{h'^2}{k^2} = r^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

$$\int z^2 \frac{\partial z}{\sqrt{Y}} = -\frac{1}{2k} z \sqrt{(r^2 - z^2)} + \frac{1}{2k} r^2 \textit{ Boog. Sin.} \frac{z}{r} \ldots (22)$$

en wij vinden, bij deze zelfde stelling,

$$\int \frac{\partial z}{\sqrt{Y}} = \frac{1}{k} \int \frac{\partial z}{\sqrt{(r^2 - z^2)}} = \frac{1}{k} \textit{ Boog. Sin.} \frac{z}{r} \ldots (23).$$

Om de integraal $\int \frac{\partial z}{(d+z)\sqrt{Y}}$ te vinden, hebben wij, voor $\sqrt{Y}$ derzelver waarde $k\sqrt{(r^2 - z^2)}$ schrijvende,

$$\int \frac{\partial z}{(d+z)\sqrt{Y}} = \frac{1}{k} \int \frac{\partial z}{(d+z)\sqrt{(r^2 - z^2)}};$$

stellende dus $\sqrt{(r^2 - z^2)} = r \textit{ Sin. } \psi$ dan is $z = r \textit{ Cos. } \psi$ en $\partial z = - r \textit{ Sin. } \psi \partial \psi$, waardoor

$$\int \frac{\partial z}{(d+z)\sqrt{Y}} = -\frac{1}{k} \int \frac{\textit{Sin.} \psi \partial \psi}{(d + r \textit{ Cos.} \psi) \textit{Sin.} \psi} = -\frac{1}{k} \int \frac{-\partial \psi}{d + r \textit{ Cos.} \psi}$$

zoodat wij (I. R. SCHMIDT, *Dif. en Int. rek.* § 254) hebben

$$\int \frac{\partial z}{(d+z)\sqrt{Y}} = -\frac{1}{k} \frac{1}{\sqrt{(d^2 - z^2)}} \textit{ Boog. Cos.} \frac{d \textit{ Cos.} \psi + r}{d + r \textit{ Cos.} \psi},$$

of voor *Cos.* ψ derzelver waarde stellende, en in aanmerking nemende, dat $\sqrt{(d^2 - r^2)} = \frac{h'}{k}$ is,

$$\int \frac{\partial z}{(d+z)\sqrt{Y}} = -\frac{1}{h'} \textit{Boog.Cos.} \frac{dz + r^2}{r(d+z)} = -\frac{1}{h'} \textit{B.T.} \frac{h'}{k} \frac{\sqrt{(r^2 - z^2)}}{r^2 + dz} \ldots (24)$$

waaruit eindelijk, door z negatief te stellen, wordt gevonden

$$\int \frac{\partial z}{(d-z)\sqrt{Y}} = +\frac{1}{h'} \textit{ Boog. Tang.} \frac{h'}{k} \cdot \frac{\sqrt{(r^2 - z^2)}}{r^2 - dz} \ldots (25)$$

brengen wij dan (22), (23), (24) en (25) over in (20), zoo komt er

$\int \partial z$

$$\int \partial z (d^2 - z^2)\phi = z(d^2 - \tfrac{1}{3}z^2)\phi + \tfrac{2}{3}d^3 \left\{ Boog.Tang. \frac{h'}{k} . \frac{\sqrt{(r^2 - z^2)}}{r^2 - dz} \right.$$

$$\left. - Boog.Tang. \frac{h'}{k} . \frac{\sqrt{(r^2 - z^2)}}{r^2 + dz} \right\} + \tfrac{1}{6}\frac{h'}{k} z \sqrt{(r - z)} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots \tfrac{1}{6}\frac{h'}{k}(r^2 - 4d^2)\ Boog\ Sin. \frac{z}{r},$$

òf, wanneer wij de twee eerste bogen, dòor de formule

$$Boog Tang.a - Boog.Tang.b = Boog Tang. \frac{a - b}{1 + ab},$$

tot eenen enkelen boog vereenigen,

$$\int \partial z (d^2 - z^2)\phi = z(d^2 - \tfrac{1}{3}z^2)\phi + \tfrac{2}{3}d^3 B.T. \frac{2\,dh'k\,z\sqrt{(r^2 - z^2)}}{(k^2d^2 - h'^2)d^2 - (k^2d^2 + h'^2)z^2}$$

$$\ldots - \tfrac{1}{6}.\frac{h'}{k} z \sqrt{(r^2 - z^2)} + \tfrac{1}{6}\frac{h'}{k}(r^2 - 4d^2) Boog.Sin. \frac{z}{r} \ldots (26)$$

Hierdoor de waarde van de formule (14), of, dat hetzelfde is, van de integraal (I) gevonden hebbende, blijft er alleen over, de waarde van (II) te vinden, dat is van

$$\int \partial z \sqrt{\{k^2(d^2 - z^2) - h'^2\}} = k \int \partial z \sqrt{(r^2 - z^2)}$$

en deze is (I. R. Schmidt, *Dif. en Int. rek.* § 189)

$$\int \partial z \sqrt{\{k^2(d^2 - z^2) - h'^2\}} = \tfrac{1}{2}k(z\sqrt{(r^2 - z^2)} + r^2 Boog.Sin. \frac{z}{r}). (27)$$

brengende dan deze integraal benevens (26) over in de waarde van I, die wij in (13) vonden, dan verkrijgen wij

$$I = \frac{c_{,}}{b_{,}} Sin.(\alpha + \beta) \left\{ -\tfrac{2}{3}h'kz\sqrt{(r^2 - z^2)} + k^2 z(d^2 - \tfrac{1}{3}z^2) B.Cos. \frac{h'}{k\sqrt{(d^2 - z^2)}} \right.$$

$$\ldots + \tfrac{2}{3}k^2 d^3\ Boog.Tang. \frac{2\,dkh'z\sqrt{(r^2 - z^2)}}{(k^2d^2 - h'^2)d^2 - (k^2d^2 + h'^2)z^2} \ldots$$

$$\left. \ldots - \tfrac{1}{3}kh'(r^2 + 2d^2)\ Boog.Sin. \frac{z}{r} + C \right\} \ldots\ldots\ldots (28)$$

Deze uitdrukking van $z = o$ tot $z = l$ nemende, verkrijgen wij de helft van de hoeveelheid vocht, die in het vat, op de onderstelde wijze gevuld, begrepen is. Onze formule verdwijnt reeds voor $z = o$ en dus is $C = o$, nemende dan $z = l$ en vermenigvuldigen wij alles met 2, dan komt er voor de gevraagde hoeveelheid vocht

H =

$$H = \frac{2c_{,}}{b_{,}} Sin(\alpha+\beta) \Big\{ -\tfrac{2}{3} h' k l \sqrt{(r^2-l^2)} + k^2 l (d^2 - \tfrac{1}{3} l^2) Boog Cos. \frac{h'}{k\sqrt{(d^2-l^2)}}$$

$$\ldots + \tfrac{1}{3} k^2 d^3 \, Boog. Tang. \frac{2 d k h' l \sqrt{(r^2-l^2)}}{(k^2 d^2 - h'^2) d^2 - (k^2 d^2 + h'^2) l^2} \ldots$$

$$\ldots - \tfrac{1}{3} k h' (r^2 + 2 d^2) \, Boog. Sin. \frac{l}{r} \Big\} \ldots\ldots\ldots (29)$$

in welke formule de letters, die niet onmiddellijk gegeven zijn, ingevolge het voorgaande, de volgende waarden hebben

$$c = \frac{m}{n} b; \quad d = \frac{lb}{\sqrt{(b^2 - n^2)}}; \quad \frac{c_{,}}{b_{,}} = \frac{bc}{\sqrt{(c^4 Sin^2 \alpha + b^4 Cos^2 \alpha)}}$$

$$Sin.(\alpha+\beta) = \frac{c^2 Sin^2.\alpha + b^2 Cos^2.\alpha}{\sqrt{(c^4 Sin^2.\alpha + b^4 Cos^2.\alpha)}}; \quad k^2 = \frac{c^4 Sin^2.\alpha + b^4 Cos^2.\alpha}{d^2 (c^2 Sin^2.\alpha + b^2 Cos^2.\alpha)}$$

$$h' = \frac{h}{Sin.(\alpha+\beta)} \quad \text{en} \quad r^2 = d^2 - \frac{h'^2}{k^2}.$$

Zijn alzoo m, n, b, l en α in getallen gegeven, dan zal men moeten beginnen met de volgende waarden te berekenen

$$c = \frac{m}{n} b; \; d = \frac{lb}{\sqrt{(b^2 - n^2)}}; \; p = \sqrt{(c^2 Sin^2.\alpha + b^2 Cos^2.\alpha)};$$

$$q = \sqrt{(c^4 Sin^2.\alpha + b^4 Cos^2.\alpha)}; \; \frac{c_{,}}{b_{,}} = \frac{bc}{q}; \; Sin.(\alpha+\beta) = \frac{p^2}{q},$$

$k = \dfrac{q}{dp}$; $h' = \dfrac{hq}{p^2}$ en $r^2 = d^2 - \dfrac{h'^2}{k^2}$ en deze berekend hebbende, zal de formule (29) de gevraagde hoeveelheid vloeistof doen kennen. Hierbij moet nog worden opgemerkt, dat zoodra het vat meer dan half gevuld is, h als negatief in rekening moet worden gebragt.

1°. Gevolg. Is het vat half gevuld, dan is h en dus ook h' gelijk 0 en bijgevolg $r = d$, waardoor

$$H = \frac{c_{,}}{b_{,}} Sin.(\alpha+\beta) k^2 l (d^2 - \tfrac{1}{3} l^2) \pi$$

maar $\dfrac{c_{,}}{b_{,}} Sin.(\alpha+\beta) k^2 = \dfrac{bc}{q} \times \dfrac{p^2}{q} \times \dfrac{q^2}{d^2 p^2} = \dfrac{bc}{d^2} = \dfrac{b^2}{d^2} \cdot \dfrac{m}{n}$,

en dus $$H = \frac{b^2}{d^2} \cdot \frac{m}{n} \cdot l (d^2 - \tfrac{1}{3} l^2) \pi \ldots\ldots (30)$$

of voor d derzelver waarde schrijvende, dat is $\dfrac{lb}{\sqrt{(b^2 - n^2)}}$

$$H = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{m}{n} l (2 b^2 + n^2) \pi \ldots\ldots (31)$$

2°. Ge-

2°. Gevolg. Vermenigvuldigt men de laatste uitdrukking met 2, dan zal men voor den geheelen inhoud van het vat vinden

$$2H = \tfrac{2}{3}.\frac{m}{n}l\,(2b^2 + n^2)\,\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

3°. Gevolg. De formule (30) leert ons ook den inhoud van de halve, en dus ook van de geheele ellipsoide kennen. Het vat gaat namelijk in de geheele ellipsoide over, zoodra $l = d$ wordt. Alsdan zijn m en n ieder in het bijzonder wel gelijk nul, doch derzelver betrekking blijft daarom nog altijd $\frac{m}{n} = \frac{c}{b}$; voor de halve ellipsoide is dus

$$H = \frac{b^2}{d^2}.\frac{c}{b}.\tfrac{2}{3}\,d^3\pi = \tfrac{2}{3}\,bcd\,\pi,$$

zoodat de geheele inhoud der ellipsoide wordt uitgedrukt door $\frac{4}{3}\,bcd\,\pi$. Zijn b, c en d even groot, dan geeft dit voor den inhoud van den bol, naar behooren, $\frac{4}{3}\,r^3\,\pi$.

Aanmerking. Stelt men $m = n$, dan zijn de bodems cirkelvormig, doch de duigen blijven volgens ellipsen van gelijke afmeting afgerond. De vergelijking (32) geeft alzoo in dit geval voor den inhoud $\frac{2}{3}l\,(2b^2 + n^2)\,\pi$.

XXV. Voorstel.

Door R. Lobatto.

De vergelijkingen $x\sqrt{(a^2 - y^2)} = A$ *en* $y\sqrt{(a^2 - x^2)} = B$ *zonder behulp eener vierkantsvergelijking op te losfen?*

Opgelost *door* R. Lobatto, L. J. Ulman, A. B. de Bock, Jun. en F. J. Stamkart.

Oplossing *van* R. Lobatto.

Men stelle $y = a\,Sin.\,\phi$ en $x = a\,Sin.\,\psi$, dan is $\sqrt{(a^2 - y^2)} = a\,Cos.\,\phi$ en $\sqrt{(a^2 - x^2)} = a\,Cos.\,\psi$, en hierdoor veranderen de vergelijkingen in

$$a^2\,Cos.\,\phi\,Sin.\,\psi = A$$

en

$$a^2\,Cos.\,\psi\,Sin.\,\phi = B,$$

waarvan de som en het verschil, door a^2 gedeeld, ons geeft

$$Sin.\,\phi\,Cos.\,\psi + Cos.\,\phi\,Sin.\,\psi = \tfrac{1}{a^2}\,(A + B)$$

en

$$Sin.\,\psi\,Cos.\,\phi - Cos.\,\psi\,Sin.\,\phi = \tfrac{1}{a^2}\,(A - B),$$

of, wat hetzelfde is,

$$Sin. (\psi + \phi) = \tfrac{1}{2} (A + B)$$

en $$Sin. (\psi - \phi) = \tfrac{1}{2} (A - B),$$

waardoor wij bij omkeerig opmaken

$$\psi + \phi = Boog. Sin. \tfrac{1}{2} (A + B),$$

of $$\psi + \phi = \pi - Boog. Sin. \tfrac{1}{2} (A + B);$$

en $$\psi - \phi = Boog. Sin. \tfrac{1}{2} (A - B),$$

of $$\psi - \phi = \pi - Boog. Sin. \tfrac{1}{2} (A - B).$$

Daar wij twee waarden voor $\psi + \phi$ en twee waarden voor $\psi - \phi$ vinden, zullen wij dezelve op vier verschillende wijzen kunnen combinéren, hetgeen tot vier verschillende antwoorden aanleiding zal geven: zie hier dezelve:

I°. Nemen wij $\psi + \phi = Boog. Sin. \tfrac{1}{2} (A + B)$ en $\psi - \phi = Boog. Sin. \tfrac{1}{2} (A - B)$, dan verkrijgen wij

$$\psi = \tfrac{1}{2} Boog. Sin. \tfrac{1}{2} (A + B) + \tfrac{1}{2} Boog. Sin. \tfrac{1}{2} (A - B)$$

en $$\phi = \tfrac{1}{2} Boog. Sin. \tfrac{1}{2} (A + B) - \tfrac{1}{2} Boog. Sin. \tfrac{1}{2} (A - B).$$

II°. Nemen wij $\psi + \phi = \pi - Boog. Sin. \tfrac{1}{2} (A + B)$ en $\psi - \phi = \pi - Boog. Sin. \tfrac{1}{2} (A - B)$, dan vinden wij

$$\psi = \pi - \tfrac{1}{2} Boog. Sin. \tfrac{1}{2} (A + B) - \tfrac{1}{2} Boog. Sin. \tfrac{1}{2} (A - B)$$

en $$\phi = \tfrac{1}{2} Boog. Sin. \tfrac{1}{2} (A - B) - \tfrac{1}{2} Boog. Sin. \tfrac{1}{2} (A + B).$$

III°. Nemen wij $\psi + \phi = Boog. Sin. \tfrac{1}{2} (A + B)$ en $\psi - \phi = \pi - Boog. Sin. \tfrac{1}{2} (A - B)$, dan zal er komen

$$\psi = \tfrac{1}{2} \pi + \tfrac{1}{2} Boog. Sin. \tfrac{1}{2} (A + B) - \tfrac{1}{2} Boog. Sin. \tfrac{1}{2} (A - B)$$

en $$\phi = -\tfrac{1}{2} \pi + \tfrac{1}{2} Boog. Sin. \tfrac{1}{2} (A + B) + \tfrac{1}{2} Boog. Sin. \tfrac{1}{2} (A - B).$$

IV°. Nemen wij eindelijk $\psi + \phi = \pi - Boog. Sin. \tfrac{1}{2} (A + B)$ en $\psi - \phi = Boog. Sin. \tfrac{1}{2} (A - B)$ dan komt er

$$\psi = \tfrac{1}{2} \pi - \tfrac{1}{2} Boog. Sin. \tfrac{1}{2} (A + B) + \tfrac{1}{2} Boog. Sin. \tfrac{1}{2} (A - B)$$

en $$\phi = \tfrac{1}{2} \pi - \tfrac{1}{2} Boog. Sin. \tfrac{1}{2} (A + B) - \tfrac{1}{2} Boog. Sin. \tfrac{1}{2} (A - B).$$

Wanneer ψ en ϕ berekend zijn, worden eindelijk x en y gevonden door de formulen $x = a\ Sin.\ \psi$ en $y = a\ Sin.\ \phi$.

XXVI. VOORSTEL.

Door R. LOBATTO.

Men vraagt de wezenlijke waarde te bepalen der goniometrische uitdrukking $\frac{1}{\sqrt{-1}} . Boog. Cos. \left(\frac{1}{Cos. \phi}\right)$?

OP-

OPGELOST *door* R. LOBATTO, A. B. DE BOCK, JUN. F. J. STAMKART en J. BASSAN.

OPLOSSING *van* R. LOBATTO.

Men stelle $\frac{1}{\sqrt{-1}}\, Boog.\, Cos.\,(\frac{1}{Cos.\,\phi}) = z$, dan heeft men terstond

$$Cos.\,(z\sqrt{-1}) = \frac{1}{Cos.\,\phi}$$

en dus $Sin.(z\sqrt{-1}) = \sqrt{(1-\frac{1}{Cos^2.\,\phi})} = \sqrt{(1-Sec^2.\,\phi)} = Tang.\,\phi.\sqrt{-1}$.

Nu is in het algemeen

$$e^{x\sqrt{-1}} = Cos.\,x + Sin.\,x\,.\sqrt{-1};$$

stellen wij dus $x\sqrt{-1} = z$ of $x = \frac{z}{\sqrt{-1}} = -z\sqrt{-1}$, dan komt er

$$e^{z} = Cos.\,(z\sqrt{-1}) - Sin.\,(z\sqrt{-1})\times\sqrt{-1},$$

of wanneer wij voor $Cos.\,(z\sqrt{-1})$ en $Sin.\,(z\sqrt{-1})$ de boven opgegevene waarden stellen,

$$e^{z} = \frac{1}{Cos.\,\phi} + Tang.\,\phi = \frac{1+Sin.\,\phi}{Cos.\,\phi} = \sqrt{\frac{(1+Sin.\,\phi)^2}{1-Sin^2.\,\phi}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+Sin.\,\phi}{1-Sin.\,\phi}} = Tang.\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\phi),$$

zoodat $z = Nep.\,Log.\,Tang.\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\phi)$,

dat is $\frac{1}{\sqrt{-1}}\, Boog.\, Cos.\,(\frac{1}{Cos\,\phi}) = Nep.\,Log.\,Tang.\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\phi)$.

Schrijven wij in deze formule $-\phi$ in plaats van ϕ, dan blijft $Cos.\,\phi$ onveranderd; men heeft dan ook

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\, Boog.\,Cos.\,(\frac{1}{Cos.\,\phi}) = Nep.\,Log.\,Tang.\,(45^\circ - \tfrac{1}{2}\phi)$$

zoodat de opgegevene uitdrukking voor twee verschillende waarden vatbaar is.

Stellen wij $\phi = \pi$, dan geven beide uitdrukkingen voor het tweede lid $Nep.\,Log.\,(-1)$ en bijgevolg

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\, Boog.\,Cos.\,(\frac{1}{-1}) = Nep.\,Log.\,(-1),$$

of $\frac{1}{\sqrt{-1}}\, Boog.\,Cos.\,(-1) = Nep.\,Log.\,(-1)$,

dat is $\frac{1}{\sqrt{-1}} \times \pi = Nep.\ Log.\ (-1)$,

zoodat $\pi = \sqrt{-1} \times Nep.\ Log.\ (-1)$.

Aanmerking. Uit $e^z = Cos.(z\sqrt{-1}) - Sin.(z\sqrt{-1}).\sqrt{-1}$ volgt, door z negatief te nemen,

$$e^{-z} = Cos.\ (z\sqrt{-1}) + Sin.\ (z\sqrt{-1}) \times \sqrt{-1}$$

en dus $e^z + e^{-z} = 2\ Cos.\ (z\sqrt{-1})$

zoodat $Cos.\ (z\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}\ (e^z + e^{-z})$.

De cosinus van eenen onbestaanbaren boog kan dus altijd door een bestaanbaar getal worden uitgedrukt.

XXVII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Van eenen driehoek is gegeven een der hoeken, benevens de middellijnen van de in- en omgeschrevene cirkels. Men vraagt dien driehoek te bepalen?

OPGELOST *door* J. BASSAN, F. J. STAMKART en L. J. ULMAN.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Stellen wij de zijden van den driehoek BC $= x$, AC $= y$ en AB $= z$, *Fig.* 13., en den gegeven' hoek A $= a$. Daar de som der hoeken B en C gelijk $180° - a$ en dus deze halve som $90° - \frac{1}{2}a$ is, zoo stellen wij het halve verschil dezer hoeken gelijk ϕ, en dan is C $= 90° - \frac{1}{2}a + \phi = 90° - (\frac{1}{2}a - \phi)$ en B $= 90° - \frac{1}{2}a - \phi = 90° - (\frac{1}{2}a + \phi)$ zoodat $Sin.$ C $= Cos.\ (\frac{1}{2}a - \phi)$ en $Sin.$ B $= Cos.\ (\frac{1}{2}a + \phi)$.

Daar verder het quotient van elke der zijden eens driehoeks gedeeld door den sinus van den overstaanden hoek gelijk den straal van den omgeschreven' cirkel is, zoo hebben wij, dezen straal $= b$ stellende,

$$\frac{x}{Sin.\ a} = \frac{y}{Cos.\ (\frac{1}{2}a + \phi)} = \frac{z}{Cos.\ (\frac{1}{2}a - \phi)} = b,$$

waaruit wij vinden

$$x = b\,Sin.\ a,\ y = b\ Cos.\ \tfrac{1}{2}(a + \phi) \text{ en } z = b\ Cos\ \tfrac{1}{2}(a - \phi).$$

Stellen wij verder den straal van den ingeschreven' cirkel gelijk a, dan is de inhoud van den driehoek $\frac{1}{2}\ (x + y + z)\ a$; maar de-

deze inhoud wordt ook uitgedrukt door $\frac{1}{2}\, yz\, Sin.\, a$, zoodat wij hebben

$$(x + y + z)\, a = yz\, Sin.\, a,$$

en brengende hierin de waarden van x, y en z over, dan komt er

$$ab(Sin.a + Cos.(\tfrac{1}{2}a+\phi) + Cos.(\tfrac{1}{2}a-\phi)) = b^2 Sin.a\, Cos.(\tfrac{1}{2}a+\phi)\, Cos.(\tfrac{1}{2}a-\phi),$$

of wanneer wij $Cos.\, (\frac{1}{2}a + \phi)$ en $Cos.\, (\frac{1}{2}a - \phi)$ ontwikkelen,

$$a(Sin.a + 2\, Cos.\tfrac{1}{2}a\, Cos.\phi) = b\, Sin.a\, (Cos^2.\phi - Sin^2.\tfrac{1}{2}a),$$

of, $2\, Sin.\frac{1}{2}a\, Cos.\frac{1}{2}a$ in plaats van $Sin.a$ schrijvende,

$$a(Sin.\tfrac{1}{2}a + Cos.\phi) = b\, Sin.\tfrac{1}{2}a\, (Cos.\phi + Sin.\tfrac{1}{2}a)(Cos.\phi - Sin.\tfrac{1}{2}a)$$

hetgeen, aan beide zijden door $Cos.\, \phi + Sin.\, \frac{1}{2}a$ gedeeld zijnde, geeft

$$a = b.\, Sin.\, \tfrac{1}{2}a\, (Cos.\, \phi - Sin.\, \tfrac{1}{2}a)$$

waaruit
$$Cos.\, \phi = \frac{a}{b\, Sin\, \frac{1}{2}a} + Sin.\tfrac{1}{2}a.$$

Door middel van deze vergelijking ϕ gevonden hebbende, is alles bekend; want dan hebben wij, in gevolg het bovenstaande, voor de zijden

$$x = b\, Sin.\, a,\quad y = b\, Cos.\, (\tfrac{1}{2}a + \phi) \text{ en } z = b\, Cos.\, (\tfrac{1}{2}a - \phi),$$

terwijl wij voor de twee onbekende hoeken hebben

$$B = 90^\circ - (\tfrac{1}{2}a + \phi) \text{ en } C = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(a - \phi).$$

XXVIII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Van eenen vierhoek, welke een' regten hoek heeft, zijn de twee zijden om dien hoek gegeven, benevens de diagonaal, die uit dit hoekpunt voortkomt. Indien nu gezegde diagonaal den hoek, die over den regten hoek staat, midden door deelt, vraagt men de overige zijden te berekenen?

OPGELOST *door* J. BASSAN en F. J. STAMKART.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Zij ABCD, *Fig.* 14, de vierhoek, waarin D de regte hoek is; stellen wij $AD = a$, $CD = b$ en $BD = c$, en nemen wij $\angle ADB = \phi$ als onbekende aan, dan is $\angle BDC = 90^\circ - \phi$. Trekken wij AE loodregt op BD, dan is $DE = a\, Cos.\phi$ en $AE = a\, Sin.\, \phi$, dus $BE = c - a\, Cos.\, \phi$. Nu is $Tang.\, ABD = \frac{AE}{BE}$ en dus hebben wij $Tang.\, ABD = \frac{a\, Sin.\, \phi}{c - a\, Cos.\, \phi}$.

 Op

Op dezelfde wijze is dan ook $Tang.\,CBD = \dfrac{b\,Sin.(90^\circ - \phi)}{c - b\,Cos.(90^\circ - \phi)} =$ $\dfrac{b\,Cos\ \phi}{c - b\,Sin.\,\phi}$, en daar de hoeken ABD en CBD volgens de opgaaf even groot zijn, zoo geeft ons dit de vergelijking

$$\frac{a\,Sin.\,\phi}{c - a\,Cos.\,\phi} = \frac{b\,Cos.\,\phi}{c - b\,Sin.\,\phi},$$

of $\quad ac\,Sin.\phi - ab\,Sin^2.\phi = bc\,Cos.\phi - ab\,Cos^2.\phi,$

of wanneer wij $\sqrt{(1 - Cos^2.\phi)}$ in plaats van $Sin.\phi$ schrijven,

$$ac\sqrt{(1 - Cos^2.\phi)} = ab(1 - Cos^2.\phi) + bc\,Cos.\phi - ab\,Cos^2.\phi,$$

dat is $\quad ac\sqrt{(1 - Cos^2.\phi)} = ab(1 - 2\,Cos^2.\phi) + bc\,Cos\ \phi,$

en $\quad a^2c^2(1 - Cos^2.\phi) = b^2(a + c\,Cos.\phi - 2a\,Cos^2\phi)^2,$

dat is na ontwikkeling

$$\left.\begin{array}{l} a^2b^2 + 2ab^2c\,Cos.\phi - 4a^2b^2Cos^2.\phi - 4ab^2c\,Cos^3.\phi + 4a^2b^2Cos^4\phi \\ -\,a^2c^2 \qquad\qquad + b^2c^2Cos^2.\phi \\ \qquad\qquad\qquad + a^2c^2Cos^2.\phi \end{array}\right\} = 0,$$

welke vergelijking aldus geschreven kan worden:

$$Cos^4\phi - \frac{c}{a}Cos^3.\phi + \tfrac{1}{4}\left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} - 4\right)Cos^2.\phi + \tfrac{1}{2}\frac{c}{a}Cos.\phi + \tfrac{1}{4}\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right) = 0.$$

Zijn nu a, b en c in getallen gegeven, dan kan uit deze vergelijking de waarde van $Cos.\ \phi$ berekend worden, en dan is ook de hoek ABD of CBD bekend.

De zijden AB en BC zullen dan nu mede gemakkelijk berekend worden, omdat in elk der driehoeken ABD en CBD nu meer dan genoegzame bekenden voorkomen.

XXIX. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK, JUN.

Men vraagt de waarde van x en y te vinden uit de vergelijkingen $x^n + y^n + \sqrt{(x^n + y^n)} = a$ *en* $x^n - y^n - \sqrt{(x^n - y^n)} = b$?

OPGELOST door F. J. STAMKART, L. J. ULMAN, J. JONKHEERT, J. BASSAN en A. B. DE BOCK. JUN.

OPLOSSING van F. J. STAMKART.

Stellen wij $\sqrt{(x^n + y^n)} = z$ en $\sqrt{(x^n - y^n)} = u$, dan gaan de opgegevene vergelijkingen over in

$$z^2 + z = a \qquad \text{en} \qquad u^2 - u = b,$$

welke vierkantsvergelijkingen terstond geven

$z =$

$$z = \sqrt{(x^n + y^n)} = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(4a+1)}$$

en $$u = \sqrt{(x^n - y^n)} = +\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(4b+1)};$$

deze vergelijkingen in het vierkant brengende, komt er

$$x^n + y^n = \tfrac{1}{2} + a \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{(4a+1)}$$

en $$x^n - y^n = \tfrac{1}{2} + b \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(4b+1)};$$

hiervan is de halve som en het halve verschil

$$x^n = \tfrac{1}{2}\{1+a+b \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{(4a+1)} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(4b+1)}\}$$

en $$y^n = \tfrac{1}{2}\{a - b \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{(4a+1)} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{(4b+1)}\},$$

waardoor wij dan voor de onbekenden vinden

$$x = \sqrt[n]{\{\tfrac{1}{2}(1+a+b) \mp \tfrac{1}{4}\sqrt{(4a+1)} \pm \tfrac{1}{4}\sqrt{(4b+1)}\}}$$

en $$y = \sqrt[n]{\{\tfrac{1}{2}(a - b) \mp \tfrac{1}{4}\sqrt{(4a+1)} \mp \tfrac{1}{4}\sqrt{(4b+1)}\}}.$$

De teekens + en — die onder het wortelteeken voorkomen, kunnen naar welgevallen met elkander verbonden worden, en geven alzoo vier verschillende waarden voor x en dus ook vier overeenkomstige waarden voor y. Daar bovendien elk getal voor n wortels van den graad n vatbaar is, zoo laat het vraagstuk in het algemeen $4n$ stelkunstige antwoorden toe. Dezelve zijn ondertusschen niet alle toepasselijk op de twee opgegevene vergelijkingen, maar lossen dezelve meer algemeen op, en bevatten eigenlijk al de oplossingen der twee volgende vergelijkingen

$$(x^n + y^n) \pm \sqrt{(x^n + y^n)} = a$$

en $$(x^n - y^n) \pm \sqrt{(x^n - y^n)} = b.$$

XXX. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Uit een der hoekpunten B, Fig. 15, van eenen driehoek EBF, wordt eene lijn BD naar de overstaande zijde EF getrokken, welke den tophoek midden door deelt. Vervolgens worden uit het punt D twee lijnen DA en DC tot de zijden BE en BF zoodanig getrokken, dat zij de hoeken BDE en BDF midden door deelen. Indien nu deze deellijnen BD, DA en DC gegeven zijn, vraagt men, hoe hierdoor de zijden van den driehoek berekend kunnen worden?

OPGELOST *door* J. BASSAN, F. J. STAMKART, L. J. ULMAN en J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Omdat de lijnen DA en DC de hoeken ADE en ADF midden door deelen, en de som dezer hoeken gelijk twee regte hoeken is, zoo is de som der halve hoeken, dat is, de hoek ADC, gelijk een regte hoek; bovendien is de hoek B door de lijn DB midden door gedeeld, en de vierhoek DABC bevindt zich dus volmaakt in dezelfde omstandigheden als die, welke wij in vraagstuk XXVIII behandeld hebben. Stellen wij dus ook hier DA $= a$, DC $= b$, DB $= c$ en $\angle$ADB $= \phi$, dan zal, ingevolge de oplossing van gezegd vraagstuk, de hoek ϕ gevonden worden door de vergelijking

$$Cos^4\phi - \frac{c}{a}Cos^3.\phi + \tfrac{1}{4}\left(\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}-4\right)Cos^2.\phi + \tfrac{1}{2}\frac{c}{a}Cos.\phi + \tfrac{1}{4}\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right) = 0.$$

Den hoek ψ gevonden hebbende, is $\psi = 90° - \phi$ mede bekend en dus zijn dan ook de hoeken BDE en BDF bekend. Verder heeft men, ingevolge de oplossing van vraagstuk XXVIII,

$$Tang.\ EDB = Tang.\ DBF = \frac{a\ Sin.\phi}{c - a\ Cos\ \phi},$$ en hierdoor worden

dan ook deze hoeken bekend; men heeft dus, in elk der driehoeken BDE en BDF, de zijde BD benevens de twee hoeken op deze zijde gegeven, waaruit dan de zijden, door de gewone regels der driehoeksmeting, gevonden worden.

XXXI. VOORSTEL.

Door R. LOBATTO.

Wanneer men in een veelvlakkig ligchaam een punt M zoodanig bepaalt, dat de som der vierkanten van de afstanden, die dit punt M van de hoekpunten des ligchaams heeft, een minimum is, dan zal dit punt de twee volgende eigenschappen bezitten.

1°. *Een stelsel krachten, werkende volgens de rigtingen dezer afstanden, en met vermogens, die aan deze afstanden evenredig zijn, zullen om het punt M evenwigt maken.*

2°. *Dit punt zal het middelpunt der middelbare afstanden van al de hoekpunten, of, met andere woorden, het zwaartepunt zijn van een stelsel gelijke gewigten, welke men in die hoekpunten onderstellen kan geplaatst te wezen. Men vraagt deze stellingen te bewijzen?*

OPGELOST *door* R. LOBATTO en F. J. STAMKART.

OP-

OPLOSSING *van* R. LOBATTO.

Stellen wij de coordinaten van het punt M, ten opzigte van drie onderling regthoekige vlakken, gelijk x, y en z, en de coordinaten der hoekpunten van het veelvlakkig ligchaam, ten opzigte van deze zelfde vlakken der coordinaten, achtervolgens α, β en γ; α', β' en γ'; α'', β'' en γ''; *enz.* Stellen wij verder de afstanden, die het punt M van deze hoekpunten heeft, achtervolgens gelijk p, p', p'', *enz.*, dan hebben wij voor de vierkanten dezer afstanden

$$p^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2$$
$$p'^2 = (x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2 + (z-\gamma')^2$$
$$p''^2 = (x-\alpha'')^2 + (y-\beta'')^2 + (z-\gamma'')^2$$

enz. *enz.*

Stellen wij dus kortheidshalve

$$(x-\alpha)^2+(x-\alpha')^2+(x-\alpha'')^2+\text{enz.} = \Sigma\,(x-\alpha)^2,$$
$$(y-\beta)^2+(y-\beta')^2+(y-\beta'')^2+\text{enz.} = \Sigma\,(y-\beta)^2,$$
$$(z-\gamma)^2+(z-\gamma')^2+(z-\gamma'')^2+\text{enz.} = \Sigma\,(z-\gamma)^2,$$

en $$p^2 + p'^2 + p''^2 + \text{enz.} = \Sigma\, p^2 = S,$$

dan hebben wij voor de som der vierkanten van al de gezegde afstanden

$$S = \Sigma\,(x-\alpha)^2 + \Sigma\,(y-\beta)^2 + \Sigma\,(x-\gamma)^2$$

welke uitdrukking nu een minimum moet zijn.

Deze vergelijking differentierende, verkrijgen wij klaarblijkelijk

$$\delta S = 2\,\delta x\,\Sigma\,(x-\alpha) + 2\,\delta y\,\Sigma\,(y-\beta) + 2\,\delta z\,\Sigma\,(z-\gamma)$$

en daar de veranderlijke grootheden x, y en z hier geheel onafhankelijk van elkander zijn, moeten wij voor het minimum hebben

$$\Sigma\,(x-\alpha) = 0; \quad \Sigma\,(y-\beta) = 0; \quad \Sigma\,(z-\gamma) = 0 \;.(A)$$

Men noeme de krachten, welke op M werken, en met de afstanden p evenredig zijn, achtervolgens K, K′, K″, *enz.*, en stelle de hoeken, welke deze krachten met de rigtingen der drie assen maken, achtervolgens ϕ, ϕ_1 en ϕ_2; ϕ', ϕ'_1 en ϕ'_2; ϕ'', ϕ''_1 en ϕ''_2; *enz.*, dan heeft men, zoo als genoegzaam bekend is,

$$p\,Cos.\phi = (x-\alpha)\;;\quad p\,Cos.\phi_1 = (y-\beta)\;;\quad p\,Cos.\phi_2 = (z-\gamma)$$
$$p'\,Cos.\phi' = (x-\alpha')\;;\quad p'\,Cos.\phi'_1 = (y-\beta')\;;\quad p'\,Cos.\phi'_2 = (z-\gamma')$$
$$p''\,Cos.\phi'' = (x-\alpha'')\;;\quad p''\,Cos.\phi''_1 = (y-\beta'')\;;\quad p''\,Cos.\phi''_2 = (z-\gamma'')$$

enz. *enz.* *enz.*

 waar-

waardoor onze drie vergelijkingen (A) overgaan in

$\Sigma\,(p\,Cos.\,\phi) = o;\quad \Sigma\,(p\,Cos.\,\phi_1) = o,\quad \Sigma\,(p\,Cos\,\phi_2) = o$

of, omdat al de afstanden p evenredig zijn met de krachten K,

$\Sigma\,(K\,Cos.\,\phi) = o,\quad \Sigma\,(K\,Cos.\,\phi_1) = o,\quad \Sigma\,(K\,Cos.\,\phi_2) = o$

en daar dit juist de drie vergelijkingen zijn, welke er moeten bestaan, opdat een stelsel krachten, die in de ruimte op eenig punt werken, met elkander evenwigt maken, zoo is het eerste gedeelte der opgegevene stelling bewezen.

Het tweede gedeelte der stelling volgt even gemakkelijk uit de vergelijkingen (A); want onderstellen wij, dat er n hoekpunten zijn, dan gaan deze vergelijkingen over in

$$nx - (\alpha + \alpha' + \alpha'' + enz. \ldots + \alpha^{N-1}) = o,$$
$$ny - (\beta + \beta' + \beta'' + enz. \ldots + \beta^{N-1}) = o,$$

en $$nz - (\gamma + \gamma' + \gamma'' + enz. \ldots + \gamma^{N-1}) = o,$$

waaruit $$x = \frac{\alpha + \alpha' + \alpha'' + enz.}{n},$$

$$y = \frac{\beta + \beta' + \beta'' + enz.}{n},$$

en $$z = \frac{\gamma + \gamma' + \gamma'' + enz.}{n},$$

welke uitdrukkingen voor x, y en z klaarblijkelijk niets anders zijn, dan de coordinaten van het middelpunt der middelbare afstanden.

Stelt men dat er in elk der hoekpunten een zelfde gewigt P geplaatst is, dan heeft men, de coordinaten van het gemeenschappelijk zwaartepunt x', y' en z' noemende, volgens de leer der zwaartepunten,

$$nPx' = P\alpha + P\alpha' + P\alpha'' + enz.$$
$$nPy' = P\beta + P\beta' + P\beta'' + enz.$$
$$nPz' = P\gamma + P\gamma' + P\gamma'' + enz.$$

en daar hieruit voor x', y' en z' dezelfde formulen gevonden worden, die wij zoo even voor x, y en z verkregen, zoo blijkt ten duidelijkste, dat dit zwaartepunt met het middelpunt der middelbare afstanden in een valt.

Gevolg. In elk regelmatig veelvlakkig ligchaam is het middelpunt de plaats van het punt M, omdat een stelsel gelijke krachten, volgens de rigtingen der lijnen werkende, die de hoekpunten met het mid-

middelpunt vereenigen, alsdan noodzakelijk om dit middelpunt evenwigt maken. Deze zelfde redenering geldt ook voor eenen regelmatigen veelhoek. In elke dezer figuren zal alzoo de som van de vierkanten der gezegde afstanden een minimum zijn.

XXXII. VOORSTEL,

Door F. J. STAMKART.

Onder alle ellipsen, welke men in een parabolisch segment in diervoege kan beschrijven, dat zij de parabool in twee punten en de afsnijdende koorde in derzelver midden aanraken, begeert men die te bepalen, waarvan de inhoud een maximum is?

OPLOSSING. *Door* F. J. STAMKART.

Zij DAD′, *Fig.* 16, het parabolisch segment, waarvan AB de middellijn, die tot den afsnijdenden ordinaat DD′ behoort, en NBN′EN de gevraagde ellips, waarvan C het middelpunt en die DD′ in het midden B en de parabool in de punten K en K′ aanraakt. Trekken wij door C de middellijn FF′ evenwijdig met DD′, dan loopt dezelve evenwijdig met de raaklijn van het punt B, en dus zijn FF′ en BE toegevoegde middellijnen van de ellips, welke met elkander denzelfden hoek a maken, als de coordinaten van de gegevene parabool. De lijn AB deelt dus zoo wel, bij elke doorsnede MM′, die evenwijdig met DD′ getrokken is, de lijn NN′ als de lijn MM′ midden door; en hieruit volgt, dat de lijn KK′, die de twee raakpunten K en K′ vereenigt, mede evenwijdig aan DD′ of FF′ zal loopen.

Wij stellen de parameter van de middellijn AB der parabool gelijk p, de lijn AB $= m$, AP $= x$, de ordinaat van de parabool PM $=$ PM′ $= y'$ en de ordinaat van de ellips PN $=$ PN′ $= y$. Eindelijk stellen wij de onbekende toegevoegde middellijnen van de ellips CB $=$ CE $= s$ en CF $=$ CF′ $= t$. Dit aangenomen hebbende, is de vergelijking van de parabool

$$y'^2 = px \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

en de vergelijking van de ellips

$$y^2 = \frac{t^2}{s^2}\,(s^2 - CP^2),$$

of, omdat CP $=$ AP $-$ AC $=$ AP $-$ (AB $-$ BC) $= x - m + s$ is,

$$y^2 = \frac{t^2}{s^2}\,(s^2 - (x - m + s)^2),$$

dat

dat is $$y^2 = \frac{t^2}{s^2}(2s(m-x)-(m-x)^2) \quad . \; . \; . \; (2)$$

Voor de punten K en K′, die aan de parabool en ellips gemeen zijn, moet $y = y'$ zijn, en dit geeft ons tot eerste vergelijking

$$\frac{t^2}{s^2}(2s(m-x) - (m-x)^2) = px \quad . \; . \; . \; . \; . \; (I)$$

Bij de punten K en K′ is niet alleen $y = y'$, maar zij hebben bovendien dezelfde subtangens HT. Nu is de subtangens van de parabool HT $= 2x$, en daar wij in de ellips voor de subtangens hebben CH : CE = CE : CT, zoo is, omdat CH hier de waarde van CP voorstelt, doch aan de andere zijde van het middelpunt ligt, CH $= m - s - x$, zoodat $m - s - x : s = s :$ CT dus CT $= \frac{s^2}{m-s-x}$ en bijgevolg HT $=$ CT $-$ CH $= \frac{s^2-(m-s-x)^2}{m-s-x}$, stellende dus de twee gevondene waarden van HT aan elkander gelijk, dan vinden wij tot tweede vergelijking

$$\frac{2s(m-x)-(m-x)^2}{m-x-s} = 2x \quad . \; . \; . \; (II)$$

Uit de vergelijkingen (I) en (II) kunnen wij de onbekende toegevoegde middellijnen, t en s, zeer gemakkelijk in x uitdrukken, want uit de laatste hebben wij terstond

$$2s(m-x)-(m-x)^2 = 2x(m-x)-2sx,$$

of $$2ms = 2x(m-x)+(m-x)^2 = (m-x)(m+x),$$

zoodat $$s = \frac{m^2-x^2}{2m} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Brengen wij deze waarde van s over in (I), dan komt er

$$t^2\left\{\frac{(m-x)^2(m+x)}{m} - (m-x)^2\right\} = px \, . \frac{(m-x)^2(m+x)^2}{4m^2},$$

of door $(m-x)^2$ deelende en met $4m^2$ vermenigvuldigende,

$$t^2(4m(m+x)-4m^2) = px(m+x)^2,$$

dat is $$4mxt^2 = px(m+x)^2,$$

zoodat $$t^2 = \frac{p(m+x)^2}{4m},$$

en dus $$t = \tfrac{1}{2}(m+x)\sqrt{\frac{p}{m}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

en door deze waarden van s en t is dan nu het volgende vraagstuk

ſtuk opgelost: *In een gegeven parabolisch ſegment* DAD′ *een ellips te beſchrijven, die de ordinaat* DD′ *in het midden* B, *en de parabool in twee gegevene punten* K *en* K′ *aanraakt, welke verkregen worden door op eenen gegevenen afſtand* AP $=x$ *eene lijn* KK′ *evenwijdig met* DD′ *te trekken.* Is namelijk AP $=x$ bekend, dan vinden wij door (3) en (4) de waarden van s en t, dat is van de halve toegevoegde middellijnen CB en CF, en daar wij tevens den hoek α kennen, dien zij met elkander maken, zoo is alsdan de geheele ellips bepaald.

Wij moeten dus nu nog bepalen, hoe groot x, dat is, waar de punten K en K′ moeten genomen worden, opdat de inhoud van deze ellips op zijn grootst zal wezen. Hiertoe merken wij op, dat deze inhoud in het algemeen wordt uitgedrukt door

$$I = st \times \pi \ Sin.\ \alpha;$$

brengen wij dus hierin de waarde van s en t over, dan komt er

$$I = \frac{m^2 - x^2}{2m} \times \tfrac{1}{2}(m+x)\sqrt{\frac{p}{m}} \times \pi \ Sin.\ \alpha,$$

of $$I = (m-x)(m+x)^2 \times \tfrac{1}{4}.\frac{\pi \ Sin\ \alpha}{m}\sqrt{\frac{p}{m}} \quad \ldots\ldots (5)$$

en daar de factor $\dfrac{\pi \ Sin.\ \alpha}{4m}\sqrt{\dfrac{p}{m}}$ ſtandvastig is, zullen wij x zoodanig moeten bepalen, dat de functië

$$X = (m-x)(m+x)^2,$$

dat is $$X = m^3 + m^2x - mx^2 - x^3,$$

een maximum wordt.

Stellen wij hiertoe de uitdrukking

$$\frac{\partial X}{\partial x} = m^2 - 2mx - 3x^2 = 0,$$

dan vinden wij, door deze vierkantsvergelijking op te losſen,

$$x = -m \qquad \text{of} \qquad x = \tfrac{1}{3}m;$$

de eerſte waarde van x maakt y onbeſtaanbaar, en wij moeten ons alzoo tot de tweede bepalen, welke, bovendien $\dfrac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -2m - 6x$ negatief makende, werkelijk een maximum voor den inhoud aanduidt. Het gevraagde maximum zal dus plaats hebben, wanneer $x = \frac{1}{3}m$ en dus wanneer AH $= \frac{1}{3}$ AB is. Dit geeft ons voor

de

de halve toegevoegde middellijnen BC $= s = \frac{m^2 - x^2}{2m} =$ $\frac{4}{9} m = \frac{4}{9}$AB; CF $= t = \frac{1}{2}(m+x)\sqrt{\frac{p}{m}} = \frac{2}{3}\sqrt{pm} = \frac{1}{3}$ BD.

Voor den inhoud van deze grootste ellips hebben wij verder, daar dezelve gelijk $s t \pi$ *Sin.* a is, I $= \frac{8}{27} \pi$ *Sin.* $a\, m \sqrt{mp}$ $= \frac{8}{27}$ AB $\times$ BD. π *Sin.* a, en daar de inhoud van het geheele parabolisch segment gelijk is aan $\frac{4}{3}$ AB $\times$ BD. *Sin.* a.

zoo is *Inh. ellips.* $= \frac{2}{9} \pi \times$ *Inh. par. segm.*

of *Inh. ellips.* $= 0{,}6981317 \times$ *Inh par. segt.*

Onderstelt men $m = \frac{9}{4} p$, in welk geval AB gelijk is aan negenmaal de afstand van het brandpunt tot den top, dan wordt $s = t = p$; in dit geval zijn dus de twee toegevoegde middellijnen gelijk. Is bovendien in dit geval de hoek a regt, dan wordt de grootste ellips een cirkel, die de parameter van de parabool tot straal heeft.

XXXIII. VOORSTEL.

Door F. J. STAMKART.

Wanneer men in een parabolisch segment, door eene koorde bepaald, welke loodregt op de as staat, eene ellips zoodanig beschrijft, dat dezelve de parabool in twee punten en de afsnijdende koorde in het midden aanraakt, en men deze figuur om de as van de parabool laat wentelen, zoo vraagt men het zwaartepunt te bepalen van het uitgeholde ligchaam, dat door de omwenteling van het overschietende deel der parabolische vlakte ontstaat?

OPLOSSING *van* F. J. STAMKART.

Stellen wij, *Fig.* 17, wederom AM $= m$, de parameter van de parabool p en, daar de ellips hier gegeven is, AH $= h$, dan blijkt uit de oplossing van het voorgaande vraagstuk, dat de halve assen van deze ellips worden uitgedrukt door

$$CF = a = \tfrac{1}{2}(m+h)\sqrt{\frac{p}{m}} \quad \text{en} \quad CB = b = \frac{m^2 - h^2}{2m}.$$

Wentelt nu de geheele figuur om de as AB, dan beschrijft of doorloopt de ellips eene ellipsoide, waarvan de drie regthoekige assen a, a, en b zijn, en de inhoud van dit ligchaam is dus gelijk

Inh.

$$Inh.\ ellipsoide = \tfrac{4}{3}\, a^2 b\, \pi = \tfrac{1}{6}\, \pi\, p\, \frac{(m+h)^3 (m-h)}{m^2}.\ (*)$$

De parabool DAD′ doorloopt verder bij deze beweging eene paraboloidé, en derzelver inhoud is, zoo als genoegzaam bekend is, gelijk de helft van den omgeschreven cilinder, zoodat wij hebben

$$Inh.\ paraboloide = \tfrac{1}{2}\, \pi\,.\, BD^2 \times AB = \tfrac{1}{2} \pi\ p m^2.$$

Het zwaartepunt Z van het verschil dezer ligchamen ligt, zoowel als het zwaartepunt van de ellipsoidé en van de paraboloide, in de as AB. Het zwaartepunt der ellipsoide ligt voorts in het middelpunt C, en dat van de paraboloide wordt gevonden door $AP = \tfrac{2}{3}\, AB = \tfrac{2}{3}\, m$ (I. R. SCHMIDT, *Statica* I Deel *pag.* 108).

Daar eindelijk de paraboloide gelijk de som is van de ellipsoide en het overschietende deel, zoo hebben wij, den oorsprong der momenten in A nemende,

$$Paraboloide \times AP = Ellipsoide \times AC + (Paraboloide - Ellipsoide)\, AZ,$$

en dus
$$AZ = \frac{Paraboloide \times AP - Ellipsoide \times AC}{Paraboloide - Ellipsoide},$$

en daar wij de waarden van AP en de inhouden der paraboloide en ellipsoide boven hebben opgegeven, en bovendien $AC = m - b = m - \frac{m^2 - h^2}{2m} = \frac{m^2 + h^2}{2m}$ is, zoo wordt

$$AZ = \frac{\tfrac{1}{2}\pi\, p m^2 \times \tfrac{2}{3} m - \tfrac{1}{6} \pi p \frac{(m+h)^3 (m-h)}{m^2} \times \frac{m^2 + h^2}{2m}}{\tfrac{1}{2} \pi\, p m^2 - \tfrac{1}{6} \pi\, p\,.\, \frac{(m+h)^3 (m-h)}{m^2}},$$

of, onder en boven met $12 m^3$ vermenigvuldigende en door πp deelende,

$$AZ = \frac{4\, m^6 - (m+h)^3 (m-h)(m^2 + h^2)}{6\, m^5 - 2m (m+h)^3 (m-h)}.$$

1°. *Gevolg.* Is de ellips de grootste, welke in het parabolisch segment beschreven kan worden, dan is $h = \tfrac{1}{3}\, m$ (zie voorgaande Voorstel) en voor dit geval hebben wij alzoo

$$AZ = \tfrac{818}{1035}\, m = \tfrac{818}{1035}\, AB.$$

2°. *Ge-*

(*) Men zie over den inhoud der ellipsoide onder andere de oplossing van Voorstel XXIV. 3e Gevolg.

2°. *Gevolg.* Stellen wij, *Fig.* 18, dat de twee raakpunten K en K′ zich in den top vereenigen, dan wordt de ellips de grootste onder alle ellipsen, die de parabool in den top en DD′ in D aanraken. Voor dit geval is $h = o$, en dus $CB = b = \frac{1}{2}m = \frac{1}{2}.AB$ en $CF = \frac{1}{2}\sqrt{mp} = \frac{1}{2}$ BD. De grootste der ellipsen, die den top en de koorde raakt, zonder de parabool te snijden, heeft dus de helft van de afsnijdende koorde DD′ tot as. Voor dit geval vinden wij voor het zwaartepunt van het uitgeholde ligchaam $AZ = \frac{3}{4}m = \frac{3}{4}AB$.

XXXIV. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK, JUN.

Van eenen driehoek is gegeven de som der n-de magten van de zijden, benevens twee der hoeken. Men vraagt hierdoor de drie zijden te bepalen?

OPGELOST *door* F. J. STAMKART, J. BASSAN, L. J. ULMAN, J. JONKHERT en A. B. DE BOCK, JUN.

OPLOSSING *van* F. J. STAMKART.

Stellen wij de onbekende zijden a, b en c en de overstaande hoeken A, B en C, dan mogen wij elk dezer hoeken als bekend beschouwen, omdat de derde gelijk is aan twee regte hoeken, verminderd met de som der twee gegevene hoeken. Daar nu uit de bekende eigenschap der driehoeken

$$a : Sin. A = b : Sin. B = c : Sin. C$$

is, zoo hebben wij ook

$$a^n : Sin^n. A = b^n : Sin^n. B = c^n : Sin^n. C,$$

waaruit wij trekken

$$a^n + b^n + c^n : Sin^n. A + Sin^n. B + Sin^n. C =$$
$$a^n : Sin^n. A = b^n : Sin^n. B = c^n : Sin^n. C,$$

en hieruit vinden wij verder,

$$a^n = \frac{a^n + b^n + c^n}{Sin^n.A + Sin^n.B + Sin^n.C} Sin^n.A,$$

$$b^n = \frac{a^n + b^n + c^n}{Sin^n.A + Sin^n.B + Sin^n.C} Sin^n.B,$$

$$c^n = \frac{a^n + b^n + c^n}{Sin^n.A + Sin^n.B + Sin^n.C} Sin^n.C,$$

zoo-

zoodat wij eindelijk vinden

$$a = Sin.\,A \times \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n + c^n}{Sin^n.A + Sin^n.B + Sin^n.C}},$$

$$b = Sin.\,B \times \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n + c^n}{Sin^n.A + Sin^n.B + Sin^n.C}},$$

$$c = Sin.\,C \times \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n + c^n}{Sin^n.A + Sin^n.B + Sin^n.C}}.$$

XXXV. VOORSTEL.

Door S. KLIJNSMA.

Een getal, uit drie cijferletters bestaande, heeft de volgende eigenschappen: 1°. de som van het eerste en derde cijfer is gelijk aan vijfmaal het middelste cijfer. 2°. Het product der uiterste cijfers is gelijk aan het cijfer der honderdtallen plus negenmaal dat der tientallen. 3°. Indien men het getal van achter naar voren schrijft, dan is het hierdoor ontstaande getal 198 *minder dan het gevraagde getal. Welk getal is dit?*

OPGELOST *door* S. KLIJNSMA, F. J. STAMKART, J. BASSAN, L. J. ULMAN en A. B. DE BOCK, JUN.

OPLOSSING *van* S. KLIJNSMA.

Stellen wij het getal voor door $100z + 10y + x$, dan zal het omgekeerde van dit getal worden uitgedrukt door $100x + 10y + z$, en het verschil dezer twee getallen is dus $99z - 99x$. Wij hebben alzoo, door de opgave van het vraagstuk:

$$x + z = 5y, \quad xz = z + 9y \quad \text{en} \quad z - x = 2.$$

Door de som en het verschil der eerste en derde vergelijking door 2 te deelen, vinden wij:

$$z = \tfrac{1}{2}(5y + 2) \quad \text{en} \quad x = \tfrac{1}{2}(5y - 2),$$

en substitueren wij deze waarden in de middelste vergelijking, dan komt er

$$\tfrac{1}{4}(25y^2 - 4) = \tfrac{1}{2}(5y + 2) + 9y,$$

of $$25y^2 - 4 = 46y + 4,$$

dat is $$25y^2 - 46y - 8 = 0,$$

waaruit $$y = 2 \quad \text{of} \quad y = -0{,}16.$$

De tweede waarde komt, als negatief zijnde, in ons geval niet in aanmerking. Wij hebben dus $y = 2$, $z = \frac{1}{2}(5y + 2) = 6$ en $x = \frac{1}{2}(5y - 2) = 4$, zoodat 624 het gevraagde getal is.

XXXVI. VOORSTEL.

Door S. KLIJNSMA.

Van eenen onregelmatigen vierhoek, waarin twee achtervolgende hoeken gelijk zijn, de vier zijden gegeven zijnde, vraagt men den inhoud te berekenen?

OPGELOST *door* F. J. STAMKART, S. KLIJNSMA en J. BASSAN.

OPLOSSING *van* F. J. STAMKART.

Laat ABCD, *Fig.* 19, de vierhoek wezen, waarin A en B de gelijke hoeken zijn, stellen wij AB $= a$, BC $= b$, CD $= c$ en DA $= d$, dan hebben wij, de gelijke, doch onbekende hoeken A en B gelijk ϕ stellende, DE $= d.\,Sin.\,\phi$, AE $= d$, CF $= b\ Sin.\ \phi$ en BF $= b\ Cos.\ \phi$, waardoor EF $= a - (b + d)\ Cos.\ \phi$. Hieruit volgt dan

Driehoek ADE $= \frac{1}{2}$ AE $\times$ ED $= \frac{1}{2}\, d^2\ Sin.\ \phi\ Cos.\ \phi$

Driehoek BCF $= \frac{1}{2}$ BF $\times$ FC $= \frac{1}{2}\, b^2\ Sin.\ \phi\ Cos.\ \phi$

en *Trap.* DEFC $= \frac{1}{2}$ EF (DE + CF) $= \frac{1}{2}(a - (b+d)\,Cos.\phi)(b+d)\,Sin.\phi$.

Deze drie uitdrukkingen te zamen tellende, verkrijgen wij alzoo voor den inhoud van den vierhoek

$$I = \tfrac{1}{2}(b^2+d^2)\,Sin.\,\phi\,Cos.\,\phi - \tfrac{1}{2}(b+d)^2\,Sin.\,\phi\,Cos.\,\phi + \tfrac{1}{2}a\,(b+d)\,Sin\ \phi,$$

hetwelk gemakkelijk herleidt wordt tot

$$I = (\tfrac{1}{2}a\ (b + d) - b\,d\ Cos.\ \phi)\ Sin.\ \phi \quad . . . (1)$$

en de inhoud zal dus gevonden zijn, zoodra wij den hoek ϕ kunnen bepalen.

Hiertoe merken wij op, dat CD de hypothenuza van eenen regthoekigen driehoek is, die EF en DE — CF tot regthoekszijden heeft. Wij hebben alzoo

$$EF^2 + (DE - CF)^2 = CD^2,$$

of $\quad (a - (b+d)\ Cos.\ \phi)^2 + (d-b)^2\ Sin^2.\,\phi = c^2,$

dat is $a^2 - 2a(b+d)Cos\ \phi + (b+d)^2 Cos^2\phi + (d-b)^2(1 - Cos^2.\,\phi) = c^2,$

hetgeen, ontwikkeld en volgens de magten van *Cos.* ϕ gerangschikt, geeft

$$4bd\ Cos^2.\phi - 2\,a\,(b+d)\ Cos.\phi = c^2 - a^2 - (d-b)^2 \,.. (2)$$

of $\quad Cos^2\,\phi - \dfrac{a\,(b+d)}{2\,bd}\ Cos.\,\phi = \dfrac{c^2 - a^2 - (d-b)^2}{4\,bd},$

uit welke vierkantsvergelijking gevonden wordt

$$Cos\ \phi = \frac{a\,(b+d) \pm \sqrt{\{a^2(b+d)^2 + 4bd(c^2 - a^2 - (d-b)^2)\}}}{4\,bd},$$

of

of, wat hetzelfde is,

$$Cos.\phi = \frac{a(b+d) \pm \sqrt{\{4bdc^2 + (b-d)^2(a^2-4bd)\}}}{4bd} \quad .. (3)$$

Hierdoor ϕ gevonden hebbende, zal dan (1) den inhoud doen kennen. Wij kunnen echter dezen inhoud op eene nog eenvoudiger wijze in ϕ uitdrukken; want daar uit (2) terstond volgt

$$\tfrac{1}{2}a(b+d)Cos.\phi - bd\,Cos^2.\phi = \frac{-c^2+a^2+(d-b)^2}{4},$$

of $$\tfrac{1}{2}a(b+d) - bd\,Cos.\phi = \frac{(d-b)^2+a^2-c^2}{4\,Cos.\phi},$$

zoo verkrijgen wij, door deze uitdrukking in (1) over te brengen,

$$I = \tfrac{1}{4}\{(d-b)^2 + a^2 - c^2\}\,Tang.\,\phi \quad . . . (4)$$

De formule (3) doet ons twee verschillende waarden voor $Cos.\,\phi$ kennen, en toont alzoo aan, dat de vierhoek onder de gegevene omstandigheden voor twee verschillende vormen vatbaar is. Wij hebben, om dit te bevestigen, de figuur 20 geteekend, waarin duidelijk zigtbaar is, dat de vierhoeken ABCD en ABC′D′ door dezelfde zijden bepaald worden, die in dezelfde rangorde op elkander volgen, en welke beide de hoeken op AB aan elkander gelijk hebben. Het is echter duidelijk in te zien, dat de formule (4) voor den tweeden vierhoek niet de som der driehoeken ABE en EC′D′, maar derzelver verschil zal aanwijzen, omdat in dit geval het trapezium DEFC als negatief moet worden beschouwd.

XXXVII. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Men vraagt of er veelhoekige getallen bestaan, die gelijk zijn aan derzelver wortels, en tevens aan het getal, dat den hoek der veelhoekige getallen voorstelt, en zoo ja, welke deze getallen zijn?

Opgelost door B. Lubbers, L. J. Ulman, J. Bassan en J. Jonkheert.

Oplossing van B. Lubbers.

Stellen wij het aantal der hoeken n en den wortel of de zijde gelijk x, dan is genoegzaam bekend, dat, y het overeenkomstig veelhoekig getal zijnde, hetzelve zal worden uitgedrukt door

$$y = \tfrac{1}{2}x\{(n-2)x - (n-4)\},$$

 en

en de vraag is dus niets anders, dan welke waarden aan deze vergelijking voldoen, ingevalle $x = y = n$ is. De vergelijking gaat hierdoor klaarblijkelijk over in

$$y = \frac{1}{2} y \left\{(y - 2) y - (y - 4)\right\},$$

of
$$2y = y (y^2 - 3y + 4),$$

dus
$$y (y^2 - 3y + 2) = 0,$$

dat is
$$y (y - 1) (y - 2) = 0,$$

aan welke vergelijking klaarblijkelijk voldaan wordt door te nemen $y = 0$, $y = 1$, of $y = 2$, zoodat 0, 1 en 2 de eenigſte getallen of uitdrukkingen zijn, welke behooren tot de veelhoeken door hen zelve aangewezen, en die tevens gelijk derzelver wortels zijn.

Het is eindelijk klaar, dat deze uitkomſten alleen ſtelkunſtig aan den aard van het vraagſtuk voldoen, daar het verſchijnſel, waaruit de veelhoekige getallen derzelver benaming ontleenen, dat is de eigenſchap, om op eene bepaalde wijze meetkunſtige figuren voor te ſtellen, hier geheel wegvalt.

XXXVIII. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Daar de veelhoekige getallen oorſpronkelijk uit de ſommering van rekenkunſtige reekſen ontſtaan, zoo zijn dezelve rekenkunſtige reekſen van den tweeden rang, en dus derzelver tweede verſchillen gelijk. Nu vraagt men, of er, ſchijnbaar, tegen dezen regel aan, geene reeks van veelhoekige getallen kan beſtaan, waarin reeds de eerſte verſchillen aan elkander gelijk zijn?

Opgelost *door* B. Lubbers, L. J. Ulman, J. Bassan en J. Jonkheert.

Oplossing *van* B. Lubbers.

Daar de algemeene formule voor de veelhoekige getallen is $\frac{1}{2} x \left\{(n - 2) x - (n - 4)\right\}$, zoo vinden wij, door $x = p$ en $x = p + 1$ te ſtellen, voor het p-de en $(p + 1)$-ſte n-hoekig getal

$$\frac{1}{2} p \left\{(n - 2) p - (n - 4)\right\},$$

en
$$\frac{1}{2} (p + 1) \left\{(n - 2) (p + 1) - (n - 4)\right\},$$

zoodat het verſchil tuſſchen deze twee achtervolgende n-hoekige getallen is:

$\frac{1}{2} p$

$\frac{1}{2} p (n - 2) + \frac{1}{2} (p + 1) (n - 2) - \frac{1}{2} (n - 4)$,

of $(n - 2) (p + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} (n - 4)$,

dat is $(n - 2) p + 1$.

Ingevolge de voorwaarde van het vraagſtuk, moet nu deze uitdrukking, welke waarde ook aan p gegeven wordt, ſtandvastig hetzelfde blijven, en dit kan geen plaats hebben, ten zij de coefficient van p, dat is $n - 2$, gelijk 0 is. Hieruit volgt dan $n = 2$, zoodat alleen de tweehoekige getallen, welke niet anders dan de achtervolgende geheele getallen zijn, aan het vraagſtuk kunnen voldoen. De formule $(n - 2) p + 1$ gaat, voor $n = 2$, over in 1, en toont dus mede aan, dat de veelhoekige getallen alsdan met de eenheid opklimmen.

XXXIX. VOORSTEL.

Door C. F. JULIUS.

Zeker jaargetal beſtaat uit vier cijferletters, welker ſom 14 bedraagt, en waarvan het vierkant der ſom van het eerſte en vierde cijfer gelijk is aan het product der twee middelſte cijfers. Trekt men dit getal af van deszelfs omgekeerde, dan is de rest mede een getal van vier cijfers, welke cijfers, van de linkerhand naar de regterhand voortgaande, eene opklimmende rekenkunſtige evenredigheid uitmaken. Verder is in het gevraagde getal en in de gezegde rest het eerſte cijfer, altijd van de linkerhand naar de regterhand rekenende, even groot. Ook komt het vierde cijfer van de rest overeen met het tweede cijfer van het jaartal. Vervolgens is het halve verſchil van het derde min het eerſte cijfer in de rest, gelijk het derde cijfer van het jaartal. Eindelijk is het vierde cijfer van het jaartal gelijk het product van het eerſte en tweede cijfer der rest, verminderd met dit eerſte cijfer. Welk jaargetal wordt hier bedoeld?

OPGELOST *door* C. F. JULIUS, F. J. STAMKART, J. BASSAN, L. J. ULMAN, A. B. DE BOCK. JUN. en J. JONKHEERT.

OPLOSSING *van* C. F. JULIUS.

Stellen wij het eerſte, tweede en derde cijfer van de rest gelijk x, y en z, dan zal het vierde zijn $y + z - x$, omdat me-

melijk deze vier cijfers eene rekenkunstige evenredigheid moeten uitmaken. Deze rest wordt alzoo uitgedrukt door

$$1000x + 100y + 10z + y + z - x,$$

of door $$999x + 101y + 11z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Door de voorwaarde van het vraagstuk volgt uit de gestelde waarden, dat het eerste cijfer van het jaartal gelijk x is; dat het tweede gelijk is aan $y + z - x$; dat het derde cijfer zal worden uitgedrukt door $\frac{1}{2}(z - x)$, terwijl eindelijk het vierde zal worden voorgesteld door $xy - x$. Het jaartal wordt dus uitgedrukt door

$$1000x + 100(y + z - x) + 10(\tfrac{1}{2}z - \tfrac{1}{2}x) + (xy - x);$$

of door $$894x + 100y + 105z + xy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Het omgekeerde van dit getal zal dus worden voorgesteld door

$$1000(xy - x) + 100(\tfrac{1}{2}z - \tfrac{1}{2}x) + 10(y + z - x) + x,$$

of door $$-1059x + 10y + 60z + 1000xy \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Trekken wij dus het getal van deszelfs omgekeerde, zoo blijft 'er voor de rest

$$999xy - 45z - 90y - 1953x,$$

en daar wij in (1) voor deze rest gevonden hebben

$$999x + 101y + 11z,$$

zoo verschaft ons dit de vergelijking

$$999xy - 1953x - 90y - 45z = 999x + 101y + 11z,$$

of $$999xy = 2952x + 191y + 56z \quad . \quad . \quad . \quad (I).$$

Daar wij voor de cijfers van het gevraagde getal vonden x, $y + z - x$, $\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}x$ en $xy - x$, en de som dezer cijfers gelijk 14 moet zijn, zoo hebben wij tot tweede vergelijking

$$-\tfrac{3}{2}x + y + \tfrac{3}{2}z + xy = 14,$$

of $$xy = 14 + \tfrac{3}{2}x - y - \tfrac{3}{2}z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II).$$

Eindelijk moet het vierkant der som van x en $xy - x$ gelijk zijn aan het product van $y + z - x$ en $\frac{1}{2}(z - x)$, zoodat wij tot derde vergelijking hebben

$$x^2y^2 = \tfrac{1}{2}(y + z - x)(z - x) \quad . \quad . \quad (III),$$

en wij zullen dus uit deze drie vergelijkingen de waarden van x, y en z moeten opmaken.

Zonderen wij uit (II) de waarde van y af, dan vinden wij

$$y = \frac{28 + 3x - 3z}{2(x + 1)},$$

en

en wanneer wij uit (I) de waarde van y afzonderen, zoo komt er

$$y = \frac{2952x + 56z}{999x - 191},$$

deze waarden van y aan elkander gelijk stellende, verkrijgen wij

$$\frac{28 + 3x - 3z}{2(x + 1)} = \frac{2952x + 56z}{999x - 191},$$

of $(28 - 3x)(999x - 191) - 3z(999x - 191) = 5904(x^2 + x) + 112(x + 1)z$,

dus $z(3109x - 461) = -2907x^2 + 21495x - 5348$,

zoodat $$z = \frac{-2907x^2 + 21495x - 5348}{3109x - 461},$$

hetgeen, in de waarde van y gesubstitueerd, na behoorlijke herleiding, geeft

$$y = \frac{32(282x + 49)}{3109x - 461}.$$

Brengen wij deze waarden van y en z over in de vergelijking (III), dan vinden wij eindelijk

$$\frac{1024x^2(282x + 49)^2}{(3109x - 461)^2} = \ldots\ldots$$

$$\frac{(-3008x^2 + 10978x - 2674)(-6016x^2 + 30980x - 3780)}{(3109x - 461)^2},$$

of met den gemeenen noemer vermenigvuldigende, en door 8 deelende,

$$128x^2(282x + 49)^2 = (-1504x^2 + 5489x - 1337)(-1504x^2 + 7745x - 945).$$

Het is klaar, dat deze vergelijking, ontwikkeld wordende, tot den vierden graad zal opklimmen, en met zeer groote coefficienten zal aangedaan wezen, hetgeen de benadering ten uiterste lastig zou maken. Zulks is echter in ons geval niet noodig; want daar x, om aan het vraagstuk te kunnen voldoen, een geheel positief getal en niet grooter dan 9 mag zijn, zal het veel gemakkelijker wezen, dadelijk te beproeven, of een der getallen 0, 1, 2, enz. tot 9 aan onze laatste vergelijking voldoet. Men ziet terstond, dat $x = 0$ niet voldoet, doch $x = 1$ nemende, geven beide leden 14023808. Wij hebben alzoo $x = 1$, en hieruit volgt $y = 4$ en $z = 5$. De cijfers van het gevraagde getal zijn dus $x = 1$, $y + z - x = 8$, $\frac{1}{2}(z - x) = 2$ en $xy - x = 3$, en het gevraagde jaartal is bijgevolg 1823.

Aanmerking. Wij hebben in deze oplossing alleen gebruik gemaakt van de voorwaarden, die in de opgaaf onmiddellijk werden gevorderd, omdat dezelve genoegzaam waren tot het vinden van het benoodigde aantal vergelijkingen. Door op te merken, dat elk der cijfers, zoo wel van de rest als van het gevraagde getal geheel en kleiner dan 9 of ten minste niet grooter dan 9 mag wezen, had men eene of meer der opgegevene voorwaarden kunnen missen, en de oplossing zou dan zelfs veel gemakkelijker afgeloopen zijn.

XL. VOORSTEL.

Door W. TOP, WZ.

De middellijn eens cirkels, beschreven in eenen regthoekigen driehoek, is gelijk aan de overmaat van de som der regthoekszijden boven de hypothenusa. Men vraagt deze stelling te bewijzen?

OPGELOST *door* W. TOP WZ., A. B. DE BOCK, JUN., L. J. ULMAN, F. J. STAMKART, J. BASSAN en J. JONKHEERT.

OPLOSSING *van* W. TOP WZ.

Zij ABC, *Fig.* 21, de regthoekige driehoek en F, G en E de raakpunten van den ingeschrevenen cirkel, dan is klaarblijkelijk CE = CG, AE = AF en BF = BG = DF = DG. Hieruit volgt dan

$$AB + BC - AC = AF + CG + 2\,DF - AE - EC = 2\,DF,$$

waardoor het gezegde bewezen is.

Men kan deze stelling ook geheel en al stelkunstig bewijzen. Stellen wij namelijk de regthoekszijden x en y, dan is de hypothenusa gelijk $\sqrt{(x^2 + y^2)}$ en dus de overmaat van de som der regthoekszijden boven de hypothenusa gelijk $x + y - \sqrt{(x^2 + y^2)}$.

Stellen wij verder den straal van den ingeschreven' cirkel r, dan is, omdat in elken driehoek de inhoud gelijk is aan den omtrek, vermenigvuldigd met den halven straal van den ingeschreven' cirkel,

$$\tfrac{1}{2}\,xy = (x + y + \sqrt{(x^2 + y^2)}) \times \tfrac{1}{2}\,r,$$

of

$$r = \frac{xy}{x + y + \sqrt{(x^2 + y^2)}},$$

of wanneer wij onder en boven met $x + y - \sqrt{(x^2 + y^2)}$ vermenigvuldigen,

$r =$

$$r = \frac{xy\,(x + y - \sqrt{(x^2 + y^2)})}{(x + y)^2 - (x^2 + y^2)},$$

of $$2r = \frac{2xy(x+y-\sqrt{(x^2-y^2)})}{2xy} = x+y-\sqrt{(x^2-y^2)},$$

waardoor dan nu het gezegde in het vraagſtuk ten duidelijkſte wordt aangetoond.

XLI. VOORSTEL.

Door F. J. STAMKART.

Wanneer men, door twee waargenomene hoogten van eenig hemellicht, benevens den tijd tusſchen de waarnemingen verloopen, de breedte van de plaats der waarneming wil bepalen, en dat men in deze berekening de verandering van declinatie verwaarloost, door dezelve voortdurend als ſtandvastig te beſchouwen, zoo kan de fout, die hierdoor in de uitkomst ontſtaat, de verandering der declinatie te boven gaan. Men vraagt naar eene, in de praktijk gemakkelijke formule, waardoor men, als de breedte te naasten bij bekend is, deze fout kan herſtellen?

OPGELOST *door* F. J. STAMKART en R. LOBATTO.

EERSTE OPLOSSING. *Door* F. J. STAMKART.

Laat, *Fig.* 22. *SEN* den horizont, *Z* het zenith, en *P* de pool verbeelden. Zij $aA = h$ de eerſte en $bB = h'$ de tweede der waargenomene hoogten. Laat voorts $H = PN$ de benaderde of gegiste poolshoogte zijn, en ſtellen wij $D = 90° - aP$ de declinatie van het hemellicht bij de eerſte en $D' = 90° - bP$ de declinatie bij de tweede waarneming, terwijl wij den hoek $TBb = P$ ſtellen. Nemen wij eindelijk aan, dat de declinatie noordelijk zij, zoodat het ligchaam tot de noordpool nadert, alsdan is $bb' = D' - D$ het verſchil in of de verandering van declinatie.

Welke der bekende methoden men nu ook gebezigd mag hebben, om uit de twee waargenomene hoogten en den verloopenen tijd de benaderde poolshoogte H te berekenen, is de fout, welke men hierbij begaan heeft, eigenlijk hierin gelegen, dat men de hoogte bB of h' in rekening heeft gebragt, even alsof de declinatie niet veranderd was. In dit geval zou echter, niet bB, maar $b'B'$, de tweede hoogte zijn geweest, waaruit dan volgt, dat indien wij uit onze gegevens de waarde van $b'B' = h_1'$

 kun-

om de kleinste, dan wel de grootste der waargenomene hoogten te herleiden, en alsdan te nemen

$$Sin.\ h_1 = Sin.\ h + \frac{Sin.\ H \times Sin\ \Delta D}{Cos.\ D}.$$

De reden hiervan is gemakkelijk in te zien; want stellende $(1 - \frac{Cos.\ D'}{Cos.\ D})\ Sin.\ h = A$ en $(1 - \frac{Cos.\ D}{Cos.\ D'})\ Sin.\ h' = B$, dan hebben wij

$$B = -(1 - \frac{Cos.\ D'}{Cos.\ D}) \times \frac{Cos.\ D}{Cos.\ D'}\ Sin.\ h' = -A \times \frac{Cos.\ D}{Cos\ D'} \times \frac{Sin.\ h'}{Sin.\ h},$$

daar nu $D' > D$ en $h' > h$ is, zoo is $Cos.\ D > Cos.\ D'$ en $Sin.\ h' > Sin.\ h$, zoodat $\frac{Cos.\ D\ \ Sin.\ h'}{Cos.\ D'\ Sin.\ h} > 1$ en dus, niet op de teekens lettende, $B > A$.

3°. Aanmerking. Wij hebben gezegd, dat bij zonshoogten $1 - \frac{Cos.\ D'}{Cos.\ D}$ altijd klein zal zijn. Om dit te doen zien, zullen wij trachten te onderzoeken, welke de grootste waarde is, die deze uitdrukking verkrijgen kan. Stellen wij hiertoe de zonslengte L en de helling van de elliptica tot den aequator W, dan is

$$Sin.\ D = Sin.\ W\ Sin.\ L;$$

stellen wij nu, dat de lengte eene standvastige verandering ΔL ondergaat, waarmede de verandering in declinatie ΔD overeenstemt, dan zullen wij moeten onderzoeken, voor welke waarde van L de waarde van $1 - \frac{Cos.\ D'}{Cos.\ D}$ of $1 - \frac{Cos.\ (D + \Delta D)}{Cos.\ D}$ een maximum wordt.

Nu is $\quad Sin.(D + \Delta D) = Sin.\ W\ Sin.(L + \Delta L),$
dit ontwikkeld en in aanmerking nemende, dat ΔL en ΔD zeer klein ondersteld wordende, $Sin.\ \Delta D = \Delta D$ en $Cos.\ \Delta D = 1$ kan worden gesteld, en even zoo voor ΔL, dan komt er

$$Sin.\ D + Cos.\ D\ .\ \Delta D = Sin.\ W\ (Sin.\ L + Cos.\ L\ .\ \Delta L),$$

zoodat, hiervan $Sin.\ D = Sin.\ W\ .\ Sin.\ L$ aftrekkende,

$$Cos.\ D\ .\ \Delta D = Sin.\ W\ Cos.\ L\ .\ \Delta L,$$

waaruit $$\Delta D = \frac{Sin.\ W\ Cos.\ L\ .\ \Delta L}{Cos\ D} \quad .\ .\ .\ .\ .\ (a)$$

Daar

Daar verder, $D' = D + \Delta D$ zijnde,

$$Cos. D' = Cos. (D + \Delta D) = Cos. D - Sin. D . \Delta D,$$

is, zoo hebben wij

$$\frac{Cos. D'}{Cos. D} = \frac{Cos. D - Sin. D . \Delta D}{Cos. D} = 1 - Tang. D . \Delta D,$$

en hierin de waarde van ΔD uit (a) overbrengende,

$$\frac{Cos. D'}{Cos. D} = 1 - Tang. D . \frac{Sin. W}{Cos. D} Cos. L . \Delta L = 1 - \frac{Sin. D Sin. W}{Cos^2. D} Cos. L . \Delta L,$$

brengende eindelijk hierin voor D derzelver waarde over, namelijk $Sin. D = Sin. W \times Sin. L$, dan komt er

$$\frac{Cos. D'}{Cos. D} = 1 - Sin^2 W \times \frac{Sin\ L\ Cos. L}{1 - Sin^2. W\ Sin^2. L} . \Delta L,$$

en $$1 - \frac{Cos. D'}{Cos. D} = Sin^2. W . \Delta L \times \frac{Sin. L\ Cos. L}{1 - Sin^2\ W\ Sin^2\ L}.$$

Daar wij nu ΔL als eene standvastige grootheid aannemen en W tevens standvastig is, zal $1 - \frac{Cos. D'}{Cos. D}$ de grootste waarde verkrijgen, wanneer

$$x = \frac{Sin\ L\ Cos. L}{1 - Sin^2\ W . Sin^2. L},$$

een maximum is. Stellen wij dan $\frac{\delta x}{\delta L} = 0$, dan is

$$(1 - Sin^2. W Sin^2. L)(Cos^2. L - Sin^2. L) + 2 Sin^2. W Sin^2. L\ Cos^2. L = 0,$$

of $$Cos^2\ L - Sin^2. L + Sin^2. W\ Sin^4. L + Sin^2. W\ Sin^2. L Cos^2. L = 0,$$

dat is, wanneer wij $1 - Sin^2. L$ in plaats van $Cos^2. L$ schrijven,

$$1 - 2\ Sin^2. L + Sin^2. W\ Sin^4. L + Sin^2. W\ Sin^2. L - Sin^2. W\ Sin^4. L = 0,$$

of $$1 - 2 Sin^2. L + Sin^2. W\ Sin^2. L = 0,$$

waaruit $$Sin. L = \frac{1}{\sqrt{(2 - Sin^2. W)}},$$

en dus $$Sin. D = \frac{Sin. W}{\sqrt{(2 - Sin^2. W)}}.$$

Daar nu te naasten bij $W = 23°28'$ is, zoo vindt men, dat de grootste waarde van $1 - \frac{Cos. D'}{Cos. D}$ plaats zal hebben voor $L = 47°28'$ en dus voor $D = 17°14'$.

Stelt men nu $\Delta D = 4'$, zijnde dit de verandering in declinatie, welke de zon, op $47°28'$ lengte gekomen zijnde, in om-

omtrent 6 uren ondergaat, zoo vindt men $1 - \frac{Cos. D'}{Cos. D} = 0,0003580$. Bedraagt alzoo de kleinste der twee waargenomene hoogten minder dan 35°, dan kan de fout, die door het verwaarloozen, van $(1 - \frac{Cos. D'}{Cos. D})$ *Sin. h* ontstaat, in geen geval 1′ te boven gaan.

TWEEDE OPLOSSING. *Door* R. LOBATTO.

Wij onderstellen, dat, *Fig.* 23, T het toppunt, P de pool, Z de eerste en Z′ de tweede zonsplaats is, en dat de zonshoogten beiden voor den middag en dus aan dezelfde zijde van de meridiaan zijn waargenomen. Voorts nemen wij aan, dat de declinatie wassende en met de breedte gelijknamig is. — Door nu bij de berekeningen de middelbare declinatie als standvastig te beschouwen, zal men niet het ware punt P, maar een ander punt P′ als pool verkrijgen, zoodanig, dat deze declinatie D stellende, en de hieruit ontstane fout $\triangle$ D noemende, men zal hebben $ZP' = Z'P'$, $\frac{1}{2}(ZP + Z'P) = 90° - D$, $ZP = ZP' + \triangle D$ en $Z'P = Z'P' - \triangle D$.

Noemen wij verder het tijdsverloop tusschen de waarnemingen in graden $2p$, den grootsten uurhoek u en den kleinsten u', dan is $p = \frac{1}{2}(u - u')$. Daar eindelijk TP het ware en TP′ het gevonden complement van de breedte is, zoo is, wanneer wij de gevondene breedte B stellen, $TP' = 90° - B$; beschrijft men dus uit T met de koorde van TP een cirkelboogje Pt, dan is $tP' = TP' - TP = (90° - B) - (90° - (B + \triangle B)) = \triangle B$.

Men beschrijve voorts uit Z met de koorde van ZP een cirkelboogje Pq, dan zal men, daar $\triangle$ D en $\triangle$ B zeer klein ondersteld worden, de driehoekjes $PP't$ en $PP'q$ als regtlijnig en regthoekig mogen aanmerken, en wel het eerste in t en het tweede in q, terwijl men verder heeft $P'q = PZ - P'Z = \triangle D$, $P't = \triangle B$, en daar Pt loodregt op TP en Pq loodregt op ZP staat, $\angle tPq = \angle TPZ = u$.

Nu is in het driehoekje $PP't$

$$P't = PP' \times Sin. P'Pt = PP' \times Sin. (tPq - P'Pq),$$

of

$$\triangle B = PP' \times Sin. (u - P'Pq)$$

$$= PP' \times (Sin. u \times Cos. P'Pq - Cos. u \, Sin. P'Pq).$$

Maar

Maar uit het driehoekje PP′q hebben wij

$PP' Cos. P'Pq = Pq = Sin. PZ \times Sin. PZP' = Cos. D . Sin. PZP'$

en $PP'. Sin. P'Pq = P'q = \Delta D$,

waardoor de voorgaande vergelijking overgaat in

$$\Delta B = Cos. D\ Sin. u\ Sin. PZP' - Cos. u . \Delta D \ldots (\alpha)$$

welke vergelijking de betrekking bevat tusschen de fouten, welke in den driehoek TZP′ ontstaan.

Op dezelfde wijze nu zal voor den driehoek TZ′P′, waarin △ D negatief moet genomen worden, de volgende vergelijking plaats hebben:

$$\Delta B = Cos. D\ Sin. u'\ Sin. PZ'P' + Cos. u' . \Delta D \ldots (\beta)$$

Vermenigvuldigen wij (α) met $Sin. u'$ en (β) met $Sin. u$, dan zal na aftrekking, en aangezien ∠ PZP′ = ∠ PZ′B′ gesteld mag worden, gevonden worden:

$$\Delta B \{Sin. u - Sin. u'\} = \Delta D \{Sin. u\ Cos. u' + Sin. u'\ Cos. u\}$$

dus $\Delta B = \Delta D \times \dfrac{Sin. (u + u')}{Sin. u - Sin. u'} = \dfrac{Sin. \frac{1}{2}(u + u')}{Sin. \frac{1}{2}(u - u')} \times \Delta D$,

dat is $\Delta B = \dfrac{Sin. \frac{1}{2}(u + u')}{Sin\ p} \times \Delta D$,

eene formule, waardoor de correctie der breedte gemakkelijk kan berekend worden, wanneer de uurhoeken uit de ten naasten bij bekende breedte gevonden zijn. In de oplossing van het volgende vraagstuk zullen wij deze formule in eene andere veranderen, waarbij de kennis der uurhoeken niet ondersteld wordt, en dezelve tevens op een voorbeeld toepassen.

Naardemaal nu deze correctie zoo wel positief als negatief kan zijn, zoo merken wij hieromtrent het volgende aan, hetgeen tevens tot eenen regel in de praktijk kan verstrekken. — Bij eene wassende declinatie, en zoo lang de waarnemingen beide voor den middag geschied zijn, zal de correctie altijd positief wezen, terwijl, ingeval de waarnemingen na den middag geschied zijn, waardoor u en u' negatief worden, doch $p = \frac{1}{2}(u' - u)$ positief blijft, de correctie negatief zal wezen. Hebben echter de waarnemingen aan verschillende kanten van de meridiaan plaats gehad, zoo wordt $p = \dfrac{u + u'}{2}$ en dus positief, en de correctie zal positief of negatief wezen, naarmate $u >$ of $< u'$ is, dat is,

naar

naarmate de uurhoek, bij de eerste waarneming, grooter of kleiner dan bij de tweede zal geweest zijn. Het spreekt van zelf, dat bij eene afnemende declinatie al het voorgaande omgekeerd zal moeten worden verstaan.

XLII. VOORSTEL.

Door F. J. STAMKART.

Daar het genoegzaam bekend is, dat men uit twee waargenomene hoogten van eenig hemellicht, benevens den verloopenen tijd, twee verschillende breedten vindt, en dat het op zee in sommige gevallen onzeker zijn kan, welke van beide men te kiezen hebbe, zoo wordt er gevraagd naar eene handelwijze, welke deze onzekerheid doet ophouden?

OPGELOST *door* F. J. STAMKART en R. LOBATTO.

EERSTE OPLOSSING. *Door* F. J. STAMKART.

Dat de breedte, welke men uit twee waargenomene hoogten, benevens den verloopenen tijd berekent, voor twee onderscheidene waarden vatbaar is, kan men zeer gemakkelijk op de volgende wijze aantoonen. Zij, *Fig.* 24, P de pool en *a* en *b* de zonsplaats bij de twee waarnemingen, waarbij wij de declinatie onveranderd onderstellen, dan zijn P*b* en P*a*, als de complementen der declinatie, bekend; terwijl hoek *b*P*a*, den waargenomenen tijd uitdrukkende, mede gegeven is; zoodanig, dat wij de punten *a* en *b* als twee punten kunnen beschouwen, die op den bol in stelling gegeven zijn. Is nu T de top, dan zijn de bogen T*a* en T*b*, als de complementen der waargenomene hoogten, mede gegeven, zoodat het geheele problema, ter bepaling van de breedte uit twee waargenomene hoogten, zuiver meetkunstig hierop nederkomt. *Twee punten a en b op eenen bol gegeven zijnde, vraagt men een punt T op den bol te vinden, dat van a en b op een gegeven aantal graden verwijderd is.* Hieruit volgt dan, dat men dit vraagstuk meetkunstig op de volgende wijze kan construeren. Beschrijf uit *b* en *a* met stralen gelijk de koorden van de complementen der waargenomene hoogten kleine cirkels op den bol, derzelver doorsnijding zal den top T en dus het complement PT van de begeerde poolshoogte doen kennen. Daar eindelijk twee kleine cirkels op den bol elkander in twee verschillende punten T en *t* snijden, zoo wordt het allerduidelijkst

lijkst

lijkt dat het problema voor twee oplossingen vatbaar is, die beide door onze constructie gevonden worden.

Kent men nu volstrekt niets anders dan de twee waargenomene hoogten met den verloopen' tijd, dan is er geene reden hoegenaamd, om aan het punt T boven het andere de voorkeur te geven, en hieruit wordt het dan ook duidelijk, dat men ten opzigte der *ware* poolshoogte uit deze methode *alleen* niets besluiten kan, zoodat men hiertoe in dit geval ten minste nog eene waarneming zal behoeven, ten einde deze onzekerheid te doen ophouden.

Wij onderstellen, dat men nog eene hoogte met den tijd tusschen deze en eene der twee overige hoogten heeft waargenomen, en dan houdt alle onzekerheid op. Laat namelijk T*c* deze derde hoogte zijn, en uit *c* met de koorde van het complement dezer derde hoogte een cirkelboog beschreven worden, dan zal dezelve, T het ware toppunt zijnde, wel door het punt T, maar niet door het punt *t* gaan; want dit laatste zou klaarblijkelijk plaats hebben, wanneer *bca* de boog van eenen grooten cirkel des hols was, en moet dus ophouden, wanneer *bca* de boog van eenen kleinen cirkel is, hetgeen hier werkelijk plaats heeft. Beschrijft men dan nu al de gezegde cirkelbogen, dan zullen dezelve boven *abc* elkander in één punt T, en beneden *abc* in drie punten *t*, *t'* en *t''* snijden, en T zal alsdan de ware top en TP het complement van de ware breedte zijn.

Bij de onderstelling van drie waargenomene hoogten met de verloopene tijden, kan men alzoo de ware breedte op deze wijze berekenen. Men berekene de breedte uit de eerste en tweede waarneming, dit geeft twee antwoorden, die wij H en H' zullen noemen. Nu berekene men de breedte uit de eerste en derde waarneming, dit geeft wederom twee waarden H en H'', waarvan er eene met eene der voorgaande zal overeenkomen, en dit zal dan de ware breedte zijn.

Men zal zelfs uit deze drie hoogten eene formule voor de poolshoogte kunnen vinden, die dezelve onmiddellijk doet vinden en aan geene dubbelzinnigheid meer onderhevig is. Stellen wij namelijk de declinatie onveranderd gelijk D, de drie waargenomene hoogten, h, h' en h'', den hoek TPb $=$ x, de hoeken

 bPc $=$

$bPc = \alpha$ en $bPa = \beta$, en de gevraagde breedte H, dan is in de driehoeken TPb, TPc en TPa

$$Sin. h = Cos. x\ Cos. H\ Cos. D + Sin. H\ Sin. D$$
$$Sin. h' = Cos. (x+\alpha)\ Cos. H\ Cos. D + Sin. H\ Sin. D$$
$$Sin. h'' = Cos. (x+\beta)\ Cos. H\ Cos. D + Sin. H\ Sin. D;$$

deze van elkander aftrekkende, blijft er

$$Sin. h - Sin. h' = Cos. H\ Cos. D \{Cos. x - Cos. (x+\alpha)\},$$
$$Sin. h - Sin. h'' = Cos. H\ Cos. D \{Cos. x - Cos. (x+\beta)\},$$

en deze door elkander deelende, verkrijgen wij

$$\frac{Cos. x - Cos. (x+\alpha)}{Cos. x - Cos. (x+\beta)} = \frac{Sin. h - Sin. h'}{Sin. h - Sin. h''} = \frac{Cos. \tfrac{1}{2}(h+h')\ Sin. \tfrac{1}{2}(h-h')}{Cos. \tfrac{1}{2}(h+h'')\ Sin. \tfrac{1}{2}(h-h'')}$$

of het eerste lid ontwikkelende, en kortheidshalve de bekende grootheid

$$\frac{Cos. \tfrac{1}{2}(h+h')\ Sin. \tfrac{1}{2}(h-h')}{Cos. \tfrac{1}{2}(h+h'')\ Sin. \tfrac{1}{2}(h-h'')} = M,$$

stellende,

$$\frac{1 - Cos. \alpha + Sin. \alpha\ Tang. x}{1 - Cos. \beta + Sin. \beta\ Tang. x} = M,$$

en hieruit $Tang. x$ oplossende, vinden wij voor den uurhoek

$$Tang. x = 2 \times \frac{Sin^2. \tfrac{1}{2}\alpha - M\ Sin^2. \tfrac{1}{2}\beta}{M\ Sin. \beta - Sin. \alpha},$$

ten opzigte van welken hoek, daar dezelve door de tangens gevonden wordt, geene dubbelzinnigheid meer kan plaats hebben.

Door deze vergelijking den uurhoek x gevonden hebbende, hebben wij verder, door de twee eerste vergelijkingen,

$$\frac{Sin. h}{Sin. h'} = \frac{Cos. x\ Cos. H\ Cos. D + Sin. H\ Sin. D}{Cos. (x+\alpha)\ Cos. H\ Cos. D + Sin. H\ Sin. D},$$

of

$$\frac{Sin. h}{Sin. h'} = \frac{Cos. x + Tang. H\ Tang. D}{Cos. (x+\alpha) + Tang. H\ Tang. D},$$

en hieruit $Tang.$ H oplossende, vinden wij voor de breedte

$$Tang. H = \frac{Cos. x\ Sin. h' - Cos. (x+\alpha)\ Sin. h}{Tang. D\ (Sin. h - Sin. h')},$$

en daar er ten opzigte van dezen hoek mede geene twijfelachtigheid kan bestaan, zoo volgt hieruit, dat de ware breedte zal worden gevonden door het volgende stelsel van vergelijkingen.

$$1°.\quad M = \frac{Cos.\frac{1}{2}(h+h')\,Sin.\frac{1}{2}(h-h')}{Cos.\frac{1}{2}(h+h'')\,Sin.\frac{1}{2}(h-h'')},$$

$$2°.\quad Tang.\,x = 2 \times \frac{Sin^2.\frac{1}{2}\alpha - M\,Sin^2.\frac{1}{2}\beta}{M\,Sin\,\beta - Sin.\alpha},$$

$$3°.\quad Tang.\,H = \frac{Cos.x\,Sin.h' - Cos.(x+\alpha)\,Sin.h}{Tang.D(Sin.h - Sin.h')}.$$

Zoodat wij deze formulen als eene nieuwe methode voor de buiten-middagsbreedte uit drie waarnemingen kunnen beschouwen, bij welke geene dubbelzinnigheid hoegenaamd bestaat.

Daar wij bij deze oplossing de declinatie als onveranderd beschouwd hebben, kan men dezelve ingevolge het gezegde van het voorgaande voorstel verbeteren.

TWEEDE OPLOSSING. *Door* R. LOBATTO.

Het vinden der breedte door twee waargenomene zonshoogten buiten den middag, komt in eenen meetkunstigen zin op het volgende problema neder. *Gegeven zijnde twee punten Z en Z', Fig. 25, op eenen bol, vraagt men een derde punt T op den bol te vinden, hetwelk op bepaalde afstanden van de twee gegevene punten is gelegen.* Dit derde punt nu zal altijd op tweederlei wijzen ten opzigte van de gegevene punten gelegen kunnen zijn, en er bestaat dus eigenlijk gezegd volstrekt geen regel, om zonder andere hulpmiddelen te bepalen, welk punt men kiezen moet. Met betrekking tot de sterre- of zeevaartkunde, nogtans, kan het niet twijfelachtig wezen hieromtrent eene keuze te doen, vermits er behalve dien altijd andere omstandigheden bekend zijn, zoo als de gegiste breedte, de tijd, of de kennis van het halfrond, waarop men zich bevindt, met behulp van welke de onzekerheid in de keuze der breedte dadelijk moet ophouden. Daar alzoo hieromtrent nimmer eenige twijfel kan bestaan, zouden wij het zoeken van eenen regel dienaangaande voor geheel overbodig houden, ware het niet, dat hierdoor aan den zeeman, in verre weg de meeste gevallen, de moeite van het berekenen der twee breedten kan worden bespaard, waaruit hij kiezen moet. Het is om dit te doen zien, dat wij de volgende nieuwe oplossing van het vraagstuk der buiten-middagsbreedte kortelijk zullen voordragen.

Laat Z en Z' de twee zonsplaatsen, T het gevraagde toppunt,

punt, P de pool verbeelden, en onderstellen wij, dat men zich op eene met de zonsdeclinatie gelijknamige breedte bevindt. Zij H de grootste en h de kleinste zonshoogte, $2p$ de verloopene tijd in graden, $x + p$ de uurhoek bij de eerste en $x - p$ de uurhoek bij de tweede waarneming. Noemen wij de breedte B en de gemiddelde declinatie D, welke wij gedurende het tijdsverloop der waarnemingen als standvastig beschouwen, dan geven ons de bolvormige driehoeken PTZ en PTZ'

$$\text{Sin. H} = \text{Cos. B Cos. D Cos.} (x - p) + \text{Sin. B Sin. D} \quad \ldots (1)$$

$$\text{Sin. } h = \text{Cos. B Cos. D Cos.} (x + p) + \text{Sin. B Sin. D} \quad \ldots (2)$$

door optelling en aftrekking dezer vergelijkingen vindt men

$$\text{Sin. H} + \text{Sin. } h = 2 \text{ Cos. B Cos. D Cos.} p \text{ Cos.} x + 2 \text{ Sin. B Sin. D},$$

en $$\text{Sin. H} - \text{Sin. } h = 2 \text{ Cos. B Cos. D Sin.} p \text{ Sin.} x,$$

welke vergelijkingen ook onder de volgende gedaante kunnen worden geschreven:

$$\frac{\text{Sin.} \frac{1}{2}(\text{H}+h) \text{ Cos.} \frac{1}{2}(\text{H}-h)}{\text{Cos.} p \text{ Cos. D}} = \text{Cos. B Cos.} x + \frac{\text{Sin. B Tang. D}}{\text{Cos.} p} \quad (3)$$

en $$\frac{\text{Sin.} \frac{1}{2}(\text{H}-h) \text{ Cos.} \frac{1}{2}(\text{H}+h)}{\text{Sin.} p. \text{ Cos. D}} = \text{Cos. B Sin.} x \quad \ldots (4)$$

Het eerste lid dezer laatste vergelijking eene bekende grootheid zijnde, zoo stellen wij hetzelve gelijk Sin. a, en dan wordt

$$\text{Cos. B Sin.} x = \text{Sin.} a \qquad \text{of} \qquad \text{Sin.} x = \frac{\text{Sin.} a}{\text{Cos. B}},$$

waardoor

$$\text{Cos. B Cos.} x = \sqrt{\{\text{Cos}^2. \text{B} - \text{Sin}^2. a\}} = \sqrt{\{\text{Cos}^2. a - \text{Sin}^2. \text{B}\}},$$

en hierdoor gaat (3) over in

$$\frac{\text{Sin.} \frac{1}{2}(\text{H}+h) \text{ Cos.} \frac{1}{2}(\text{H}-h)}{\text{Cos.} p \text{ Cos. D}} = \sqrt{(\text{Cos}^2. a - \text{Sin}^2. \text{B})} + \text{Sin. B} \frac{\text{Tang. D}}{\text{Cos } p}$$

Om nu hieruit de waarde van B op eene, voor de berekening door logarithmen geschikte wijze op te maken, zoo stellen wij

$$\frac{\text{Tang. D}}{\text{Cos.} p} = \text{Cot } \mu \qquad \text{en} \qquad \text{Sin. B} = \text{Cos.} a \text{ Cos.} \phi,$$

zijnde alzoo μ en ϕ twee hulphoeken, en dan verkrijgen wij terstond, na door Cos. a gedeeld te hebben,

$$\frac{\text{Sin} \frac{1}{2}(\text{H}+h) \text{ Cos} \frac{1}{2}(\text{H}-h)}{\text{Cos.} a \text{ Cos.} p \text{ Cos. D}} = \text{Sin.} \phi + \text{Cos.} \phi \text{ Cot.} \mu = \frac{\text{Cos.} (\phi - \mu)}{\text{Sin.} \mu},$$

waar-

waaruit $Cos.(\phi-\mu)=\frac{Sin.\mu\times Sin.\frac{1}{2}(H+h).Cos.\frac{1}{2}(H-h)}{Cos.a.Cos.p\,Cos.D}$.

Men heeft alzoo ter berekening van B het volgende stelsel van vergelijkingen:

1°. $Sin.\ a=\frac{Sin.\frac{1}{2}(H-h)\,Cos\ \frac{1}{2}(H+h)}{Cos.D.Sin.p}$,

2°. $Tang.\ \mu=Cos.\ p\times Cot\ D$,

3°. $Cos.(\phi-\mu)=\frac{Sin.\mu\ Sin.\frac{1}{2}(H+h)\ Cos.\frac{1}{2}(H-h)}{Cos\ a\ Cos.p\ Cos.D}$,

4°. $\phi=\mu\pm(\phi-\mu)$,

5°. $Sin.\ B=Cos.\ a\ Cos.\ \phi$,

waardoor men tevens, naar behooren, twee verschillende waarden voor B verkrijgt.

De bedoelde regel voor de keuze der twee breedten laat zich nu gemakkelijk uit de voorgaande formulen afleiden. Immers, de declinatie steeds als positief beschouwende, zal bij eene met dezelve gelijknamige breedte, *Sin.* B positief en dus, daar *Cos. a* positief is, *Cos.* ϕ positief en dus $\phi<90°$ moeten zijn, in welk geval derhalve de hoek ϕ, die grooter dan 90° is, behoort verworpen te worden, daar integendeel bij eene met de declinatie ongelijknamige breedte alleen deze laatste waarde van ϕ moet behouden worden. Zijn echter de beide waarden van ϕ grooter of kleiner dan 90°, dan behoort de keuze der breedte, hetzij door berekening van den uurhoek, hetzij door de gegiste breedte, te worden bepaald. Ingeval nogtans de gegiste breedte evenveel van de twee waarden van B verschilt, dan kan alleen het eerste hulpmiddel te baat worden genomen.

De breedte eens gevonden zijnde, laten zich de uurhoeken hierdoor zeer gemakkelijk berekenen. Immers is uit de vergelijking (4) terstond $Sin.\ x=\frac{Sin.\ a}{Cos.\ B}$, en dus, de uurhoeken u en u' stellende, $u=x+p$ en $u'=x-p$.

Brengen wij de gevondene uitdrukkingen voor de uurhoeken over in de formule, welke wij in het voorgaande vraagstuk (2e *Oplossing*) voor de verbetering der breedte gevonden hebben, dan verandert dezelve in

$$\Delta B=\frac{Sin.\ x}{Sin.\ p}.\Delta D=\frac{Sin.\ a}{Cos.\ B\ Sin.\ p}.\Delta D,$$

waarin nu de uurhoeken niet meer voorkomen, en welke zeer gemakkelijk in de practijk is, vermits de waarden van *Sin.* a en *Sin.* p in den loop der berekening van B reeds zijn voorgekomen. Wij zullen dit een en ander op het volgende voorbeeld toepassen, getrokken uit de *astronomie nautique* van DE ROSSEL, *pag.* 71, en te vinden achter het 3e deel der *Traité d'astronomie physique* van BIOT.

Stel dat men, op noorderbreedte zijnde, te 6u 46′, *de ware zons-middelpunts-hoogte* 21°47′56″ *en voorts te* 11u 12′36″, *deze hoogte* 65°29′50″ *bevonden hebbe, op een tijdstip, dat de zon bij de eerste waarneming* 21°11′55″ *en bij de tweede*, 21°10′ *noordelijke declinatie had. Vrage naar de breedte.*

In dit geval hebben wij H = 65°29′50″, h = 21°47′56″, $2p$ = 15 (4u 26′36″) = 66°39′, of p = 33°19′30″, D = $\frac{1}{2}$ (21°11′55″ + 21°10) = 21°10′57″, en de berekening kan verder op de volgende wijze worden ingerigt.

H = 65°59′50″
h = 21°47′56″

p = 33°19′30″
D = 21°10′57″

som. en vc. sch.	*de helft is*
87°17′46″	43°39′
43°41′54″	21°51′

Log. Cos. = 9,9219817
Log. Cot. = 0,4116837

L. Tang. μ = 0,3336654
μ = 65° 7′ 5″
$\mu - \phi = \pm$ 28°43′40″

ϕ = 36°23′25″
of ϕ = 93°50′45″

de grootste waarde van ϕ *moet vervallen, vermits B positief behoort te zijn.*

L. Cos. = 9,8594804
L. Sin. = 9,5707506
C. L. Sin. = 0,2601213
C. L. Cos. = 0,0303842

L. Sin. a = 9,7207365

L. Cos. a = 9,9297681

L. Cos. ϕ = 9,9057851

L. Sin. B = 9,8355532
B = 43°13′

L. Sin. = 9,8390072
L. Cos. = 9,9676235
C. L. Cos. = 0,0780183
C. L. Cos. = 0,0303842
L. Sin. μ = 9,9576870
C. L. Cos. a = 0,0702319

L. Cos. $(\mu - \phi)$ = 9,9429581
$\mu - \phi = \pm$ 28°43′40″

Het

Het blijkt, dat deze handelwijze niet meer dan het zoeken van 13 logarithmen vordert, waaronder er nog 6 voorkomen, welke twee aan twee op dezelfde bladzijde der tafels gevonden worden.

Om de correctie te berekenen heeft men $\Delta D = -57''$, vermits de declinatie afnemende is, en dit geeft

$$\begin{aligned} Log.\ \Delta D &= 1,7481880, \\ Log.\ Sin.\ a &= 9,7297365, \\ Comp.\ Log.\ Sin.\ p &= 0,2601213, \\ Comp.\ Log.\ Cos.\ B &= 0,1374098, \\ \hline Log.\ \Delta B &= 1,8664556, \\ \Delta B &= -73''5 \text{ of } -1'13''5, \end{aligned}$$

dus is de ware breedte $43°11'46''5$.

De formule voor de uurhoeken $Sin.\ x = \frac{Sin.\ a}{Cos.\ B}$ geeft de volgende berekening

$$\begin{aligned} Log.\ Sin.\ a &= 9,7207365, \\ Comp.\ Log.\ Cos.\ B &= 0,1374098, \\ \hline Log.\ Sin.\ x &= 9,8581463, \\ x &= 46°\ 9'55'' \\ p &= 33°19'30'' \\ \hline u = x + p &= 79°29'25'' = 5^u\,17'57'' \\ u = x - p &= 12°50'25'' = 0^u\,51'21', \end{aligned}$$

zoodat de eerste waarneming is geschied te $6^u\,42'3''$ en de tweede te $11^u\,8'39''$, en het horlogie ging dus $3'57''$ voor.

XLIII. VOORSTEL.

Door R. Lobatto.

Indien men uit een der hoekpunten C, Fig. 26, van eenen driehoek ABC eene loodlijn op de overstaande zijde AB nederlaat; in deze loodlijn een willekeurig punt P neemt; door dit punt en de beide andere hoekpunten A en B lijnen trekt, die de overstaande zijden in E en F doorsnijden, en men eindelijk deze punten E en F met den voet van de loodlijn vereenigt, dan maken deze laatste lijnen gelijke hoeken met de loodlijn. Men vraagt deze stelling te bewijzen?

Opgelost door R. Lobatto, M. B. Jung, F. J. Stamkart en A. B. de Bock, Jun.

OPLOSSING *van* R. LOBATTO.

Stel AD $= a$, BD $= b$, CD $= c$ en DP $= d$. Nemende dan AB als de as der abscisfen en A als den oorfprong aan, dan zijn de vergelijkingen van de lijnen AC en BC

$$y = \frac{c}{a} x \qquad \text{en} \qquad y' = \frac{c}{b}(a + b - x'),$$

terwijl de vergelijkingen van de lijnen AE en BF, ten opzigte dezer zelfde asfen van coordinaten zijn

$$y'' = \frac{d}{a} x'' \qquad \text{en} \qquad y''' = \frac{d}{b}(a + b - x''').$$

Om de coordinaten van de punten E en F te vinden, waarin de lijnen BC en AC door de lijnen AE en BF gefneden worden, hebben wij, voor het punt E, door $y' = y''$ en $x' = x''$ te ftellen

$$\frac{c}{b}(a + b - x') = \frac{d}{a} x',$$

waaruit $\left(\frac{c}{b} + \frac{d}{a}\right) x' = \frac{c}{b}(a + b)$,

zoodat $x' = \frac{(a + b)\, ac}{ac + bd} = \text{AS}$,

en $y' = \frac{d}{a} x' = \frac{(a + b)\, dc}{ac + bd} = \text{ES}$,

en hieruit volgt nog

$$\text{DS} = \text{AS} - \text{AD} = \frac{(a + b)ac}{ac + bd} - a = \frac{ab(c - d)}{ac + bd}.$$

De coordinaten van het punt F worden eveneens gevonden door $y''' = y$ en $x''' = x$ te ftellen, zoodat

$$\frac{c}{a} x = \frac{d}{b}(a + b - x),$$

of $\left(\frac{d}{b} + \frac{c}{a}\right) x = \frac{d}{b}(a + b)$,

waaruit $x = \frac{ad\,(a + b)}{bc + ad} = \text{AT}$,

en $y = \frac{c}{a} x = \frac{cd\,(a + b)}{bc + ad} = \text{FT}$,

en hieruit volgt nog

$$\text{DT} = \text{AD} - \text{AT} = a - \frac{ad(a + b)}{bc + ad} = \frac{ab(c - d)}{bc + ad}.$$

Ver-

Vermenigvuldigen wij ES met DT, dan komt er

$$ES \times DT = \frac{abcd\,(a+b)\,(c-d)}{(ac+bd)\,(bc+da)}.$$

Vermenigvuldigen wij FT met DS, dan verkrijgen wij

$$FT \times DS = \frac{abcd\,(a+b)\,(c-d)}{(ac+bd)\,(bc+ad)}.$$

Hieruit volgt dus

$$ES \times DT = FT \times DS,$$

of

$$ES : FT = DS : DT,$$

de driehoeken ESD en FTD zijn dus gelijkvormig en bijgevolg is $\angle$ EDS $=$ $\angle$ FDT.

XLIV. VOORSTEL.

Door W. TOP Wz.

Men begeert drie getallen te vinden, waarvan de som een minimum is, in de onderstelling dat de twee eerste tot elkander in reden zijn als a tot b, en dat de som der producten, twee aan twee, dezer getallen gelijk m zij?

OPGELOST *door* W. TOP Wz., F. J. STAMKART, L. J. ULMAN, J. B. VOLMER VAN BORN, J. JONKHEERT en A. B. DE BOCK, JUN.

OPLOSSING *van* W. TOP Wz.

Stel de drie gevraagde getallen te zijn ax, bx en y, dan staan de twee eerste reeds tot elkander in reden als a tot b. Daar verder de som der producten twee aan twee gelijk m moet zijn, zoo is

$$abx^2 + (a+b)\,xy = m,$$

waaruit

$$y = \frac{m - abx^2}{(a+b)\,x}.$$

Stellende dus de som der getallen gelijk z, dan is

$$z = (a+b)\,x + \frac{m - abx^2}{(a+b)\,x},$$

welke functie van x dan nu, ingevolge den eisch van het vraagstuk, een minimum moet zijn.

Stellende dus het eerste differentiaal quotient gelijk nul, dan komt er

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a + b - \frac{m + abx^2}{(a+b)\,x^2} = 0,$$

dus

$$(a+b)^2\,x^2 = m + abx^2,$$

 of

of
$$(a^2 + ab + b^2)\, x^2 = m,$$

zoodat
$$x = \sqrt{\frac{m}{a^2 + ab + b^2}}.$$

Subſtituerende dit in het tweede differenciaal quotient, dat is in

$$\frac{\delta^2 s}{\delta x^2} = \frac{2m}{(a+b)\, x^3};$$

dan wordt de uitkomst klaarblijkelijk poſitief en de gevondene waarde van x toont dus een minimum aan. De drie gevraagde getallen zijn alzoo

$$ax = a \sqrt{\frac{m}{a^2 + ab + b^2}},$$

$$bx = b \sqrt{\frac{m}{a^2 + ab + b^2}},$$

en
$$y = \frac{m - abx^2}{(a+b)x} = \frac{a^2 + b^2}{a+b} \sqrt{\frac{m}{a^2 + ab + b^2}},$$

terwijl wij voor de ſom der getallen, dat is voor het minimum, vinden:

$$s = \frac{2\sqrt{m\,(a^2 + ab + b^2)}}{a+b}.$$

Stellende $a = 1$, $b = 2$ en $m = 28$, dan is $x = 2$, dus de getallen $ax = 2$, $bx = 4$ en $y = \frac{10}{3}$.

XLV. VOORSTEL.

Door W. TOP WZ.

Men vraagt vijf getallen te vinden, die in eene harmoniſche reeks opklimmen, waarvan de eerſte term tot den vijfden in reden is als a tot b, en waarvan het verſchil tusſchen de ſom der vierkanten en de ſom der eerſte magten een maximum of minimum wordt?

OPGELOST *door* W. TOP WZ., F. J. STAMKART, L. J. ULMAN, J. JONKHEERT en A. B. DE BOCK, JUN.

OPLOSSING *van* W. TOP WZ.

Stel de vijf termen van de harmoniſche reeks

$$x,\ y,\ \frac{xy}{2x - y},\ \frac{xy}{3x - 2y}, \quad \text{en} \quad \frac{xy}{4x - 3y}.$$

Daar dan de eerſte term tot den vijfden moet ſtaan als a tot b, zoo is

x :

$$x : \frac{xy}{4x-3y} = a : b \quad \text{of} \quad 4x - 3y : y = a : b,$$

dus $$4bx - 3by = ay,$$

waaruit $$x = \frac{(a+3b)\,y}{4b}.$$

Stellende dan kortheidshalve $\frac{a+3b}{4b} = p$, dan is $x = py$ en de harmonische reeks wordt

$$py,\ y,\ \frac{py}{2p-1},\ \frac{py}{3p-2} \text{ en } \frac{py}{4p-3}.$$

De som der vierkanten dezer termen is dus

$$y^2\left(p^2 + 1 + \frac{p^2}{(2p-1)^2} + \frac{p^2}{(3p-2)^2} + \frac{p^2}{(4p-3)^2}\right),$$

terwijl de som der termen is

$$y\left(p + 1 + \frac{p}{2p-1} + \frac{p}{3p-2} + \frac{p}{4p-3}\right),$$

welke twee sommen alzoo kortheidshalve kunnen worden voorgesteld door

$$Ay^2 \quad \text{en} \quad By.$$

Daar nu het verschil tusschen deze twee sommen een maximum of minimum moet zijn, zoo hebben wij,

$$z = Ay^2 - By$$

stellende, $$\frac{\partial z}{\partial y} = 2Ay - B = 0,$$

waaruit $$y = \frac{1}{2}\frac{B}{A};$$

welke een minimum voor z aanwijst, omdat $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2A$ positief is, en waarin, ingevolge het bovengezegde, is

$$A = p^2 + 1 + \frac{p^2}{(2p-1)^2} + \frac{p^2}{(3p-2)^2} + \frac{p^2}{(4p-3)^2},$$

$$B = p + 1 + \frac{p}{2p-1} + \frac{p}{3p-2} + \frac{p}{4p-3},$$

en $$p = \frac{a+3b}{4b}.$$

brengende dus de waarde van p over in die van A en B, dan komt er

B =

$$B = 1 + \frac{a+3b}{4b} + \frac{a+3b}{2a+2b} + \frac{a+3b}{3a+b} + \frac{a+3b}{4a},$$

en $$A = 1 + \frac{(a+3b)^2}{16b^2} + \frac{(a+3b)^2}{4(a+b)^2} + \frac{(a+3b)^2}{(3a+b)^2} + \frac{(a+3b)^2}{16a^2},$$

welke ook aldus kunnen worden gefchreven

$$B = (a+3b)\left\{\frac{1}{4b} + \frac{1}{3b+a} + \frac{1}{2b+2a} + \frac{1}{b+3a} + \frac{1}{4a}\right\},$$

en $$A = (a+3b)^2\left\{\frac{1}{(4b)^2} + \frac{1}{(3b+a)^2} + \frac{1}{(2b+2a)^2} + \frac{1}{(b+3a)^2} + \frac{1}{(4a)^2}\right\}.$$

Hierdoor A en B berekend hebbende, is dan verder

$$y = \frac{B}{2a} \quad \text{en} \quad x = \frac{a+3b}{4b} \times \frac{B}{2a},$$

waaruit dan de vijf getallen gemakkelijk berekend worden.

XLVI. VOORSTEL.

Door W. Top Wz.

De inhoud des vlaks, begrepen tusfchen eenige kromme en derzelver regthoekige coordinaten, is gelijk $\frac{m}{n}$ *maal den regthoek dezer coordinaten. Men vraagt vooreerst naar de vergelijking van deze kromme, en ten andere naar den kortften afftand van eenig bepaald punt, dat met de kromme in hetzelfde vlak gelegen is, tot deze kromme?*

Opgelost *door* W. Top Wz. en F. J. Stamkart.

Oplossing *van* W. Top Wz.

Zij AC, *Fig.* 27, de gevraagde kromme, ftel AB $= x$ en BC $= y$, dan is de inhoud van het ftuk ACB, volgens de opgaaf van het vraagftuk, gelijk $\frac{m}{n}\,xy$; doch deze inhoud wordt in het algemeen voorgefteld door $\int y\partial x$, en wij hebben dus

$$\int y\partial x = \frac{m}{n}\,xy,$$

hetwelk gedifferentieerd zijnde geeft

$$y\partial x = \frac{m}{n}\,x\partial y + \frac{m}{n}\,y\partial x,$$

zoodat $$(n-m)\,y\partial x = mx\partial y,$$

of $$m\,\frac{\partial y}{y} = (n-m)\,\frac{\partial x}{x} \quad \ldots\ldots (a)$$

waar-

waarvan de integraal is

$$m\, Nep.\, Log.\, y = (n-m)\, Nep.\, Log.\, x + Log.\, c,$$

dat is $$Nep.\, Log.\, y^m = Nep.\, Log.\, cx^{n-m},$$

waaruit $$y^m = cx^{n-m},$$

of wanneer wij, om de termen gelijkflachtig te maken, $c = p^{2m-n}$ stellen

$$y^m = p^{2m-n}\, x^{n-m} \quad \ldots\ldots \quad (\beta)$$

hetgeen dan nu de vergelijking van de gevraagde kromme is.

Om hieruit eene vergelijking te vinden, ter bepaling van den kortsten afstand, dien eenig gegeven punt P van de kromme heeft, zoo stellen wij de coördinaten van dit punt $AQ = a$ en $PQ = b$; de coordinaten van het gevraagde punt R door $AS = x$ en $SR = y$ blijvende voorstellen, is alsdan

$$PR^2 = z = (a-x)^2 + (b-y)^2,$$

en daar PR en dus ook PR^2 een minimum moet zijn, zoo moeten wij $\frac{\delta z}{\delta x} = 0$ stellen, hetgeen ons geeft

$$\frac{\delta z}{\delta x} = -2(a-x) - 2(b-y)\frac{\delta y}{\delta x} = 0,$$

of, daar uit (α) $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{n-m}{m} \cdot \frac{y}{x}$ is,

$$2(a-x) + 2(b-y) \times \frac{n-m}{m} \cdot \frac{y}{x} = 0,$$

dus $$m(a-x)x + (n-m)(b-y)y = 0 \quad \ldots \quad (\gamma)$$

zoodat men de waarden van x en y tot het punt R behoorende zal vinden, door x en y op te losfen uit de vergelijkingen (β) en (γ), zulks voert echter tot eene zeer zamengestelde vergelijking, want uit β is

$$y = p^{\frac{2m-n}{m}}\, x^{\frac{n-m}{m}},$$

en brengende deze waarde in (γ) over, dan komt er

$$max - mx^2 + (n-m)bp^{\frac{2m-n}{m}}\, x^{\frac{n-m}{m}} - (n-m)p^{\frac{4m-2n}{m}}\, x^{\frac{2n-2m}{m}} = 0,$$

welke door x gedeeld en herleid zijnde geeft

$$x^{\frac{2n-3m}{m}} - bp^{\frac{n-2m}{m}}\, x^{\frac{n-2m}{m}} + \frac{m}{n-m}p^{\frac{2n-4m}{m}}\, x - \frac{m}{n-m}p^{\frac{2n-4m}{m}}\, a = 0.$$

Hierdoor x bepalende, zal men ook y en bijgevolg z bekend heb-

hebben, waardoor dan de waarde van PR of $\sqrt{s}$ mede gevonden wordt.

AANMERKING. *Door* F. J. STAMKART.

Daar de punten R, waarin de afstand PR een minimum is, dat is, waarin de lijn PR loodregt op de kromme staat, gevonden worden door de twee vergelijkingen

$$y^m = p^{m-n} x^{n-m},$$

en $$m(a-x)x+(n-m)(b-y)y=0,$$

zoo zijn deze punten R de doorsnijdingspunten van de twee kromme lijnen, welke door deze twee vergelijkingen worden uitgedrukt. Nu is de eerste dezer vergelijkingen die van de kromme AC, terwijl de tweede die is van eene ellips. Construerende dus deze ellips voor dezelfde assen der coordinaten als die van de kromme AC, dan zullen de doorsnijdingspunten van deze ellips met de kromme AC de gevraagde punten R doen kennen. Onder deze punten zullen niet alleen die behooren, waarin PR een minimum, maar ook die, waarin PR een maximum is, omdat zoo wel de eene als de andere door de vergelijking $\frac{\delta z}{\delta x}=0$ gevonden moeten worden. Eindelijk behooren de waarden voor x en y nog aan het tweede differentiaal quotient te worden getoetst, om door berekening te beoordeelen, of zij al dan niet tot een maximum of minimum, en zoo ja, tot welk van beide zij behooren.

XLVII. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Welke waarden moet men aan x en y in geheele rationale getallen geven, om te kunnen voldoen aan de vergelijking $x^y = y^x$?

OPGELOST *door* B. LUBBERS, F. J. STAMKART, A. B. DE BOCK, JUN. L. J. ULMAN en J. BAASAN.

OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

Stellen wij $x = zy$, dan wordt de vergelijking

$$(zy)^y = y^{zy},$$

of aan beide zijden den y-den magtswortel trekkende

$$zy = y^z,$$

of $$z = y^{z-1},$$

waaruit $$y = \sqrt[z-1]{z},$$

stel-

stellende hierin x achtervolgens gelijk 1, 2, 3, 4, *enz.* dan verkrijgen wij

$$y = \sqrt[0]{1},\ y = \sqrt[1]{2},\ y = \sqrt[2]{3},\ y = \sqrt[3]{4},\ y = \sqrt[4]{5},\ \textit{enz.}$$

waaruit voor de overeenkomende waarden van x volgt

$$x = y,\ x = 2y,\ x = 3y,\ x = 4y,\ x = 5y,\ \textit{enz.}$$

al deze waarden van x en y voldoen nu aan de vergelijking $x^y = y^x$ en maken bovendien x tot geheele getallen, zoodra slechts y geheele getallen zijn; doch aan deze laatste voorwaarde kunnen alleen de twee eerste waarden van y voldoen, daar $\sqrt[2]{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{5}$, *enz.* klaarblijkelijk, hoe ver ook voortgezet, nimmer een geheel getal kunnen opleveren. Onderzoeken wij dan, wat door de twee eerste waarden van y gevonden wordt.

De eerste $y = \sqrt[0]{1}$ toont eene onbepaalde grootheid aan, daar dezelve geeft $y^0 = 1$, waaraan alle mogelijke getallen voldoen. Deze eerste waarde geeft dus y onbepaald en $x = y$, en het is ook bij het eerste inzien der vergelijking duidelijk, dat $x = y$ stellende aan dezelve voldaan wordt, wat dan ook voor $x = y$ genomen mag worden.

De tweede waarde van y is $y = \sqrt[1]{2} = 2$ en dus $x = 2y = 4$, en hierdoor wordt de vergelijking $2^4 = 4^2 = 16$, waaruit dan nu volgt, dat er, behalve deze opgenoemde gevallen, geene andere geheele getallen voor x en y gevonden kunnen worden, die aan de vraag voldoen.

XLVIII. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Wanneer de drie zijden van eenen ongelijkzijdigen driehoek, benevens de loodlijn, welke op de zijde valt, die de middelste in grootte is, eene rekenkunstige reeks vormen, en de som dezer reeks door hetzelfde getal wordt uitgedrukt, als de inhoud van den grootsten der twee regthoekige driehoeken, waarin de driehoek door de loodlijn verdeeld wordt; dan vraagt men naar de zijden van dezen driehoek?

OPGELOST *door* J. JONKHERT, B. LUBBERS, G. BRANDSTEDER, F. J. STAMKART, J. BASSAN, L. J. ULMAN, M. B. JUNG en A. B. DE BOCK, JUN.

OP-

Oplossing van J. Jonkheert.

Stel AB, *Fig.* 28, de kleinste, AC de middelste en BC de grootste der drie zijden, dan moet de loodlijn uit B op AC worden nedergelaten, en daar BD noodzakelijk kleiner dan AB is, zal BD de eerste term van de reeks moeten zijn, zoodat wij zullen stellen $BD = x$, $AB = x + y$, $AC = x + 2y$ en $BC = x + 3y$.

Ingevolge de bekende eigenschap der driehoeken is

$$DC = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2\,AC},$$

dus $$DC = \frac{(x+2y)^2+(x+3y)^2-(x+y)^2}{2\,(x+2y)},$$

of $$DC = \frac{x^2+8\,xy+12\,y^2}{2\,(x+2\,y)} = \tfrac{1}{2}(x+6y),$$

en de inhoud van de grootste der twee regthoekige driehoeken is dus

$$\textit{Driek.}\ BDC = \tfrac{1}{2}\,BD \times BC = \tfrac{1}{4}\,x\,(x + 6y).$$

Daar nu de som der termen van de reeks, dat is $4x + 6y$, volgens den eisch van het vraagstuk, gelijk moet zijn aan de laatste uitdrukking, zoo hebben wij

$$\tfrac{1}{4}\,x\,(x + 6y) = 4x + 6y \;\ldots\ldots\; (1)$$

Om eene tweede vergelijking te vinden hebben wij

$$BD^2 + DC^2 = BC^2,$$

of $$x^2 + \tfrac{1}{4}\,(x + 6y)^2 = (x + 3y)^2,$$

dat is $$4x^2 + (x + 6y)^2 = 4\,(x + 3y)^2,$$

hetgeen ontwikkeld zijnde geeft

$$x^2 - 12\,xy = 0,$$

of $$x = 12\,y \;\ldots\ldots\ldots\; (2).$$

Dit in (1) overbrengende komt er

$$3y\,(12y + 6y) = 48y + 6y,$$

of $$54y^2 = 54y,$$

waaruit $y = 1$ en bijgevolg $x = 12$, zoodat de loodlijn en de zijden zijn $x = 12$, $x + y = 13$, $x + 2y = 14$ en $x + 3y = 15$.

XLIX. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Den kleinsten gelijkbeenigen driehoek in geheele rationale getallen te vinden, zoodanig, dat, dezelve door drie loodlijnen in zes drie-hoe-

hoeken verdeeld zijnde, de zijden van deze driehoeken wederom geheele rationale getallen zijn?

Opgelost *door* B. Lubbers, F. J. Stamkart, L. J. Ulman, M. B. Jung en A. B. de Bock, Jun.

Oplossing *van* B. Lubbers.

Laat AEC, *Fig.* 29, een willekeurige driehoek wezen, dan merken wij vooreerst op, dat wanneer de drie zijden, benevens eene der loodlijnen EB, rationaal zijn, al de overige stukken, waarin de loodlijnen elkander en de zijden verdeelen, mede rationaal zullen wezen; want daar men heeft

$$AC \times EB = AE \times CF = CE \times AD,$$

omdat elk dezer producten den dubbelen inhoud van den driehoek voorstelt, zoo heeft men

$$CF = \frac{AC \times EB}{AE} \quad \text{en} \quad AD = \frac{AC \times EB}{CE},$$

waaruit dan blijkt, dat de twee overige loodlijnen bij deze onderstelling mede rationaal zullen zijn.

Daar verder genoegzaam bekend is, dat men heeft

$$AB = \frac{AE^2 + AC^2 - EC^2}{2\,AC}, \; BC = \frac{AC^2 + CE^2 - AE^2}{2\,AC},$$

en zoo ook met de stukken der overige zijden, zoo kunnen de zijden niet rationaal wezen, zonder dat ook al de stukken, waarin dezelve door de loodlijnen verdeeld worden, mede rationaal zijn.

Dat eindelijk, de zijden benevens de loodlijnen rationaal zijnde, al de stukken, waarin deze loodlijnen elkander verdeelen, mede rationaal zijn, blijkt uit de gelijkvormigheid der driehoeken AOB, ADC en EBC; want hieruit volgt AB : BO = EB : BC, waaruit

$$BO = \frac{AB \times BC}{EB}.$$

Daar dan AB, BE en EB rationaal zijn, moet ook BO en dus ook EO rationaal wezen. Voor de twee overige loodlijnen is dit bewijs hetzelfde, omdat men eveneens heeft

$$OF = \frac{AF \times FE}{CF} \quad \text{en} \quad OD = \frac{CD \times DE}{AD}.$$

Dit opgemerkt hebbende, en in aanmerking nemende, dat in ons geval, de driehoek gelijkbeenig zijnde, de regthoekige drie-

hoeken ABE en EBC gelijk en gelijkvormig zijn, zoo nemen wij voor deze driehoeken den kleinsten, die in geheele rationale getallen kunnen bestaan, namelijk:

$$AB = BC = 3,\ BE = 4,\ \text{en}\ AC = EC = 5;$$

alsdan is, ingevolge het bovengezegde,

$$AF = CD = \frac{36 + 25 - 25}{10} = \tfrac{18}{5},$$

$$EF = ED = 5 - \tfrac{18}{5} = \tfrac{7}{5},$$

$$AD = CF = \frac{4 \times 6}{5} = \tfrac{24}{5},$$

$$OB = \frac{3 \times 3}{4} = \tfrac{9}{4};\quad OF = OD = \frac{\tfrac{18}{5} \times \tfrac{7}{5}}{\tfrac{24}{5}} = \tfrac{21}{20},$$

$$EO = 4 - \tfrac{9}{4} = \tfrac{7}{4},\quad AO = OC = \tfrac{24}{5} - \tfrac{21}{20} = \tfrac{15}{4}.$$

Wil men bijgevolg, dat ook deze stukken door geheele getallen zullen worden uitgedrukt, dan zal men alles met 20 moeten vermenigvuldigen, en men zal hebben

$$AB=BC=60;\ AE=EC=100,\ BE=80,\ AD=CF=96,$$
$$AF=CD=72;\ EF=ED=28,\ BO=45,\ EO=35,$$
$$AO=CO=75\ \text{en}\ OF=OD=21.$$

L. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Den kleinsten ongelijkzijdigen driehoek in geheele rationale getallen te vinden, die door deszelfs loodlijnen in zes driehoeken verdeeld wordt, waarvan de zijden mede geheele rationale getallen worden?

OPGELOST *door* B. LUBBERS en L. J. ULMAN.

OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

Wij hebben in het voorgaande vraagstuk reeds betoogd, dat wanneer de drie zijden, benevens eene der loodlijnen, rationaal zijn, al de overige stukken mede rationaal zijn, en aldaar tevens aangewezen, hoe al deze overige stukken kunnen worden berekend. Wij zullen alzoo de driehoeken ABE en CBE, *Fig.* 29, in de kleinste geheele getallen moeten uitdrukken, vervolgens hieruit al de overige stukken berekenen, en eindelijk al de gevondene getallen tot denzelfden noemer gebragt hebbende, dezen gemeenen noemer moeten weglaten. De drie zijden van eenen rationalen regthoekigen driehoek worden, zoo als bekend is, uitge-

gedrukt door $x^2 + y^2$, $x^2 - y^2$ en $2xy$. Nemen wij dus voor den driehoek ABE, $x = 2$ en $y = 1$, dan worden de zijden 5, 4 en 3; neemt men nu voor den tweeden driehoek CBE, $x = 3$ en $y = 1$, dan worden de zijden 10, 8 en 6. Deze driehoeken moeten echter met eene der regthoekszijden aan elkander sluiten, waaraan voldaan kan worden, door de eerste met 2 te vermenigvuldigen, als wanneer er komt 10, 8 en 6; doch alsdan worden deze driehoeken gelijk en gelijkvormig, en de geheele driehoek wordt dus gelijkbeenig, hetgeen tegen den eisch van de vraag strijdt. Men kan hieraan ten andere voldoen, door de zijden van den eersten driehoek met 3 en die van den tweeden met 2 te vermenigvuldigen, als wanneer er komt 15, 12, 9 en 20, 16, 12, waarvan men dan de zijden 12 aan elkander kan laten sluiten, en hierdoor zouden de zijden van den driehoek worden 15, 20 en 25, doch alsdan wordt de geheele driehoek wederom regthoekig, en loodlijnen verdeelen denzelven niet in zes driehoeken, zoo als het vraagstuk vordert.

Wij nemen alzoo, voor den eersten driehoek $x = 2$ en $y = 1$ gesteld hebbende, waardoor de zijden worden 5, 4 en 3, voor den tweeden driehoek $x = 3$ en $y = 2$, waardoor de zijden worden 13, 5 en 12; en om nu twee der regthoekszijden te doen overeenstemmen, vermenigvuldigen wij de zijden van den eersten driehoek met 3, waardoor de twee driehoeken worden 15, 12, 9 en 13, 12, 5, zoodat wij dan hebben:

AB = 5, AE = 13, BE = 12, BC = 9 en CE = 15, terwijl de derde zijde AC = 14 wordt.

Ter berekening van de twee overige loodlijnen hebben wij nu, het gezegde in het voorgaande vraagstuk in acht nemende,

$$AD = \frac{AC \times BE}{EC} = \frac{56}{5}, \quad CF = \frac{AC \times BE}{AE} = \frac{168}{13}.$$

Voor de overige stukken der zijden hebben wij

$$AF = \frac{AC \times AB}{AE} = \frac{70}{13}, \quad CD = \frac{CB \times AC}{CE} = \frac{42}{5},$$

$$EF = AE - AF = \frac{99}{13}, \quad ED = EC - CD = \frac{33}{5}.$$

Eindelijk vinden wij, ingevolge het voorgaande vraagstuk, voor de stukken der loodlijnen

OB =

$$OB = \frac{AB \times BC}{BE} = \tfrac{15}{4};\ OD = \frac{CD \times DE}{AD} = \tfrac{99}{20};\ OF = \frac{AF \times FE}{CF} = \tfrac{165}{52},$$

$$OE = BE - OB = \tfrac{33}{4};\ OA = AD - DO = \tfrac{25}{4};\ OC = CF - OF = \tfrac{39}{4}.$$

Om alzoo voor al deze stukken geheele getallen te verkrijgen, zullen wij elk derzelve met 260 moeten vermenigvuldigen, waardoor wij zullen verkrijgen

AC = 3640,	AE = 3380,	CE = 3900,
AB = 1300,	AF = 1400,	CD = 2184,
BC = 2340,	EF = 1980,	DE = 1716,
BE = 3120,	AD = 2912,	CF = 3360,
BO = 975,	OD = 1287,	OF = 825,
EO = 2145,	AO = 1625,	OC = 2535.

LI. VOORSTEL.

Door S. KLIJNSMA.

Van eenen onregelmatigen vierhoek zijn gegeven drie der zijden, benevens de twee hoeken, welke tusschen deze zijden gelegen zijn; men vraagt hierdoor den inhoud van den vierhoek te vinden?

OPGELOST *door* S. KLIJNSMA, F. J. STAMKART, M. B. JUNG, J. BASSAN, J. B. VOLMER VAN BORN, J. JONKHEERT en A. B. DE BOCK, JUN.

OPLOSSING *van* S. KLIJNSMA.

Zij ABCD, *Fig.* 30, de vierhoek en stellen wij AD $= a$, AB $= b$, BC $= c$, $\angle A = \alpha$ en $\angle B = \beta$. Verlengen wij de twee zijden AD en BC, tusschen welke de onbekende zijde DC gelegen is, tot dat zij elkander ontmoeten in E, dan is $\angle E = 180° - (\alpha + \beta)$ en dus $Sin.\ E = Sin.\ (\alpha + \beta)$.

Daar in driehoek AEB de zijde AB met de twee aanliggende hoeken A en B gegeven zijn, zoo kunnen AE en BE door den bekenden regel gevonden worden, en wij hebben:

$$AE = b \times \frac{Sin.\ \beta}{Sin.\ (\alpha + \beta)} \text{ en } BE = b \times \frac{Sin.\ \alpha}{Sin.\ (\alpha + \beta)},$$

waardoor dan voor DE en CE gevonden wordt:

$$DE = b \times \frac{Sin.\ \beta}{Sin.(\alpha + \beta)} - a \text{ en } CE = b . \times \frac{Sin.\ \alpha}{Sin.(\alpha + \beta)} - c.$$

Wij hebben dan twee driehoeken AEC en DEC, in ieder van welke twee zijden met den ingesloten hoek bekend zijn; de

de inhouden dezer driehoeken berekenende en dezelve van elkander aftrekkende, zullen wij hierdoor eene formule voor den inhoud van den vierhoek verkrijgen. Hiertoe hebben wij dan

$$Drieh.\ AEB = \tfrac{1}{2} AE \times EB \times Sin.\ E = \frac{b^2\ Sin.\ \alpha\ Sin.\ \beta}{2\ Sin.\ (\alpha+\beta)},$$

$$Drieh. = \tfrac{1}{2} DE \times EC \times Sin E = \tfrac{1}{2}\left(\frac{b\ Sin.\ \alpha}{Sin(\alpha+\beta)} - c\right)\left(\frac{b\ Sin.\ \beta}{Sin(\alpha+\beta)} - a\right) Sin\ (\alpha+\beta)$$

en wij vinden dus voor den inhoud van den vierhoek

$$I = \frac{b^2 Sin.\alpha Sin.\beta - \{b Sin.\beta - a Sin.(\alpha+\beta)\}\{b Sin.\alpha - c Sin.(\alpha+\beta)\}}{2\ Sin.\ (\alpha+\beta)},$$

of, wanneer wij den laatsten term van den teller ontwikkelen,

$$I = \frac{ab\ Sin.\ \alpha\ Sin.\ (\alpha+\beta) + bc\ Sin.\ \beta\ Sin.(\alpha+\beta) - ac\ Sin^2.(\alpha+\beta)}{2\ Sin.\ (\alpha+\beta)},$$

of $$I = \tfrac{1}{2}\{ab\ Sin.\ \alpha + bc\ Sin.\ \beta - ac\ Sin.\ (\alpha+\beta)\}.$$

Gevolg. Loopt BC evenwijdig met AD, dan is $\beta = 180^\circ - \alpha$, dus $Sin.\ \beta = Sin.\ \alpha$ en $Sin.\ (\beta+\alpha) = 0$, waardoor voor den inhoud van een trapezium gevonden wordt

$$I = \tfrac{1}{2} b\ (a + c)\ Sin.\ \alpha.$$

LII. VOORSTEL.

Door S. Klijnsma.

Van eenen onregelmatigen vierhoek zijn gegeven drie der hoeken, benevens twee over elkander staande zijden. Men vraagt den inhoud van dezen vierhoek te berekenen?

Opgelost *door* S. Klijnsma, F. J. Stamkart, M. B. Jung, A. B. de Bock, Jun. J. Bassan, J. B. Volmer van Born en J. Jonkhert.

Oplossing *van* S. Klijnsma.

Zij ABCD, *Fig.* 31, de vierhoek, waarin AB $= a$, CD $= b$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ en $\angle C = \gamma$ gegeven zijn, dan kan ook $\angle D = \delta$ als bekend worden aangemerkt, daar dezelve gelijk is aan $360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma)$. Men verlenge de onbekende zijden AD en BC, tot zij elkander in E ontmoeten, dan is $Sin.\ E = Sin.\ (\alpha + \beta)$, en wij hebben uit de driehoeken ABE en DCE, in ieder van welke eene zijde met de twee aanliggende hoeken gegeven is,

 AE =

$$AE = a\,\frac{Sin.\,\beta}{Sin.\,(\alpha+\beta)};\ BE = a\,\frac{Sin.\,\alpha}{Sin.\,\alpha+\beta},$$

$$DE = b\,\frac{Sin.\,\gamma}{Sin.\,(\alpha+\beta)};\ CE = b\,\frac{Sin.\,\delta}{Sin.\,(\alpha+\beta)}.$$

Hierdoor vinden wij verder

$$\textit{Driek.}\ AEB = \tfrac{1}{2}\,AE \times DE\ Sin.\ E = \tfrac{1}{2}\,a^2\,\frac{Sin.\,\alpha\ Sin.\,\beta}{Sin.\,(\alpha+\beta)},$$

$$\textit{Driek.}\ DCB = \tfrac{1}{2}\,DE \times CE\ Sin.\ E = \tfrac{1}{2}\,b^2\,\frac{Sin.\,\gamma\ Sin.\,\delta}{Sin.\,(\alpha+\beta)},$$

waarvan het verschil voor den vierhoek geeft:

$$I = \frac{a^2\,Sin.\,\alpha\ Sin.\,\beta - b^2\,Sin.\,\gamma\ Sin.\,\delta}{2\,Sin.\,(\alpha+\beta)}.$$

AANMERKING. Stelt men $\alpha = 180^\circ - \beta$, of $\alpha+\beta = 180^\circ$, dan loopen de onbekende zijden evenwijdig, *Fig.* 32, en de vierhoek gaat over in een trapezium. In dit geval verkrijgt onze formule ondertusschen eenen vorm, die in den eersten opslag vreemd moet toeschijnen. Daar namelijk $\alpha + \beta = 180^\circ$ zijnde ook $\gamma + \delta = 180^\circ$ is, zoo is alsdan $Sin.\,\beta = Sin.\,\alpha$ en $Sin.\,\delta = Sin.\,\gamma$, terwijl $Sin.\,(\alpha+\beta) = Sin.\,180^\circ = 0$ wordt, waardoor dan onze formule overgaat in

$$I = \frac{a^2\,Sin^2.\,\alpha - b^2\,Sin^2.\,\delta}{2 \times 0},$$

hetwelk eene oneindige waarde schijnt aan te duiden. Het is echter klaar, dat de inhoud van den vierhoek niet oneindig is, en men kan dus met regt vragen, waaraan dit verschijnsel is toe te schrijven. Het oppervlakkigste inzien der figuur zal dit echter verklaren; want dit zal doen gevoelen, dat de gegevens a, b, α en δ hier niet onafhankelijk van elkander zijn, omdat AD en BC evenwijdig zijnde, BE = CF en dus $a\,Sin.\,\alpha = b\,Sin.\,\delta$ moet wezen. Deze betrekking tusschen de gegevens maakt $a^2\,Sin^2.\,\alpha - b^2\,Sin^2.\,\delta$, en dus den teller van I mede gelijk 0 en doet dus de waarde van I overgaan in $I = \frac{0}{0}$, hetgeen aantoont, dat de inhoud alsdan onbepaald is, omdat er alsdan geene genoegzame gegevens zijn, om den inhoud te bepalen. Het is ook duidelijk, dat waar men eene lijn evenwijdig met CD trekt,

b en δ onveranderd blijven, en dat er alzoo in ons geval bij de gegevens een oneindig aantal van vierhoeken kan bestaan.

Loopen daarentegen de bekende zijden evenwijdig en zijn alzoo in het trapezium ABCD, *Fig.* 33, de evenwijdige zijden a en b, benevens de hoeken α en β aan de bazis gegeven, dan is $Sin.\ \gamma = Sin.\ \beta$ en $Sin.\ \delta = Sin.\ \alpha$, waardoor de formule voor den inhoud in dit geval overgaat in

$$I = \frac{1}{2}(a^2 - b^2)\frac{Sin.\ \alpha\ Sin.\ \beta}{Sin.\ (\alpha + \beta)}.$$

LIII. VOORSTEL.

Door S. KLIJNSMA.

Men vraagt een punt binnen eenen gegevenen regthoekigen driehoek te vinden, zoodanig, dat trekkende uit hetzelve lijnen evenwijdig aan de regthoekszijden, en lijnen naar de hoekpunten der scherpe hoeken, het hierdoor ontstaande vierkant en de driehoek, waarvan de hypothenuza de bazis is, tot elkander in gegevene reden staan?

OPGELOST *door* S. KLIJNSMA, F. J. STAMKART, L. J. ULMAN, J. BASSAN, A. B. DE BOCK, JUN. J. JONKHERT en M. B. JUNG.

OPLOSSING *van* S. KLIJNSMA.

Laat ABC, *Fig.* 34, de gegeven driehoek en I het gevraagde punt zijn, dan moet IHAG een vierkant wezen, dat tot driehoek IBC in reden is als n tot m. Stellen wij AB $= a$, AC $= b$, en de zijde van het gevraagde vierkant AG $=$ AH $= x$, dan is BH $= a - x$, en CG $= b - x$. Wij hebben dus voor den inhoud van den vierhoek ABIC ten duidelijkste

$$x^2 + \tfrac{1}{2}x(a - x) + \tfrac{1}{2}x(b - x),$$

dat is

$$\tfrac{1}{2}(a + b)x,$$

en trekkende dit van den inhoud des geheelen driehoeks, dat is van $\frac{1}{2}ab$, dan blijft er voor den inhoud van driehoek BIC

$$\tfrac{1}{2}ab - \tfrac{1}{2}(a + b)x;$$

volgens het vereischte in de opgaaf zullen wij dus moeten hebben

$$x^2 : \tfrac{1}{2}ab - \tfrac{1}{2}(a + b)x = n : m,$$

of

$$mx^2 = \tfrac{1}{2}nab - \tfrac{1}{2}n(a + b)x,$$

 dat

dat is $x^2 + \frac{n}{m}(a+b)x - \frac{n}{2m}ab = 0$,

waaruit $x = -\frac{n}{4m}(a+b) \pm \sqrt{\left\{\frac{n}{2m}ab + \frac{n^2}{16m^2}(a+b)^2\right\}}$.

Hieruit blijkt dan, dat er twee oplosfingen op het vraagftuk beftaan, gevende de eerfte eene pofitieve en de tweede eene negatieve waarde voor x. De eerfte dezer oplosfingen geeft het punt I, waarbij AHIG = IBC is; de tweede waarde van x doet daarentegen het punt I′ kennen, en hierbij is AH′I′G′ = I′BC, zijnde het blijkbaar, dat elk dezer punten volkomen aan den eisch van het vraagftuk beantwoordt.

De twee waarden van x, dat is AG en AG′, worden ook zeer gemakkelijk door conftructie gevonden. Nemen wij namelijk $AD = \frac{m}{2n}a$, hetgeen niet meer dan het vinden van eene vierde evenredige vordert, en befchrijven wij op DC eenen halven cirkel, dan is $AE = \sqrt{\frac{m}{2n}ab}$.

Nemen wij verder $AF = \frac{m}{4n}(a+b)$, welke waarde wederom door het conftrueren eener vierde evenredige gevonden wordt, dan is

$$EF = \sqrt{(AE^2 + AF^2)} = \sqrt{\left(\frac{m}{2n}ab + \frac{m^2}{16n^2}(a+b)^2\right)}.$$

Befchrijvende dus met FE als ftraal, uit F als middelpunt eenen halven cirkel, dan zullen G en G′ de gevraagde punten en dus AG en AG′ de twee verfchillende waarden van x zijn; want dan is

$$AG = -\frac{m}{4n}(a+b) + \sqrt{\left(\frac{m}{2n}ab + \frac{m^2}{16n^2}(a+b)^2\right)},$$

en $$AG' = -\frac{m}{4n}(a+b) - \sqrt{\left(\frac{m}{2n}ab + \frac{m^2}{16n^2}(a+b)^2\right)},$$

zoodat wij, dan alleen op AG en A′G′ quadraten zullen moeten befchrijven om de punten I en I′ te vinden.

Het is eindelijk klaar, dat het quadraat op AG boven en het quadraat op AG′ beneden AC moet worden gefteld; want de

eene

eene zijde AG positief zijnde, moet ook de andere zijde AH positief wezen, en daar voor het tweede vierkant de eene zijde AG′ negatief is, moet ook de andere AH′ negatief genomen worden.

LIV. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Men vraagt het getal 68 *in vier deelen te verdeelen, zoodanig, dat het eerste een vierkant, het tweede een pronik, het derde een driehoekig en het vierde een vijfhoekig getal zij, welke alle gelijke wortels of zijden hebben?*

OPGELOST *door* G. BRANDSTEDER, F. J. STAMKART, M. B. JUNG, J. JONKHEERT, A. B. DE BOCK, JUN., L. J. ULMAN, J. BASSAN, J. B. VOLMER VAN BORN en A. VAN LEE.

OPLOSSING *van* G. BRANDSTEDER.

Stel den gemeenen veelhoekswortel der gevraagde getallen x, dan zijn deze getallen

$$x^2,\ x^2 + x,\ \tfrac{1}{2}(x^2 + x) \text{ en } \tfrac{1}{2}(3x^2 - x),$$

en daar de som dezer getallen gelijk 68 moet zijn, zoo hebben wij

$$4x^2 + x = 68,$$

of $\quad 4x^2 + x + \tfrac{1}{16} = 68\tfrac{1}{16} = \tfrac{1089}{16},$

dus $\quad 2x + \tfrac{1}{4} = \pm\sqrt{\tfrac{1089}{16}} = \pm\tfrac{33}{4},$

zoodat $\quad 2x = -\tfrac{1}{4} \pm \tfrac{33}{4},$

en $\quad x = -\tfrac{1}{8} \pm \tfrac{33}{8},$

dat is $\quad x = 4 \quad$ of $\quad x = -\tfrac{17}{4}.$

Neemt men $x = 4$, dan zijn de gevraagde deelen

$x^2 = 16,\ x^2 + x = 20,\ \tfrac{1}{2}(x^2 + x) = 10$ en $\tfrac{1}{2}(3x^2 - x) = 22,$

doch neemt men $x = -\tfrac{17}{4}$, dan zijn deze deelen

$x^2 = 18\tfrac{1}{16},\ x^2 + x = 13\tfrac{13}{16},\ \tfrac{1}{2}(x^2 + x) = 6\tfrac{29}{32},\ \tfrac{1}{2}(3x^2 - x) = 29\tfrac{7}{32}.$

LV. VOORSTEL.

Door C. F. JULIUS.

De naam van een beroemd vaderlandsch Wiskunstenaar bestaat uit 10 *letters, waarvan de derde, zevende en tiende dezelfde zijn. Stelt men* $A = 1$, $B = 2$, *enz. tot* $Z = 26$, *en schrijft men alzoo in plaats van de letters de getallen, waardoor die letters worden uitgedrukt, dan hebben de letters, waaruit de gevraagde naam bestaat, de volgende eigenschappen:* 1°. *Het product van de*

achtste en negende letter, verminderd met tweemaal de tweede letter, is gelijk het dubbel der negende letter plus 8. — 2°. De som der vierkanten van de eerste en tweede letter, vermenigvuldigd met de som der cuben van dezelfde letters, is gelijk 5164765. — 3°. *De achtste, zesde, derde en vierde letters maken eene rekenkunstige reeks, waarvan het gemeen verschil gelijk de negende letter is. — 4°. De vijfde letter is gelijk aan de som der eerste en tweede letter. — 5°. De negende letter is gelijk de som der tweede en achtste letter. — 6°. Het product der vijfde en zesde letter is gelijk 729 min de som van het quadraat der achtste letter en het product der vijfde en eerste letter. Hoe is de naam van dezen Wiskundige?*

OPGELOST *door* C. F. JULIUS, J. B. VOLMER VAN BORN, J. BASSAN, A. VAN LEE, J. JONKHERT, F. J. STAMKART, L. J. ULMAN, G. BRANDSTEDER, M. B. JUNG en A. B. DE BOCK, JUN.

OPLOSSING *van* C. F. JULIUS.

Stelt men de eerste letter x, de tweede y en de achtste z, dan hebben wij voor de overige letters het volgende:

eerste letter	x	aangenomen stelling.
tweede letter	y	
achtste letter	z	
vijfde letter	$x + y$	uit de vierde voorwaarde.
negende letter	$y + z$	uit de vijfde voorwaarde.
zesde letter	$y + 2z$	uit de derde bepaling.
derde letter	$2y + 3z$	
vierde letter	$3y + 4z$	
zevende letter	$2y + 3z$	volgens de opgaaf.
tiende letter	$2y + 3z$	

De eerste, tweede en zesde voorwaarden geven alzoo de volgende vergelijkingen

$$z(y + z) - 2y = 2(y + z) + 8 \quad \ldots \quad (1)$$

$$(x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 5164765 \quad \ldots \quad (2)$$

$$(x + y)(y + 2z) = 729 - z^2 - x(x + y) \quad \ldots \quad (3)$$

De eerste dezer vergelijkingen herleidende, komt er

$$(z - 2)(y + z) = 2y + 8,$$

of

of van beide kanten 2 $(y+z)$ aftrekkende,

$$(z-4)(y+z) = 8 - 2z = -2(z-4),$$

zoodat $$(z-4)(y+z) + 2(z-4) = 0,$$

of $$(z-4)(y+z+2) = 0.$$

Deze vergelijking wordt voldaan door een' der factoren van het eerste lid gelijk nul te stellen; doch de tweede kan niet nul zijn, zonder dat y of z negatief worden, hetgeen met den aard van het vraagstuk strijdt. Wij moeten dus den eersten factor nul stellen, en dit geeft ons

$$z = 4, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (A),$$

zoodat er nog alleen overblijft x en y te bepalen.

De vergelijking (3) laat zich aldus herleiden:

$$(x+y)(y+2z) + x(x+y) + z^2 = 729,$$

of $$(x+y)(x+y+2z) + z^2 = 729,$$

dat is $$(x+y)^2 + 2z(x+y) + z^2 = 729,$$

of $$(x+y+z)^2 = 729,$$

zoodat $$x+y+z = 27,$$

en daar in (A) gevonden is $z = 4$,

$$x+y = 23 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

De vergelijking (2) laat zich eindelijk aldus herleiden:

$$(x^2+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2) = 5164765,$$

of, door $x+y=23$ deelende,

$$(x^2+y^2)(x^2-xy+y^2) = 224555,$$

dat is $$\{(x+y)^2 - 2xy\} \times \{(x+y)^2 - 3xy\} = 224555,$$

en in plaats van $x+y$ derzelver waarde 23 schrijvende,

$$\{529 - 2xy\} \times \{529 - 3xy\} = 224555,$$

hetgeen ontwikkeld zijnde, geeft:

$$279841 - 2645xy + 6x^2y^2 = 224555,$$

of $$6x^2y^2 - 2645xy = -55286,$$

uit welke vierkants-vergelijking gevonden wordt

$$xy = 22 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

terwijl de tweede wortel is $xy = 418\frac{5}{6}$, welke hier echter niet dienen kan, omdat x en y geheele getallen moeten wezen.

Wij hebben dan $x+y=23$ en $xy=22$, en nu is het klaar, dat hieraan niet anders kan worden voldaan, dan door te nemen $x=22$ en $y=1$ of $x=1$ en $y=22$.

Wil-

Wilde men echter $y = 22$ nemen, dan zou de derde letter worden $2y + z$ of 48, hetgeen hier niet mogelijk is, daar er slechts 26 letters in het alphabeth voorkomen.

Uit dit alles blijkt dan, dat wij moeten nemen $x = 22$, $y = 1$ en $z = 4$, waaruit dan volgt

eerste letter	$x = 22$. V	zesde letter	$y + 2z = 9$ . . I
tweede letter	$y = 1$. A	zevende letter	$2y + 3z = 14$. N
derde letter	$2y + 3z = 14$. N	achtste letter	$z = 4$ . . D
vierde letter	$3y + 4z = 19$. S	negende letter	$y + z = 5$ . . E
vijfde letter	$x + y = 23$. W	tiende letter	$2y + 3z = 14$. N

en de gevraagde naam is alzoo VAN SWINDEN.

LVI. VOORSTEL.

Door S. KLIJNSMA.

Van een getal, uit drie cijferletters bestaande, is het product der cijfers 54. Het middelste cijfer is een zesde van de som der uitersten, en zoo men 594 van het getal aftrekt, dan komt er het omgekeerde van dit getal. Welk getal is dit?

OPGELOST *door* S. KLIJNSMA, M. B. JUNG, J. B. VOLMER VAN BORN, J. BASSAN, A. B. DE BOCK, JUN., F. J. STAMKART, L. J. ULMAN, J. JONKHEERT, G. BRANDSTEDER en A. VAN LEE.

OPLOSSING *van* S. KLIJNSMA.

Stelt men de honderdtallen, tientallen en eenheden voor door x, y en z, dan heeft men door het vraagstuk de volgende vergelijkingen

$$xyz = 54,$$

$$x + z = 6y,$$

en $$100x + 10y + z - 594 = 100z + 10y + x.$$

Uit de laatste volgt terstond

$$99x - 99z = 594,$$

of $$x - z = 6,$$

zoodat wij hebben $2x = 6y + 6$ en $2z = 6y - 6$, dat is $x = 3(y + 1)$ en $z = 3(y - 1)$, waardoor de eerste vergelijking wordt

$$3(y + 1) \times 3(y - 1) \times y = 54,$$

of $$(y + 1)\, y\, (y - 1) = 6 = 3 \times 2 \times 1,$$

waaruit klaarblijkelijk $y = 2$, dus $x = 9$ en $z = 3$, en het gevraagde getal is bijgevolg 923.

AN-

ANDERE OPLOSSING. *Door* M. B. JUNG.

Omdat het product der cijfers 54 moet zijn, en geen dezer factoren grooter dan 9 kan wezen, zoo kunnen wij, uit hoofde van $54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3$, voor de drie factoren of de cijferletters van het gevraagde getal niets anders aannemen dan eene der drie volgende stellingen 1, 6 en 9; 2, 3 en 9; 3, 3 en 6.

Verder moet het middelste cijfer een zesde van de som der uiterste zijn. Hieraan kan niet voldaan worden, wanneer wij 1, 6 en 9; of 3, 3 en 6, voor de factoren aannemen; doch aan deze voorwaarde wordt voldaan door 2, 3 en 9 als factoren aan te nemen, omdat alsdan 2 een zesde van $3 + 9$ is.

Wij weten alzoo, dat 2, 3 en 9 de cijferletters van het gevraagde getal moeten wezen, en wel dat 2 het middelste cijfer is, en hieruit volgt dan, dat het gevraagde getal moet zijn 329 of 923.

Het eerste getal 329 voldoet echter niet aan de derde voorwaarde, omdat het niet met 594 kan worden verminderd, doch het tweede 923 met 594 verminderende, komt er 329, dat juist het omgekeerde van 923 is, zoodat het getal 923 aan al de voorwaarden van het vraagstuk voldoet.

LVII. VOORSTEL.

Door S. KLIJNSMA.

Van eenen driehoek is gegeven de basis, het verschil der hoeken aan de basis, benevens de lijn, welke het toppunt met het midden van de basis vereenigt. Men vraagt den driehoek zoo wel door constructie als door berekening op te lossen?

OPGELOST *door* S. KLIJNSMA, F. J. STAMKART, J. B. VOLMER VAN BORN en M. B. JUNG.

OPLOSSING *van* S. KLIJNSMA.

Zij ABC, *Fig.* 35, de driehoek, waarin wij $AD = DC = a$ en $BD = b$, benevens $C - A = \alpha$ als gegeven beschouwen; stellen wij verder $\angle BDC = \phi$, dan is, BF loodregt op AC trekkende, klaarblijkelijk

$$BF = b \; Sin.\, \phi \quad \text{en} \quad DF = b \; Cos.\, \phi$$

dus $$AF = a + b \; Cos.\, \phi \quad \text{en} \quad CF = a - b \; Cos.\, \phi,$$

waar-

waaruit verder volgt

$$\textit{Tang.}\ A = \frac{b\ \textit{Sin.}\ \phi}{a + b\ \textit{Cos.}\ \phi} \quad \text{en} \quad \textit{Tang.}\ C = \frac{b\ \textit{Sin.}\ \phi}{a - b\ \textit{Cos.}\ \phi}.$$

Daar nu $C - A = \alpha$ is, zoo hebben wij

$$\textit{Tang.}\ \alpha = \textit{Tang.}\ (C - A) = \frac{\textit{Tang.}\ C - \textit{Tang.}\ A}{1 + \textit{Tang.}\ C\ \textit{Tang.}\ A},$$

en hierin de gevondene waarden van *Tang.* A en *Tang.* C overbrengende, verkrijgen wij

$$\frac{\dfrac{b\ \textit{Sin.}\ \phi}{a - b\ \textit{Cos.}\ \phi} - \dfrac{b\ \textit{Sin.}\ \phi}{a + b\ \textit{Cos.}\ \phi}}{1 + \dfrac{b^2\ \textit{Sin}^2.\ \phi}{a^2 - b^2\ \textit{Cos}^2.\ \phi}} = \textit{Tang.}\ \alpha,$$

of
$$\frac{2\ b^2\ \textit{Sin.}\ \phi\ \textit{Cos.}\ \phi}{a^2 - b^2\ (\textit{Cos}^2.\ \phi - \textit{Sin}^2.\ \phi)} = \textit{Tang.}\ \alpha,$$

dat is
$$\frac{b^2\ \textit{Sin.}\ 2\phi}{a^2 - b^2\ \textit{Cos.}\ 2\phi} = \frac{\textit{Sin.}\ \alpha}{\textit{Cos.}\ \alpha}.$$

Deze vergelijking ontwikkelende, komt er

$$b^2\ \textit{Cos.}\ \alpha\ \textit{Sin.}\ 2\phi = a^2\ \textit{Sin.}\ \alpha - b^2\ \textit{Sin.}\ \alpha\ \textit{Cos.}\ 2\phi,$$

of
$$\textit{Sin.}\ 2\phi\ \textit{Cos.}\ \alpha + \textit{Cos.}\ 2\phi\ \textit{Sin.}\ \alpha = \frac{a^2}{b^2}\ \textit{Sin.}\ \alpha,$$

zoodat
$$\textit{Sin.}\ (2\phi + \alpha) = \frac{a^2}{b^2}\ \textit{Sin.}\ \alpha.$$

Door deze vergelijking ϕ gevonden hebbende, zijn in elken der driehoeken CDB en ADB twee zijden met den ingeslotenen hoek bekend, en al het overige kan dus door de bekende regels der regtlijnige driehoeksmeting gevonden worden. Alleen merken wij aan, dat er twee driehoeken zullen bestaan, die aan het gevraagde voldoen, omdat *Sin.* $(2\phi + \alpha)$ tot twee bogen behoort, die zamen 180° uitmaken. Eindelijk wordt het vraagstuk onmogelijk, indien de gegevens zoodanig zijn, dat $\frac{a^2}{b^2}$ *Sin.* α grooter dan 1 is, want alsdan zou ook *Sin.* $(2\phi + \alpha)$ grooter dan 1 moeten wezen, en dus de hoek ϕ onbestaanbaar worden.

CONSTRUCTIE. *Door* F. J. STAMKART.

Om aan te toonen, hoe de beide driehoeken, die aan de vraag

vraag beantwoorden, geconstrueerd kunnen worden, behoeven wij alleen aan te wijzen, hoe, uit de vergelijking

$$Sin.\ (2\phi + a) = \frac{a^2}{b^2}\ Sin.\ a,$$

de hoek ϕ door constructie kan worden opgemaakt. Onder de bijzondere constructiën, welke uit deze vergelijking voortspruiten, komt ons de volgende de eenvoudigste voor.

Wij construeren eene derde evenredige m tot a en b, en hierdoor hebben wij

$$Sin.\ (2\phi + a) = \frac{a}{\frac{b^2}{a}}\ Sin.\ a = \frac{a}{m}\ Sin.\ a,$$

of $Sin.\ (2\phi + a) : Sin.\ a = a : m$;

waaruit volgt, dat $2\phi + a$ en a de hoeken zullen wezen van eenen driehoek, waarin a en m de overstaande zijden zijn.

Maken wij dus ACK gelijk den gegeven' hoek a, en beschrijven wij, CD $= a$ genomen hebbende, uit D met m als straal een' cirkelboog, de lijn CK in E en E' snijdende, dan zullen de hoeken DEC en DE'C de twee waarden van $2\phi + a$ wezen. De hoeken KED en KE'D zijn dus mede deze twee waarden van $2\phi + a$, en daar wij, deze hoeken met KCD of a verminderende, de hoeken EDC en E'DC verkrijgen, zoo zullen EDC en E'DC de waarden van 2ϕ wezen. Deelen wij alzoo EDC en E'DC door de lijnen DL en DL' midden door, dan zijn LDC en L'DC de twee waarden van ϕ, waaruit dan volgt, dat wij alleen DA $=$ DC en DB $=$ DB' $= b$ zullen te maken hebben, om de twee driehoeken ABC en AB'C te verkrijgen, die aan het gevraagde voldoen.

De vraag wordt onmogelijk, wanneer de cirkelboog, uit D beschreven, CK snijdt noch raakt, dat is, wanneer m of $\frac{b^2}{a} < a\ Sin.\ a$ en dus $\frac{a^2}{b^2}\ Sin.\ a > 1$ wordt, hetgeen met de formule voor $Sin.\ (2\phi + a)$ overeenstemt. Hieruit volgt dan ook, dat, $\frac{a^2}{b^2}\ Sin.\ a = 1$ zijnde, er slechts een driehoek aan de vraag zal voldoen, en dat alsdan $\phi = 45° - \frac{1}{2} a$ zal worden. — Eindelijk

lijk merken wij op, dat wanneer $m > a$ of $\frac{b^2}{a} > a$, dat is $b > a$ is, een der twee hoeken ϕ negatief zal zijn, hetgeen even duidelijk uit de figuur als uit de formule is op te maken.

LVIII. VOORSTEL.

Door S. KLIJNSMA.

Den inhoud te vinden van het ligchaam, voortgebragt door de omwenteling van de logarithmische kromme om eene van derzelver ordinaten?

OPGELOST *door* I. R. SCHMIDT, S. KLIJNSMA, F. J. STAMKART en A. B. DE BOCK JUN.

OPLOSSING *van* I. R. SCHMIDT.

Stellen wij OX en OY, *Fig.* 36, de assen der abscissen en ordinaten van de logarithmische kromme ZZ′, dan is derzelver vergelijking $y = a^x$ of $x = \frac{Nep. Log. y}{Nep. Log. a}$, en dan is, OA $= 1$ en OE $=$ AO nemende, EF $= a$. Laat nu C een willekeurig punt van de kromme wezen, waarvan OD $= p$ en CD $= q$ de coordinaten zijn, dan is ook $q = a^p$. Daar verder in de opgaaf niet gezegd wordt, of de kromme om de lijn CD, dan wel om de lijn CB wordt gehouden te wentelen, zullen wij het vraagstuk in elke dezer onderstellingen oplossen.

1°. *Stellen wij dan, dat de kromme om de as CD wentelt*, dan is, CG $=$ HU $= u$ en HG $=$ CU $= v$ stellende, de inhoud van het ligchaam, voortgebragt door de omwenteling van eenig stuk MNHG om CD

$$I = \pi \int v^2 \partial u$$

Nu hebben wij uit de figuur ten duidelijkste

$$u = q - y = a^p - a^x \quad \text{en} \quad v = p - x,$$

en deze waarden substituerende, komt er

$$I = \pi \int (p - x)^2 \partial . (a^p - a^x),$$

$$= - \pi \, Nep. Log. a \int (p - x)^2 a^x \partial x,$$

$$= - \pi \, Nep. Log. a \int \{p^2 - 2px + x^2\} a^x \partial x,$$

Nu is (I. R. SCHMIDT, *Dif.* en *Int. Rek.* §. 235)

$$\int a^x \partial x = \frac{a^x}{Nep. Log. a},$$

$\int x a^x \partial x$

$$\int xa^x \partial x = \frac{x a^x}{Nep.Log.a} - \frac{a^x}{Nep.Log^2.a},$$

$$\int x^2 a^x \partial x = \frac{x^2 a^x}{Nep.Log.a} - \frac{2 x a^x}{Nep.Log^2.a} + \frac{2 a^x}{Nep.Log^3.a},$$

en deze uitdrukkingen in de laatste vergelijking substituerende, komt er

$$I = \pi\left\{C - a^x\left\{p^2 + \frac{2p}{N.Log.a} + \frac{2}{N.Log^2.a} - 2\left(p + \frac{1}{N.Log.a}\right)x + x^2\right\}\right\},$$

of daar, den modulus m stellende, $m = \frac{1}{Nep.Log.a}$ is

$$I = \pi\left\{C - a^x\left\{(p+m)^2 - 2(p+m)x + x^2 + m^2\right\}\right\},$$

hetgeen gemakkelijk herleidt wordt tot

$$I = \pi\left\{C - a^x\left\{(p + m - x)^2 + m^2\right\}\right\} \ldots (A),$$

welke uitdrukking nu, van $x = OL$ tot $x = OK$ genomen, den inhoud van het ligchaam zal geven, voortgebragt door de omwenteling van OIMN om CD als as.

Om eenige voorbeelden te geven, *zullen wij vooreerst den inhoud zoeken van het ligchaam, door* ACP *om* CP *voortgebragt.* Hiertoe moet dan (A) genomen worden van $x = p$ tot $x = 0$. Door $I = 0$ en $x = p$ te stellen, komt er $C = a^p \times 2m^2 = 2qm^2$, en stellende vervolgens $x = 0$, dan verkrijgen wij

$$I = \pi\left\{2qm^2 - (p + m)^2 - m^2\right\},$$

of

$$I = \pi\left\{2(q - 1)m^2 - 2pm - p^2\right\},$$

waarbij men wel indachtig moet zijn, dat OA hier de eenheid voorstelt, en dat men alzoo, om de termen gelijkslachtig te maken, zou moeten schrijven

$$I = \pi\left\{2\,CP \times RD^2 - 2\,OA \times OD \times RD - OA \times OD^2\right\};$$

zijnde het genoegzaam bekend, dat in de logarithmische kromme de subtangens RD standvastig gelijk den modulus is.

Wil men den inhoud van het ligchaam kennen, door de omwenteling van AODC *om* CD *voortgebragt*, dan zal men bij den zoo even gevonden inhoud den cilinder moeten optellen door APOD voortgebragt, welke inhoud, omdat OA = 1 is, wordt uitgedrukt door πp^2; de gevraagde inhoud zal dus worden

$$I = \pi\left\{2(q - 1)m^2 - 2pm\right\}.$$

Berekenen wij nog den inhoud van het ligchaam, door de omwenteling van het oneindig voortloopend vlak Z'CDX' *om* CD *voortgebragt.* In dit geval moeten wij de formule (A) van $x = p$ tot $x = -\infty$ nemen, en wij hebben reeds gezien, dat de standvastige, door bij $x = p$ aan te vangen, wordt $C = 2qm^2$, zoodat (A) alsdan wordt

$$I = \pi \left\{2qm^2 - a^x \left\{(p + m - x)^2 + m^2\right\}\right\},$$

stellen wij echter in deze laatste formule $x = -\infty$, dan wordt de laatste term $0 \times \infty$, hetgeen eene onbepaalde uitdrukking is; schrijven wij echter onze formule onder de volgende gedaante

$$I = \pi \left\{2qm^2 - y \left\{(p + m - m \text{ Nep. Log.} y)^2 + m^2\right\}\right\},$$

en nemen wij in aanmerking, dat $x = -\infty$ overeenkomt met $y = 0$, en dat voor $y = 0$, zoo wel y *Nep. Log*^{2}. y als y *Nep. Log.* $y = 0$ wordt, dan verkrijgen wij voor den inhoud van het voorgestelde ligchaam

$$I = 2qm^2 \pi.$$

Deze uitdrukking is zeer merkwaardig; want daar $m =$ DR en $q =$ CD is, zoo hebben wij

$$I = 2\pi \text{ DR}^2 \times \text{CD} = 6 \times \pi . \text{DR}^2 \times \tfrac{1}{3} \text{ CD},$$

waaruit blijkt, *dat het ligchaam, voortgebragt door de omwenteling van de oneindig voortloopende ruimte* Z'CDX' *om de lijn* CD, *gelijk is aan zesmaal den inhoud van den kegel, die de ordinaat, waarom het vlak draait, tot hoogte, en de subtangens van de logarithmische kromme tot straal heeft.*

Laat men alzoo de vlakten Z'CDX', Z'HVX', *enz.* om de lijnen CD, HV, *enz.* omwentelen, dan zullen de inhouden dezer ligchamen worden uitgedrukt door $2m^2\pi \times$ CD, $2m^2\pi \times$ HV, *enz.* *Deze inhouden zijn dus evenredig met de ordinaten, om welke de vlakken gewenteld hebben.*

Wil men eindelijk, dat de omwenteling in het algemeen om YY' geschiedt, dan zal men in al de gevondene formulen moeten stellen $p = 0$ en $q = 1$, zoodat de algemeene formule (A) dan zal worden

$$I = \pi \left\{C - a^x \left((m - x)^2 + m^2\right)\right\}.$$

II°. *Stel-*

II°. *Stellen wij nu dat de kromme om de ordinaat* BC *wentelt.* De inhoud van het ligchaam, door de omwenteling van eenig gedeelte SMHU voortgebragt, zal dan in het algemeen worden uitgedrukt door

$$I' = \pi \int u^2 \delta v,$$

of, daar $u = q - a^x$ en $v = p - x$ is, door

$$I' = -\pi \int (q^2 - 2qa^x + a^{2x}) \delta x,$$

zoodat $$I' = \pi \left\{ C - q^2 x + 2q \frac{a^x}{Nep.\ Log.\ a} - \frac{a^{2x}}{2\,Nep.\ Log.\ a} \right\},$$

of daar $a^x = y$ en $\frac{1}{Nep.\ Log.\ a} = m$ is,

$$I' = \pi \left\{ C - q^2 x + 2qmy - \tfrac{1}{2} m y^2 \right\} \ldots\ldots (B),$$

en deze uitdrukking zal nu van $x =$ OL tot $x =$ OK of van $y =$ ML tot $y =$ IK genomen moeten worden, om den inhoud van het ligchaam te verkrijgen, voortgebragt door de omwenteling van SMTI om BC. Geven wij ook hiervan eenige voorbeelden.

Om den inhoud van het ligchaam te vinden, door de omwenteling van CAB *om* BC *voortgebragt*, zal men (B) moeten nemen, van $x = p$ en $y = q$ tot $x = 0$ en $y = 1$. Door $I' = 0$, $x = p$ en $y = q$ te stellen, vindt men $C = q^2 (p - \frac{3}{2} m)$, en vervolgens $x = 0$ en $y = 1$ stellende, zal er komen

$$I = \pi \left\{ q^2 (p - \tfrac{3}{2} m) + 2mq - \tfrac{1}{2} m \right\},$$

welke gelijkslagtig wordt, door in de twee laatste termen de magten van OA $= 1$ in te voeren.

Ten einde den inhoud te vinden van het ligchaam, dat door de omwenteling van AODC *om* BC *ontstaat*, moeten wij den zoo even gevonden' inhoud aftrekken van den cilinder, die BC tot hoogte en BO tot straal heeft, dat is, van $q^2 p \pi$; dit verrigtende, vinden wij voor den gevraagden inhoud

$$I = \tfrac{1}{2} m\pi (q - 1)(3q - 1),$$

of $$I = \frac{\pi}{2} \times RD \times CP \times (3\,CD - PD).$$

Begeert men den inhoud, door de omwenteling van eenig stuk CDVH *om* BC *ontstaan*, dan hebben wij boven gevonden, dat

 van

van C te beginnen, de inhoud, door CHU om BC voortgebragt, is

$$I' = \pi \left\{ a^2 \left(p - \tfrac{3}{2} m \right) - q^2 x + 2 q m y - \tfrac{1}{2} m y^2 \right\};$$

trekkende dus dezen inhoud af van den cilinder, die CU tot hoogte en CD tot ſtraal heeft, dat is van $q^2 \pi (p - x)$, dan blijft er, voor den inhoud, door CHVD om BC voortgebragt,

$$I'' = \pi \left\{ \tfrac{3}{2} q^2 m - 2 m q y + \tfrac{1}{2} m y^2 \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Wil men dus den inhoud kennen, door de omwenteling van het oneindig voortloopend vlak Z'CDX' *om* BC *ontſtaan*, dan zullen wij in de laatſte formule $y = 0$ moeten ſtellen, en dit geeft

$$I'' = \tfrac{3}{2} \pi q^2 m = 4\tfrac{1}{2} \times q^2 \pi \times \tfrac{1}{3} m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

deze inhoud is alzoo $4\frac{1}{2}$ *maal de inhoud van den kegel, die* RD *tot hoogte en* CD *tot ſtraal heeft.*

Laat men dus Z'CDX om BC, Z'HVX om HW, *enz.* omwentelen, dan zullen de achtervolgende inhouden zijn $\frac{3}{2} \pi m \times CD^2$, $\frac{3}{2} \pi m \times HV^2$, *enz. De inhouden, door deze ſtukken om* BC, HW *enz. voortgebragt, zijn dus in reden als de vierkanten van de lijnen* CD, HV *enz.*

Verkiest men eindelijk den inhoud te kennen van het ligchaam, dat door de omwenteling van een willekeurig ſtuk Z'HVX *om eene willekeurige lijn* BC *geboren wordt, die met* X'X *evenwijdig loopt*, dan moet men (α) van (β) aftrekken, en men vindt

$$I = \tfrac{1}{2} \pi m y (4q - y),$$

en men zal hieruit gemakkelijk afleiden, *dat het ligchaam, geboren door de omwenteling van* Z'HVX' *om* XX', *gelijk* $\frac{1}{2} \pi m y^2$ *is, dat is, gelijk de halve cilinder, die* VH *tot ſtraal en de ſubtangens* DR *tot hoogte heeft.*

LIX. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Een admiraal ligt met zijne vloot zoodanig, dat het admiraalsſchip, regt west, van het eerſte ſchip der linie 60 vademen verwijderd is; voorts liggen de ſchepen, van het eerſte ſchip in linie af gerekend, alle regt noorden. Nu weet men, dat van het eerſte ſchip, tot elk der overige, als mede van het admiraalsſchip tot al de overige, al de afſtanden door geheele rationale getallen van vademen worden uitgedrukt: uit hoeveel ſchepen kan dan deze vloot op zijn hoogſte hebben beſtaan?

OP-

Opgelost *door* B. Lubbers, F. J. Stamkart, J. Bassan, J. Jonkhert, A. B. de Bock, Jun., M. B. Jung, J. B. Volmer van Born, L. J. Ulman en G. Brandsteder.

Oplossing *van* B. Lubbers.

Daar al de ſchepen in linie regt noord van elkander en het admiraalsſchip regt west van het eerſte ſchip in linie ligt, zoo maken de afſtanden dezer ſchepen in linie met het eerſte en met het admiraalsſchip alle regthoekige driehoeken, die de zijde van 60 vademen gemeen hebben. Stellen wij dan den afſtand van een der ſchepen naar welgevallen tot het admiraalsſchip en het eerſte ſchip van linie gelijk z en x, dan moeten wij hebben $z^2 - x^2 = 3600$ of $(z + x)(z - x) = 3600$, zoodat $z + x$ en $z - x$ de deelers van 3600 moeten wezen; deze deelers moeten bovendien zoodanig zijn, dat derzelver ſom en verſchil even is, daar anders z en x geene geheele getallen kunnen worden, en dit in aanmerking nemende, zien wij, door 3600 in evene factoren te ontbinden, dat er de volgende antwoorden kunnen beſtaan:

$z + x = 1800$ en $z - x = 2$ . . . $z = 901$ en $x = 899$.
$z + x = 900$ . . $z - x = 4$ . . . $z = 452$ . . $x = 448$.
$z + x = 600$ . . $z - x = 6$ . . . $z = 303$ . . $x = 297$.
$z + x = 450$ . . $z - x = 8$ . . . $z = 229$ . . $x = 221$.
$z + x = 360$ . . $z - x = 10$ . . . $z = 185$ . . $x = 175$.
$z + x = 300$ . . $z - x = 12$ . . . $z = 156$ . . $x = 144$.
$z + x = 200$ . . $z - x = 18$ . . . $z = 109$ . . $x = 91$.
$z + x = 180$ . . $z - x = 20$ . . . $z = 100$ . . $x = 80$.
$z + x = 150$ . . $z - x = 24$ . . . $z = 87$ . . $x = 63$.
$z + x = 120$ . . $z - x = 30$ . . . $z = 75$ . . $x = 45$.
$z + x = 100$ . . $z - x = 36$ . . . $z = 68$ . . $x = 32$.
$z + x = 90$ . . $z - x = 40$ . . . $z = 65$ . . $x = 25$.
$z + x = 72$ . . $z - x = 50$ . . . $z = 61$ . . $x = 11$.
$z + x = 60$ . . $z - x = 60$ . . . $z = 60$ . . $x = 0$.

er kunnen alzoo niet meer dan 14 ſchepen in linie gelegen hebben, en de vloot kan dus uit niet meer dan 15 ſchepen hebben beſtaan. Het aantal vademen, waarop de ſchepen in linie van elkander afliggen, is eindelijk 11, 14, 7, 13, 18, 17, 11, 53, 31, 46, 76, 151, 451.

LX. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Een vader laat bij zijn overlijden aan elk zijner kinderen een regthoekig driehoekig ſtuk land na; zij bevinden, dat al deze erfportiën ongelijk zijn, doch dat zij alle denzelfden omtrek hebben, namelijk 420 roeden. Indien nu de zijden van al de drie driehoeken geheele rationale getallen zijn, dan vraagt men, hoeveel kinderen er op zijn hoogst geweest kunnen zijn?

Opgelost *door* M. B. Jung, B. Lubbers, F. J. Stamkart, A. B. de Bock, Jun., J. B. Volmer van Born, J. Jonkhert, J. Bassan en L. J. Ulman.

Oplossing *van* M. B. Jung.

Stellen wij, om de grootstmogelijke algemeenheid te behouden, voor de zijden der regthoekige driehoeken $2xyz$, $(x^2 - y^2)z$ en $(x^2 + y^2)z$, dan is de omtrek $(2x^2 + 2xy)z$, en daar dezelve gelijk 420 roeden moet wezen, zoo hebben wij $2(x^2 + xy)z = 420$ of $(x^2 + xy)z = 210$, dat is

$$x(x + y) \times z = 210,$$

zoodat wij voor x, $x + y$, en z de factoren van 210 zullen moeten aannemen.

Hieruit volgt echter geenszins, dat elke der verſchillende wijzen, waarop wij 210 in drie factoren kunnen ontbinden, eene oplosſing van het vraagſtuk zal geven. Stellen wij namelijk, dat 210 in de drie factoren p, q en r ontbonden is, en dat wij nemen

$$z = p, x = q \text{ en } x + y = r,$$

dan is $y = r - x = r - q$, en dus moet $r > q$ zijn. Daar verder eene der zijden wordt uitgedrukt door $(x^2 - y^2)z$, zoo moet $x < y$ en dus $q > r - q$ wezen, waaruit volgt $r < 2q$, zoodat men te gelijkertijd zal moeten hebben $r > q$ en $r < 2q$.

Uit dit alles volgt dan, *dat men vooreerst* 210 *op alle mogelijke wijzen in drie factoren moet ontbinden, en vervolgens die gevallen moet opteekenen, waarin een der drie factoren grooter dan een der andere en tevens kleiner dan het dubbel van deze andere is. Deze factor is dan* $x + y$ *en de andere* y, *zoodat de derde voor* z *moet worden aangenomen.*

Zie

Zie hier nu al de mogelijke wijzen, waarop 210 in drie factoren kan worden ontleed.

$$210 = 1 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

1 × 1 × 210	* 1 × 14 × 15
1 × 2 × 105	* 2 × 3 × 35
1 × 3 × 70	2 × 5 × 21
1 × 5 × 42	2 × 7 × 15
1 × 7 × 30	* 3 × 5 × 14
1 × 6 × 35	* 3 × 7 × 10
1 × 10 × 21	* 5 × 7 × 6.

Deze gedurige producten met aandacht beschouwende, ziet men gemakkelijk, dat alleen die, welke wij met een sterretje geteekend hebben, een' factor bevatten, die grooter dan eene van de andere en tevens kleiner, dan het dubbel van deze andere is, en hieruit vinden wij de vijf volgende driehoeken:

	x + *y*	*x*	*y*	*z*	*zijden.*
I°.	15	14	1	1	197, 195 en 28
II°.	3	2	1	35	175, 105 en 140
III°.	5	3	2	14	182, 70 en 168
IV°.	10	7	3	3	174, 120 en 126
V°.	7	6	1	5	185, 175 en 60

er kunnen alzoo niet meer dan 5 kinderen zijn geweest.

LXI. VOORSTEL.

Door J. P. DELPRAT.

Een punt en eene regte lijn in de ruimte gegeven zijnde, begeert men in deze lijn een punt zoodanig te bepalen, dat de lijn, welke door dit en het gegeven punt getrokken wordt, met het horizontale vlak den grootstmogelijken hoek maakt?

OPGELOST *door* J. P. DELPRAT, F. J. STAMKART en A. B. DE BOCK, JUN.

OPLOSSING *van* J. P. DELPRAT.

Zij A, *Fig.* 37, het gegeven punt en BE de gegevene lijn, dan zal men, ter bepaling van den betrekkelijken stand dezer

gegevens kunnen aannemen, dat de horizontale projectiën A′ en BE′ van het punt A en de lijn BE bekend zijn, benevens de hoogte $AA' = a$ van het gegeven punt, boven het horizontale vlak, en den hoek $EBE' = \alpha$, van de gegevene lijn met derzelver projectie. Ter bepaling van den ſtand der lijn BE′ ten opzigte van het punt A′ zal het verder genoegzaam wezen de lengte van $A'B = b$ en den hoek $A'BE' = \beta$ te kennen.

Dit nu aangenomen zijnde, zoo trekken wij, uit het punt A, naar een willekeurig punt C van de lijn BE, de lijn AC en zoeken de grootte van den hoek, die deze lijn met het horizontale vlak maakt, welke dan door de bekende regels der differentiaal-rekening tot een maximum gemaakt zijnde, de rigting van de gevraagde lijn zal doen kennen.

Laten wij uit C eene loodlijn CC′ op het horizontale vlak vallen, dan is A′C′ de horizontale projectie van de lijn AC; wij ſtellen dan den hoek, welke deze projectie met die van de gegevene lijn maakt, $A'C'E' = \phi$, en dan hebben wij uit den driehoek A′BC′

$$BC' = BA' \times \frac{Sin.\,(\phi - \beta)}{Sin.\,\phi} = b \times \frac{Sin.\,(\phi - \beta)}{Sin.\,\phi},$$

en
$$A'C' = BA' \times \frac{Sin.\,\beta}{Sin.\,\phi} = b \times \frac{Sin.\,\beta}{Sin.\,\phi}.$$

Trekkende nu CD evenwijdig aan A′C′, dan is $\angle ACD = \angle AKA'$ de hoek, welke de lijn AC met derzelver projectie en dus met het horizontale vlak maakt. Dezen hoek $ACD = \psi$ ſtellende, is dan

$$Tang.\,\psi = \frac{AD}{DC} = \frac{AA' - CC'}{A'C'} \quad . \; . \; . \quad (1).$$

Nu is $AA' = a$ en wij hebben verder

$$CC' = BC'\,Tang.\,\alpha = b \times \frac{Sin.\,(\phi - \beta)\,Tang.\,\alpha}{Sin.\,\phi}.$$

Deze waarden, benevens die van A′C′ in (1) overbrengende, zoo verkrijgen wij

$$Tang.\,\psi = \frac{a\,Sin.\,\phi - b\,Sin.\,(\phi - \beta)\,Tang.\,\alpha}{b\,Sin.\,\beta} \;. . \; (2).$$

Daar

Daar nu deze functie van ϕ een maximum moet zijn, zoo moeten wij alleen de functie

$$z = a\ Sin.\ \phi - b.\ Sin.\ (\phi - \beta)\ Tang.\ a,$$

tot een maximum maken, en dit geeft ons

$$\frac{\partial z}{\partial \phi} = a\ Cos.\ \phi - b\ Cos.\ (\phi - \beta)\ Tang.\ a = 0.$$

Hierin $Cos.\ (\phi - \beta)$ ontwikkelende en door $Cos.\ \phi$ deelende, verkrijgt men

$$a - b\ (Cos.\ \beta + Sin.\ \beta\ Tang\ \phi)\ Tang.\ a = 0,$$

en hieruit $Tang.\ \phi$ oplosfende, komt er

$$Tang.\ \phi = \frac{a - b\ Cos.\ \beta\ Tang.\ a}{b\ Sin.\ \beta\ Tang.\ a} \quad .\ .\ .\ (3)$$

Om nu te onderzoeken, of deze waarde tot een maximum of minimum van z of ψ behoort, moeten wij het tweede differentiaal quotient opmaken, en wij vinden voor hetzelve

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2} = - a\ Sin.\ \phi + b\ Sin.\ (\phi - \beta)\ Tang.\ a) \quad .\ .\ (a)$$

$$= Cos.\ \phi \{- a\ Tang.\ \phi + b\ Tang.\ a\ (Cos.\ \beta\ Tang.\ \phi - Sin.\ \beta)\}.$$

$$= Cos.\ \phi \{-(a - b\ Cos.\ \beta\ Tang.\ a)\ Tang.\ \phi - b.\ Sin.\ \beta\ Tang.\ a\},$$

en wanneer wij hierin voor $Tang.\ \phi$ de waarde fchrijven, die in (3) gevonden is,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2} = Cos.\ \phi \left\{- \frac{(a - b\ Cos.\ \beta\ Tang.\ a)^2}{b\ Sin.\ \beta\ Tang.\ a} - b\ Sin.\ \beta\ Tang.\ a\right\}$$

of

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2} = \frac{Cos.\ \phi}{b\ Sin.\ \beta\ Tang.\ a} \{-a^2 + 2ab\ Cos.\ \beta\ Tang.\ a - b^2\ Tang^2.\ a\} \ .\ .\ (4)$$

daar nu $a^2 - 2ab\ Tang.\ a + b^2\ Tang^2.\ a$, als een volkomen vierkant, altijd pofitief is, zoo is $a^2 + b^2\ Tang^2.\ a > 2ab\ Tang.\ a$ en dus zoo veel te meer $a^2 + b^2\ Tang^2.\ a > 2ab\ Cos.\ \beta\ Tang.\ a$; de tweede factor van (4) is dus altijd negatief, en hieruit volgt, dat de waarde van ϕ in (3) gevonden, den hoek ψ tot een maximum zal maken, wanneer $Cos.\ \phi$ pofitief of $\phi < 90°$ is.

Uit de formule (3) blijkt nu, dat wanneer $b\ Cos.\ \beta\ Tang\ a > a$ is, $Tang.\ \phi$ negatief wordt, en men kan alsdan voor den hiermede overeenftemmenden hoek ϕ eenen hoek grooter dan 90° of eenen negatieven hoek kleiner dan 90° nemen, welke het fupplement van den eerften is. Beide deze hoeken geven dezelfde rig-

 ting

ting voor de lijn A′C′ of AC, doch neemt men voor ϕ den negatieven hoek, dan blijft de waarde van *Cos.* ϕ positief en duidt alzoo een maximum voor ψ aan. Neemt men daarentegen in dit geval voor ϕ den positieven hoek, dan is *Cos.* ϕ negatief en het tweede differentiaal quotient wordt positief, en duidt alzoo een maximum voor ψ aan. Het zal dus noodig zijn te onderzoeken, welke der beide waarden van ϕ in dit geval zal moeten genomen worden.

Hiertoe merken wij op, dat in het algemeen voor den hoek, welke eene lijn met eene andere lijn of met een vlak maakt, zoo wel de hoek zelf als deszelfs supplement kan genomen worden. Wanneer men dus vraagt eene lijn, onder gegevene omstandigheden, zoodanig te bepalen, dat de hoek, welken zij met een gegeven vlak maakt, een maximum zij, dan onderstelt men daarbij stilzwijgend, dat men altoos den kleinsten der twee hoeken, welke de lijn met het vlak maakt, nemen zal, en dat dus dit maximum nooit grooter dan 90° zijn kan. In ons voorstel zal dus de hoek ACD $= \psi$ nooit grooter dan 90° mogen ondersteld worden. Nu hebben wij voor dezen hoek reeds gevonden de uitdrukking

$$Tang.\ \psi = \frac{a\ Sin.\ \phi - b\ Tang.\ a\ Sin.\ (\phi - \beta)}{b\ Sin.\ \beta},$$

en hierin de waarde van het tweede differentiaal quotient uit (a) overbrengende, heeft men

$$Tang.\ \psi = -\frac{1}{b\ Sin.\ \beta} \cdot \frac{\delta^2 z}{\delta \phi^2} \quad \ldots \quad (5)$$

waaruit blijkt, dat zoodra het tweede differentiaal quotient positief is, *Tang.* ψ negatief wordt, en dus niet meer tot eenen positieven hoek kleiner dan 90° kan behooren. Daar wij ondertusschen alleen zulk eenen positieven hoek kleiner dan 90° voor ψ begeeren, zoo volgt hieruit, dat wij alleen de negatieve waarden van het tweede differentiaal quotient te gebruiken hebben, en dat alzoo, welke de waarde van *Tang.* ϕ, uit (3) afgeleid, ook zijn moge, zij *Tang.* ψ tot een maximum zal maken.

Om nu de grootte van dit maximum voor ψ te vinden, zoo hebben wij alleen de waarde van *Tang.* ϕ uit (3) in (5) te substitueren. Daar wij echter reeds in de vergelijking (4) de waarde

van

van ϕ uit (3) hebben overgebragt, zoo stellen wij in (5) voor $\frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2}$ de waarde, die in (4) gevonden is, en men verkrijgt

$$Tang.\,\psi = + \frac{Cos.\,\phi}{b^2\,Sin^2.\,\beta\,Tang.\,\alpha}\left\{a^2 - 2\,ab\,Cos.\,\beta\,Tang.\,\alpha + b^2\,Tang^2.\,\alpha\right\};$$

maar uit (3) volgt

$$Cos.\,\phi = \frac{1}{\sqrt{(1+Tang^2.\,\phi)}} = \frac{b\,Sin.\,\beta\,Tang.\,\alpha}{\sqrt{(a^2 - 2\,ab\,Cos\,\beta\,Tang.\,\alpha + b^2 Tang^2.\,\alpha)}},$$

en hierdoor verkrijgen wij dus

$$Tang.\,\psi = \frac{1}{b\,Sin.\,\beta}\sqrt{(a^2 - 2\,ab\,Cos.\,\beta\,Tang.\,\alpha + b^2\,Tang^2.\,\alpha)}\,.\,(6)$$

GEVOLGEN. De verkregene uitkomsten kunnen merkelijk vereenvoudigd worden, door de gegevens, die den stand van de lijn BC ten opzigte van het punt A bepaald hebben, eenigermaten te wijzigen. Men late uit A′ op BE′ eene loodlijn AO′ neder, en trekke, na O′O loodregt op BO′ te hebben gesteld, NO loodregt op AA′. Indien wij dan een horizontaal vlak door de lijn NO laten gaan, en ten opzigte van dit vlak den stand van de lijn BC en van het punt A op dezelfde wijze bepalen, als wij dit vroeger ten opzigte van het vlak XYZ hebben gedaan, door namelijk AN $= a'$, NO $= b'$ en NOE′ $= \beta' = 90^\circ$ te stellen, terwijl EOE′ $=$ EBE′ $= \alpha$ blijft, dan hebben wij, om alles tot dit nieuwe vlak over te brengen, in de formule (6) $\beta = 90$ te stellen en voor a en b te schrijven a' en b', waardoor wij verkrijgen

$$Tang.\,\psi = \frac{1}{b'}\sqrt{(a'^2 + b'^2\,Tang^2.\,\alpha)}\quad .\ .\ (7).$$

Ten einde den afstand OC$_1$ te vinden, hebben wij slechts in de uitdrukking voor BC′ namelijk

$$BC' = b\,\frac{Sin.\,(\phi - \beta)}{Sin.\,\phi},$$

$\beta = 90^\circ$ te stellen, en voor ϕ de waarde te schrijven, welke (3) in deze zelfde onderstelling geeft. Hierdoor wordt

$$OC_1 = -b'\,Cot.\,\phi = -b'.\frac{b'\,Tang.\,\alpha}{a'} = -\frac{b'^2}{a'}Tang.\,\alpha\ .\ .\ (8)$$

Het negatieve teeken dezer uitdrukking toont aan, dat de afstand OC$_1$ in plaats van uit O naar E″, in welke rigting BC′ ge-

gerekend was, van O naar den tegengestelden kant moet worden uitgezet, en dat derhalve het gezochte punt C beneden C', dat is in het lagere gedeelte van de lijn BE, gelegen is.

Indien men het horizontale vlak door het punt A zelf doet gaan, en derhalve in de gevondene formulen $a = 0$ stelt, en voor den hoek AEM, die de projectie EM der gegevene lijn op dit nieuwe vlak met AE maakt, β' schrijft, dan hebben wij uit de vergelijking (3)

$$Tang.\ \phi = -\ Cot.\ \beta' \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

terwijl wij alsdan uit (6) vinden

$$Tang.\ \psi = \frac{Tang.\ a}{Sin.\ \beta'} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Uit de eerste dezer vergelijkingen laat zich gemakkelijk besluiten, dat AC loodregt op AE moet staan; want uit dezelve blijkt terstond, dat A'C' loodregt A'E' en dus op het vlak AE' staat, waaruit dan het gezegde gemakkelijk is op te maken. Neemt men verder in aanmerking, dat E het punt in de gegevene lijn is, dat even hoog gelegen is als het gegeven punt A, dan volgt hieruit, dat de gevraagde lijn AC zeer gemakkelijk te construeren is.

De waarheid van het laatste besluit blijkt ook ten duidelijkste, wanneer men in aanmerking neemt, dat het bepalen van de lijn AC, uit de voorwaarde dat zij met het horizontale vlak den grootstmogelijken hoek moet maken, niets anders is, dan het bepalen der lijn, welke in het vlak, dat door A en door BE gaat, den standhoek van dit vlak met het horizontale vlak meet; want het is uit de meetkunst genoegzaam bekend, dat de hoek, welke twee vlakken met elkander maken, gelijk is aan den hoek, die twee lijnen met elkander maken, welke uit eenig punt van de gemeene doorsnede, loodregt op deze doorsnede, in de beide vlakken getrokken worden, en dat deze hoek grooter is dan die, welke twee andere lijnen maken, die uit eenig punt van de gemeene doorsnede in beide vlakken zoodanig getrokken worden, dat zij beide niet loodregt op deze doorsnede staan. Daar dan de gezochte lijn AC loodregt moet staan op de doorsnede van het vlak, door A en BE gaande, met het horizontale vlak; zoo moet zij ook loodregt staan op de lijn AE, welke, even-

wij.

wijdig van het horizontale vlak loopende, en in het vlak, door A en B gaande, gelegen zijnde, evenwijdig met deze doorsnede is.

Aanmerking. Het afgehandelde Voorstel vindt deszelfs toepassing, bij het bepalen der rigting van een afwateringskanaal, hetwelk uit een bepaald punt, naar een reeds bestaand kanaal of waterloozing, van eene bepaalde helling of *verval* moet afloopen, doordien het in de meeste gevallen het voordeeligst is, de rigting van het afwateringskanaal zoo te bepalen, dat het de grootstmogelijke helling tot den horizont hebbe, opdat er met de minste wijdte het meeste water kan geloosd worden. Ingevolge het boven bewezene blijkt het, dat de rigting van de horizontale projectie van het voordeeligste afwateringskanaal gevonden wordt, door uit het gegeven punt eene loodlijn te trekken op de lijn, welke het gegeven punt vereenigt met het punt, ter zelfde hoogte in het gegeven kanaal gelegen.

LXII. Voorstel.

Door G. Brandsteder.

Eene klok, welke 1800 pond weegt, is uit drie verschillende soorten van metaal vervaardigd, die 45, 60 en 75 cents het pond kosten. Indien nu deze klok f 1110 gekost heeft, vraagt men hoeveel pond van elke soort gebezigd is, en hoeveel antwoorden hierop in geheele getallen gevonden kunnen worden?

Opgelost *door* G. Brandsteder, F. J. Stamkart, L. J. Ulman, J. Jonkheert, J. Bassan en A. B. de Bock, Jun.

Oplossing *van* G. Brandsteder.

Stellen wij, dat er x pond van 45, y pond van 60 en $1800 - (x + y)$ pond van 75 cents gebezigd is, dan heeft men de volgende vergelijking

$$45\,x + 60\,y + 75\,\{1800 - (x + y)\} = 111000,$$

dat is, na behoorlijke ontwikkeling en herleiding,

$$15\,y = 24000 - 30\,x,$$

of door 15 deelende

$$y = 1600 - 2\,x = 2\,(800 - x),$$

en dus

$$1800 - (x + y) = 200 + x.$$

Nu kan x niet kleiner dan 1 genomen worden; want $x = 0$ nemende, zouden er slechts twee metalen gebruikt zijn; verder kan

kan x niet grooter dan 799 genomen worden, omdat $x = 800$, $y = 0$ zou maken, in welk geval er mede slechts twee metalen zouden gebezigd worden. Men kan alzoo x van 1 tot 799 ingesloten nemen, en er zijn dus 799 antwoorden in geheele getallen.

Neemt men $x = 500$, dan verkrijgt men $y = 600$ en $1800 - (x + y) = 700$ ponden.

LXIII. Voorstel.

Door J. Jonkhert.

Van de cubische vergelijking $x^3 + 8x^2 + 7x - a = 0$, *zijn twee der wortels* $x = -5 \pm \sqrt{-b}$; *men vraagt naar de waarde van* a *en* b?

Opgelost *door* J. Jonkhert, F. J. Stamkart, J. B. Volmer van Born, A. B. de Bock, Jun., L. J. Ulman en J. Bassan.

Oplossing *van* J. Jonkhert.

Daar $x = -5 + \sqrt{-b}$ en $x = -5 - \sqrt{-b}$ wortels van de voorgestelde vergelijking zijn, moeten

$$x + 5 - \sqrt{-b} \quad \text{en} \quad x + 5 + \sqrt{-b},$$

factoren van het eerste lid wezen, en dit voorste lid zal dus stelkunstig deelbaar moeten zijn door het product van deze factoren, dat is door

$$x^2 + 10x + 25 - b.$$

Deelt men nu dezen factor in het eerste lid, dat is in

$$x^3 + 8x^2 + 7x - a,$$

dan komt er tot quotient $x - 2$, en er blijft eene rest

$$(2 - b)x + (50 + 2b - a).$$

Zal alzoo de deeling stelkunstig opgaan, dan moet deze rest voor alle mogelijke waarden van x gelijk 0 wezen, en dit is onmogelijk ten zij men gelijktijdig heeft

$$2 - b = 0 \quad \text{en} \quad 50 + 2b - a = 0.$$

Uit de eerste dezer vergelijkingen volgt $b = 2$, en dit in de tweede overgebragt, komt er $a = 50 + 2b = 54$.

Hieruit volgt dan, dat de voorgestelde vergelijking, ten einde aan de vraag te beantwoorden, moet zijn

$$x^3 + 8x^2 + 7x - 54 = 0,$$

en dat twee van derzelver wortels zullen wezen

$$x = -5 + \sqrt{-2} \quad \text{en} \quad x = -5 - \sqrt{-2},$$

ter-

terwijl uit het quotient der deeling blijkt, dat de derde wortel is $x = 2$.

LXIV. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK JUN.

Men vraagt naar de waarde van de uitdrukking

$$\frac{r}{s} \times \frac{x^{-\frac{p}{q}} - y^{-\frac{p}{q}}}{y^m - x^m}$$

voor het geval van $x = y$?

OPGELOST *door* F. J. STAMKART, A. B. DE BOCK, JUN., J. BASSAN, J. B. VOLMER VAN BORN en L. J. ULMAN.

De opgegevene uitdrukking kan men ook aldus schrijven

$$-\frac{r}{s} \cdot \frac{x^{-\frac{p}{q}}}{x^m} \cdot \frac{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{p}{q}}}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^m}$$

of, wat op hetzelfde nederkomt,

$$-\frac{r}{s} \cdot \frac{1}{x^{m+\frac{p}{q}}} \cdot \frac{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{p}{q}}}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^m}.$$

Wordt nu $x = y$ gesteld, dan verandert hierdoor de eerste en tweede factor in geenen deele, zoodat wij alleen de waarde moeten vinden, die alsdan

$$\frac{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{p}{q}}}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^m}$$

zal verkrijgen, of, wat hetzelfde is, wij zullen moeten onderzoeken, welke waarde

$$\frac{1 - z^n}{1 - z^m},$$

verkrijgt voor $z = 1$. Differentierende alzoo teller en noemer ieder afzonderlijk, en deelen wij door ∂z, dan komt er

$$\frac{-n z^{n-1}}{-m z^{m-1}} = \frac{n}{m} \cdot \frac{1}{z^{m-n}},$$

welke voor $z = 1$ overgaat in $\frac{n}{m}$. Of omdat in ons geval $n = -\frac{p}{q}$ is, in $-\frac{p}{mq}$. Uit dit alles blijkt dan, dat de waarde van het opgegeven gebroken voor $x = y = a$ overgaat in

$$\frac{rp}{smq} \cdot \frac{1}{a^{m+\frac{p}{q}}}.$$

LXV. VOORSTEL.

Door S. KLIJNSMA.

Van een trapezium is gegeven eene der evenwijdige zijden. De twee aangrenzende zijden, die mede bekend zijn, hebben gelijke lengte. Men vraagt dit trapezium zoodanig te bepalen, dat de inhoud zoo groot mogelijk zij?

OPGELOST *door* S. KLIJNSMA, F. J. STAMKART, L. J. ULMAN, J. B. VOLMER VAN BORN, A. B. DE BOCK, JUN., en J. JONKBERT.

OPLOSSING *van* S. KLIJNSMA.

Zij ABCD, *Fig.* 38, het trapezium, waarin AB $= a$ en AD $=$ BC $= b$ is. Uit de gelijkheid van AD en AE met BC en BF, benevens de evenwijdigheid der lijnen AB en DC, volgt noodzakelijk de gelijkheid der hoeken D en C, alsmede de gelijkheid der hoeken DAE en CBF. Wij stellen alzoo $\angle$DAE $= \angle$CBF $= \phi$; alsdan is DE $=$ CF $= b$ *Sin.* ϕ, dus DC $= a + 2b$ *Sin.* ϕ en $\frac{1}{2}$ (AB $+$ DC) $= a + b$ *Sin.* ϕ en daar AE $=$ BF $= b$ *Cos.* ϕ is, zoo is de inhoud van het trapezium

$$I = (a + b \, Sin. \, \phi) \, . \, b \, Cos. \, \phi,$$

of, wat hetzelfde is,

$$I = ab \, Cos. \, \phi + \tfrac{1}{2} b^2 \, Sin. \, 2\phi.$$

Daar nu deze uitdrukking een maximum moet zijn, zoo hebben wij, ter bepaling van ϕ,

$$\frac{\partial I}{\partial \phi} = -ab \, Sin. \, \phi + b^2 \, Cos. \, 2\phi = 0,$$

of,

of, omdat $Cos. 2\phi = 1 - 2 Sin^2.\phi$ is,

$$-ab \; Sin.\phi + b^2 - 2b^2 \; Sin^2.\phi = 0,$$

dat is $$Sin^2.\phi + \frac{a}{2b} Sin.\phi - \tfrac{1}{2} = 0,$$

waaruit $$Sin.\phi = -\frac{a}{4b} \pm \surd\left(\frac{a^2}{16b^2} + \frac{1}{2}\right) \quad . \quad . \quad (1)$$

Om te onderzoeken, welke dezer twee waarden tot het begeerde maximum behoort, moeten wij het tweede differentiaal quotient opmaken, en hiervoor vinden wij

$$\frac{\delta^2 I}{\delta\phi^2} = -ab \; Cos.\phi - 2b^2 \; Sin. 2\phi,$$

of $$\frac{\delta^2 I}{\delta\phi^2} = -b \; Cos.\phi \, (a + 4b \; Sin.\phi),$$

en daar uit (1) volgt $a + 4b \; Sin.\phi = \pm\surd\left(\frac{a^2}{16b^2} + \frac{1}{2}\right)$, zoo doet de gevondene waarde van $Sin.\phi$ het tweede differentiaal quotient overgaan in

$$\frac{\delta^2 I}{\delta\phi^2} = \mp b \; Cos.\phi \, \surd\left(\frac{a^2}{16b^2} + \frac{1}{2}\right).$$

Nu blijkt uit de figuur ten duidelijkste, dat ϕ, hetzij dan negatief of positief genomen wordende, altijd kleiner dan 90° moet wezen, en dat alzoo $Cos.\phi$ altijd positief zal zijn; waaruit dan volgt, dat het bovenste teeken der waarde van $Sin.\phi$, als het tweede differentiaal quotient negatief makende, tot een maximum van den inhoud behoort, terwijl het benedenste teeken een minimum voor dezen inhoud doet kennen. Wij zullen ons alzoo met dit benedenste teeken, als niet tot ons onderwerp behoorende, niet verder bezig houden, te meer, daar hetzelve tot oneigenlijke vierhoeken en veelal tot onbestaanbare antwoorden aanleiding geeft, en wij hebben alzoo, voor het gevraagde maximum,

$$Sin.\phi = -\frac{a}{4b} + \surd\left(\frac{a^2}{16b^2} + \frac{1}{2}\right),$$

welke waarde, altijd positief zijnde, aantoont, dat de gegevene zijde a de kleinste van de twee evenwijdige zijden is.

Om den inhoud van dezen grootsten vierhoek te bepalen, moeten wij de gevondene waarde van ϕ in die voor I overbrengen. Nu is

$$a + b\,Sin.\,\phi = \tfrac{1}{4}\{3a + \surd(a^2 + 8b^2)\},$$

en $$b\,Cos.\,\phi = \tfrac{1}{4}\surd\{-2a^2 + 8b^2 + 2a\surd(a^2 + 8b^2)\},$$

zoodat de inhoud van het grootste trapezium zal zijn

$$I = \tfrac{1}{16}\{3a + \surd(a^2 + 8b^2)\} \times \surd\{-2a^2 + 8b^2 + 2a\surd(a^2 + 8b^2)\}.$$

Aanmerkingen. I. Uit de waarde van *Sin.* ϕ volgt nog

$$DE = b\,Sin.\,\phi = -\tfrac{1}{4}a + \tfrac{1}{4}\surd(a^2 + 8b^2),$$

en $$DC = a + 2b\,Sin.\,\phi = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}\surd(a^2 + 8b^2).$$

Deze twee waarden zamen vermenigvuldigende, komt er

$$DE \times DC = \tfrac{1}{8}\{-a + \surd(a^2 + 8b^2)\}\{a + \surd(a^2 + 8b^2)\},$$

dat is $$DE \times DC = b^2 = AD^2.$$

Daar dan DA middenevenredig is tusschen DE en DC, zoo is DAC een regte hoek. Dit zelfde besluit gaat ook voor den hoek CBD door, en hieruit volgt, dat het grootste trapezium, dat uit a en de twee gelijke zijden b kan worden zamengesteld, in eenen halven cirkel staat, waarvan de langste der twee evenwijdige zijden de middellijn is. Zijnde dit besluit voor het overige slechts een bijzonder geval, van eene veel algemeener stelling, te vinden bij J. de Gelder, *Beginselen der Meetkunst*, XVII. *Stelling*, 6. *Boek*.

II. Door middel der gevondene waarde van *Sin.* ϕ, kan men ook gemakkelijk het gevraagde grootste trapezium construeren. Uit deze waarde volgt toch terstond

$$CF = DE = \tfrac{1}{4}(-a + \surd(a^2 + 8b^2)).$$

Neemt men nu BH gelijk de diagonaal van het vierkant op b beschreven, en vereenigt men H met het midden G van AB, dan is $GH = \surd(\tfrac{1}{4}a^2 + 2b^2) = \tfrac{1}{2}\surd(a^2 + 8b^2)$. Maakt men alzoo GI = GH en deelt men BI midden door in K, dan is $BK = \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}\surd(a^2 + 8b^2)) = \tfrac{1}{4}(-a + \surd(a^2 + 8b^2))$ en dit is dus de waarde van CF. Wanneer men bijgevolg KC loodregt op BK stelt en uit B met $BC = b$ als straal een' cirkelboog beschrijft, dan wordt hierdoor het hoekpunt C en dus het geheele trapezium bepaald. Tot proef op de juistheid der constructie, moet de halve cirkel op DC beschreven, door de punten A en B gaan.

III. Is $b = a$, dan is $Sin.\,\phi = -\tfrac{1}{4} + \surd(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{16}) = \tfrac{1}{2}$ en dus $\phi = 30°$, zoodat de hoeken C en D alsdan $60°$ zijn. Het

is

is ook uit de eerste aanmerking klaar, dat in dit geval het trapezium de helft moet zijn van eenen regelmatigen zeshoek, die a tot zijde heeft.

IV. Is $a = 0$, dan wordt $Sin.\ \phi = \sqrt{\frac{1}{2}}$ en dus $\phi = 45°$. Het trapezium gaat alzoo in dit geval over in eenen regthoekigen driehoek, die b tot regthoekszijden heeft.

V. Het opgeloste vraagstuk vindt deszelfs toepassing in het bepalen van de rigting, die men, op een horizontaal vlak staande, aan de voeten zal moeten geven, ten einde het ligchaam de meeste stabiliteit te geven; deze toepassing is zoo in het oog loopende, dat wij er niet verder bij zullen blijven stilstaan.

LXVI. VOORSTEL.

Door S. KLIJNSMA.

In elken driehoek kan de middellijn van den ingeschrevenen cirkel nooit grooter zijn, dan de straal van den omgeschrevenen cirkel. Men vraagt deze stelling te bewijzen?

OPGELOST *door* S. KLIJNSMA, P. H. VAN DER MEULEN, J. B. VOLMER VAN BORN, F. J. STAMKART, L. J. ULMAN en J. JONKBERT.

OPLOSSING *van* S. KLIJNSMA.

In het 1e Deel der *Wiskunstige Oefeningen*, Voorstel VII, vindt men bewezen, dat, wanneer a, b en c de zijden van eenen driehoek zijn, de afstand der middelpunten van den in- en omgeschrevenen cirkel wordt uitgedrukt, door

$$x = \sqrt{\left\{\frac{a^2 b^2 c^2}{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)} - \frac{abc}{a+b+c}\right\}},$$

en aldaar is tevens aangetoond, dat de stralen van den om- en ingeschrevenen cirkel alsdan zullen worden voorgesteld door

$$R = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}},$$

en $$r = \tfrac{1}{2} \times \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}{a+b+c}.$$

Uit de twee laatste uitdrukkingen volgt terstond

$$2Rr = \frac{abc}{a+b+c},$$

en

en hierdoor is het dan klaar, dat de formule voor den afstand der middelpunten aldus kan worden geschreven

$$x = \sqrt{(R^2 - 2rR)},$$

of, dat hetzelfde is,

$$x = \sqrt{R(R - 2r)},$$

waarin de stelling, die betoogd moet worden, van zelve ligt opgesloten, omdat x onbestaanbaar zou worden, zoodra $2r > R$ was.

ANDERE OPLOSSING. *Door* J. B. VOLMER VAN BORN.

Stellende de drie hoeken van eenen driehoek voor door 2ϕ, 2ψ en $180^\circ - 2\phi - 2\psi$, en de stralen van de om- en ingeschrevene cirkels door R en r, dan wordt (zie DE GELDER, *Meetk. Analysis* §. 186) de betrekking tusschen deze stralen uitgedrukt door

$$\frac{R}{r} = \frac{1}{4 \, Cos.\,(\phi + \psi) \, Sin.\,\phi \, Sin.\,\psi}$$

of, dat hetzelfde is, door

$$u = \frac{r}{R} = 4 \, Cos.\,(\phi + \psi) \, Sin.\,\phi \, Sin.\,\psi \quad . \; . \; (A)$$

Wij zullen dus onderzoeken, of deze functie voor een maximum vatbaar is, en zoo wij vinden, dat deze grootste waarde gelijk $\frac{1}{2}$ is, zal hierdoor de opgegevene stelling bewezen zijn.

De vergelijking (A) ten opzigte van ϕ en ψ in het bijzonder differentierende, komt er achtervolgens

$$\frac{\partial u}{\partial \phi} = 2 \, Sin.\,2\psi \, Cos.\,2\phi - 4 \, Sin.\,2\phi \, Sin^2.\psi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \psi} = 2 \, Sin.\,2\phi \, Cos.\,2\psi - 4 \, Sin.\,2\psi \, Sin^2.\phi,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = -4 \, Sin.\,2\psi \, Sin.\,2\phi - 8 \, Cos.\,2\phi \, Sin^2.\psi,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \phi \partial \psi} = 4 \, Cos.\,2\phi \, Cos.\,2\psi - 4 \, Sin.\,2\psi \, Sin.\,2\phi,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} = -4 \, Sin.\,2\phi \, Sin.\,2\psi - 8 \, Cos.\,2\psi \, Sin^2.\phi.$$

Volgens de leer der maxima eener functie van twee veranderlijke grootheden, moeten wij hebben

$$\frac{\partial u}{\partial \phi} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial u}{\partial \psi} = 0,$$

en

en de twee eerste differentiaal-quotienten geven ons dus terstond,

$$Tang.\ 2\phi = Cot.\ \psi \quad \text{en} \quad Tang.\ 2\psi = Cot.\ \phi,$$

$$\text{of} \quad 2\phi = 90^\circ - \psi \quad \text{en} \quad 2\psi = 90^\circ - \phi,$$

waaruit gemakkelijk gevonden wordt

$$\phi = \psi = 30^\circ.$$

Zoo er dus een maximum voor u bestaan kan, moet hetzelve bij $\phi = \psi = 30^\circ$ plaats hebben, dat is, dan heeft dezelve bij den gelijkzijdigen driehoek plaats. De oppervlakkigste beschouwing van den gelijkzijdigen driehoek is genoegzaam, om te doen inzien, dat bij denzelven de betrekking $\frac{r}{R}$ of u werkelijk $\frac{1}{2}$ is, en dit blijkt ook bovendien uit de vergelijking (A); want stellende in dezelve $\phi = \psi = 30^\circ$, dan komt er $u = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Er blijft dus nog alleen over, te onderzoeken, of de gevondene waarden van ϕ en ψ de functie u werkelijk tot een maximum maken, en hiertoe is uit de leer der maxima bekend; dat deze gevondene waarden moeten voldoen aan de vergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} \times \frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2} > \left(\frac{\partial^2 u}{\partial\phi\,\partial\psi}\right)^2.$$

Brengen wij nu $\phi = \psi = 30^\circ$ over in de formulen, die wij boven voor de tweede differentiaal-quotienten van u vonden, dan komt er $\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2} = -4$ en $\frac{\partial^2 u}{\partial\phi\,\partial\psi} = -2$. Het eerste lid der verkenningsvergelijking is dus 16 en het tweede lid 4, zoodat de gevondene waarden werkelijk tot een maximum behooren. Daar dan $u = \frac{r}{R}$ nooit grooter dan $\frac{1}{2}$ kan wezen, zoo kan $2r$ nooit grooter dan R zijn, waardoor de opgegevene stelling volkomen bewezen is.

LXVII. VOORSTEL.

Door S. KLIJNSMA.

Men vraagt eenen driehoek, door eene regte lijn, in eenen driehoek en een' vierhoek te verdeelen, zoodanig, dat deze deelen niet alleen gelijken inhoud, maar ook gelijken omtrek hebben?

OPGELOST door S. KLIJNSMA, P. H. VAN DER MEULEN, F. J. STAMKART, A. B. DE BOCK, JUN. en J. BASSAN.

OPLOSSING van S. KLIJNSMA.

Laat ABC, *Fig.* 39, de gegeven driehoek zijn, en GH de gevraagde deellijn. Stellen wij AB $= a$, BC $= b$, AC $= c$, BG $= x$ en BH $= y$, dan is AH $= a - y$ en CG $= b - x$.

Daar de driehoek en vierhoek de zijde HG gemeen hebben, zullen derzelver omtrekken gelijk zijn, wanneer men heeft

$$BH + BG = AC + AH + CG,$$

of

$$x + y = c + a - y + b - x,$$

en dit geeft tot eerste vergelijking

$$2(x + y) = a + b + c,$$

zoodat wij, $\frac{1}{2}(a + b + c) = s$ stellende, zullen hebben

$$x + y = s.$$

Voorts moeten de driehoek en vierhoek gelijken inhoud hebben, en dus moet driehoek AHG de helft zijn van driehoek ABC. Nu worden de inhouden dezer driehoeken uitgedrukt door $\frac{1}{2} xy$ *Sin.* B en $\frac{1}{2} ab$ *Sin.* B, waaruit dan volgt, dat wij tot tweede vergelijking hebben

$$xy = \tfrac{1}{2} ab.$$

Uit deze vergelijkingen volgt nu $(x + y)^2 = s^2$ en $4\,xy = 2\,ab$, dus $(x - y)^2 = s^2 - 2ab$ en $x - y = \pm \sqrt{(s^2 - 2ab)}$, waaruit dan gevonden wordt

$$x = \tfrac{1}{2}(s \pm \sqrt{(s^2 - 2ab)}),$$

en

$$y = \tfrac{1}{2}(s \mp \sqrt{(s^2 - 2ab)}).$$

Aanmerkingen. Zal het vraagstuk mogelijk wezen, dan moet $s^2 > 2\,ab$ zijn, daar anders x en y beide onbestaanbaar zouden worden. Men zal dus moeten hebben

$$\tfrac{1}{4}(a + b + c)^2 > 2\,ab,$$

of

$$a + b + c > \sqrt{8\,ab},$$

en dus

$$c > \sqrt{8ab} - (a + b).$$

Voorts zal men nog moeten opletten, dat, ten einde BHG werkelijk een gedeelte van driehoek ABC uitmaakt, $y < a$ en $x < b$ moet zijn. Hebben eindelijk al deze voorwaarden plaats, dan is de constructie zoo gemakkelijk, dat wij er ons niet mede zullen ophouden, althans wanneer men x en y onder de volgende gedaante schrijft

$$x = \tfrac{1}{2}\left(s \pm \sqrt{s\left(s - \frac{2\,ab}{s}\right)}\right),$$

en

$$y = \tfrac{1}{2}\left(s \mp \sqrt{s\left(s - \frac{2\,ab}{s}\right)}\right).$$

Om

Om door een enkel voorbeeld te doen zien, hoe men handelen moet, om in elk bijzonder geval over het mogelijke of onmogelijke te oordeelen, zullen wij onderstellen, dat de zijden van den driehoek zijn 8, 9 en 2.

Nemen wij nu $a = 8$, $b = 9$ en $c = 2$, dat is, onderstellen wij, dat de gevraagde lijn de zijden 8 en 9 moet doorsnijden, dan hebben wij $\sqrt{8ab} = 24$ en $a + b = 17$, dus $\sqrt{8ab} - (a + b) = 7$, en daar $c = 2$ is, zoo is het onmogelijk, dat de gevraagde lijn de zijden 8 en 9 doorsnijdt.

Onderzoeken wij nu, of de begeerde lijn de zijden 8 en 2 kan doorsnijden; alsdan hebben wij $a = 8$, $b = 2$, en $c = 9$; zoodat $\sqrt{8ab} = 8\sqrt{2} = 11,31$ en $a + b = 10$, dus $\sqrt{8ab} - (a + b) = 1,31$ en daar $c = 9$ is, zoo is hier aan de eerste voorwaarde voldaan. Berekenen wij echter x en y, dan vinden wij deze twee antwoorden $x = 8,56$ en $y = 0,93$ of $x = 0,93$ en $y = 8,56$; welke geen van beide aan de voorwaarde voldoen, dat $x < b$ en $y < a$ moet zijn. Het is dus ook niet mogelijk, dat de begeerde deellijn de zijden 8 en 2 doorsnijdt.

Gaan wij eindelijk na, of het mogelijk is, dat de deellijn de zijden $a = 9$ en $b = 2$ doorsnijdt. Wij hebben alsdan $\sqrt{8ab} = 12$ en $a + b = 11$, dus $\sqrt{8ab} - (a + b) = 1$, en daar $c = 8$ is, zoo is de eerste voorwaarde vervuld. Berekenende nu x en y, dan vinden wij deze twee antwoorden $x = 8,43$ en $y = 1,07$ of $x = 1,07$ en $y = 8,43$. Het eerste dezer antwoorden strijdt wederom tegen de voorwaarde, dat $x < b$ moet zijn; doch het tweede gebruikende, is wezenlijk $x < b$ en $y < a$: wij hebben alzoo slechts een antwoord op het vraagstuk, dat gelijktijdig aan alle voorwaarden voldoet, en het is voor dit geval, dat wij onze figuur geteekend hebben.

LXVIII. VOORSTEL.

Door S. KLIJNSMA.

Een cirkel, benevens twee punten in den omtrek gegeven zijnde; vraagt men, door elk dezer punten eene koorde te trekken, en wel zoodanig, dat deze koorden niet alleen tot elkander in gegevene reden staan, maar bovendien elkander onder eenen gegevenen hoek doorsnijden?

Laat ABC, *Fig.* 39, de gegeven driehoek zijn, en GH de gevraagde deellijn. Stellen wij AB $= a$, BC $= b$, AC $= c$, BG $= x$ en BH $= y$, dan is AH $= a - y$ en CG $= b - x$.

Daar de driehoek en vierhoek de zijde HG gemeen hebben, zullen derzelver omtrekken gelijk zijn, wanneer men heeft

$$BH + BG = AC + AH + CG,$$

of

$$x + y = c + a - y + b - x,$$

en dit geeft tot eerste vergelijking

$$2(x + y) = a + b + c,$$

zoodat wij, $\frac{1}{2}(a + b + c) = s$ stellende, zullen hebben

$$x + y = s.$$

Voorts moeten de driehoek en vierhoek gelijken inhoud hebben, en dus moet driehoek AHG de helft zijn van driehoek ABC. Nu worden de inhouden dezer driehoeken uitgedrukt door $\frac{1}{2}\, xy\, Sin.\, B$ en $\frac{1}{2}\, ab\, Sin.\, B$, waaruit dan volgt, dat wij tot tweede vergelijking hebben

$$xy = \frac{1}{2}\, ab.$$

Uit deze vergelijkingen volgt nu $(x + y)^2 = s^2$ en $4\, xy = 2\, ab$, dus $(x - y)^2 = s^2 - 2\,ab$ en $x - y = \pm \sqrt{(s^2 - 2\,ab)}$, waaruit dan gevonden wordt

$$x = \tfrac{1}{2}(s \pm \sqrt{(s^2 - 2\,ab)}),$$

en

$$y = \tfrac{1}{2}(s \mp \sqrt{(s^2 - 2\,ab)}).$$

Aanmerkingen. Zal het vraagstuk mogelijk wezen, dan moet $s^2 > 2\,ab$ zijn, daar anders x en y beide onbestaanbaar zouden worden. Men zal dus moeten hebben

$$\tfrac{1}{4}(a + b + c)^2 > 2\,ab,$$

of

$$a + b + c > \sqrt{8\,ab},$$

en dus

$$c > \sqrt{8\,ab} - (a + b).$$

Voorts zal men nog moeten opletten, dat, ten einde BHG werkelijk een gedeelte van driehoek ABC uitmaakt, $y < a$ en $x < b$ moet zijn. Hebben eindelijk al deze voorwaarden plaats, dan is de constructie zoo gemakkelijk, dat wij er ons niet mede zullen ophouden, althans wanneer men x en y onder de volgende gedaante schrijft

$$x = \tfrac{1}{2}(s \pm \sqrt{s\,(s - \frac{2\,ab}{s})}),$$

en

$$y = \tfrac{1}{2}(s \mp \sqrt{s\,(s - \frac{2\,ab}{s})}).$$

Om

Om door een enkel voorbeeld te doen zien, hoe men handelen moet, om in elk bijzonder geval over het mogelijke of onmogelijke te oordeelen, zullen wij onderstellen, dat de zijden van den driehoek zijn 8, 9 en 2.

Nemen wij nu $a = 8$, $b = 9$ en $c = 2$, dat is, onderstellen wij, dat de gevraagde lijn de zijden 8 en 9 moet doorsnijden, dan hebben wij $\sqrt{8ab} = 24$ en $a + b = 17$, dus $\sqrt{8ab} - (a + b) = 7$, en daar $c = 2$ is, zoo is het onmogelijk, dat de gevraagde lijn de zijden 8 en 9 doorsnijdt.

Onderzoeken wij nu, of de begeerde lijn de zijden 8 en 2 kan doorsnijden, alsdan hebben wij $a = 8$, $b = 2$, en $c = 9$, zoodat $\sqrt{8ab} = 8\sqrt{2} = 11,31$ en $a + b = 10$, dus $\sqrt{8ab} - (a + b) = 1,31$ en daar $c = 9$ is, zoo is hier aan de eerste voorwaarde voldaan. Berekenen wij echter x en y, dan vinden wij deze twee antwoorden $x = 8,56$ en $y = 0,93$ of $x = 0,93$ en $y = 8,56$, welke geen van beide aan de voorwaarde voldoen, dat $x < b$ en $y < a$ moet zijn. Het is dus ook niet mogelijk, dat de begeerde deellijn de zijden 8 en 2 doorsnijdt.

Gaan wij eindelijk na, of het mogelijk is, dat de deellijn de zijden $a = 9$ en $b = 2$ doorsnijdt. Wij hebben alsdan $\sqrt{8ab} = 12$ en $a + b = 11$, dus $\sqrt{8ab} - (a + b) = 1$, en daar $c = 8$ is, zoo is de eerste voorwaarde vervuld. Berekenende nu x en y, dan vinden wij deze twee antwoorden $x = 8,43$ en $y = 1,07$ of $x = 1,07$ en $y = 8,43$. Het eerste dezer antwoorden strijdt wederom tegen de voorwaarde, dat $x < b$ moet zijn; doch het tweede gebruikende, is wezenlijk $x < b$ en $y < a$: wij hebben alzoo slechts een antwoord op het vraagstuk, dat gelijktijdig aan alle voorwaarden voldoet, en het is voor dit geval, dat wij onze figuur geteekend hebben.

LXVIII. VOORSTEL.

Door S. KLOGNSMA.

Een cirkel, benevens twee punten in den omtrek gegeven zijnde, vraagt men, door elk dezer punten eene koorde te trekken, en wel zoodanig, dat deze koorden niet alleen tot elkander in gegevene reden staat, maar bovendien elkander onder eenen gegevenen hoek doorsnijden?

OPGELOST door F. J. STAMKART en S. KEIJNSMA.

OPLOSSING van F. J. STAMKART.

Laat ABCD, *Fig.* 40, den gegeven' cirkel voorstellen, waarin A en B de gegevene punten zijn; alsdan is $\angle$ AMB $= \beta$ bekend. Onderstellen wij, dat AD en BC de gevraagde koorden zijn, zoodanig, dat $\angle$AEC $= \angle$ BED $= \alpha$ gegeven is, dan zal alles bekend zijn, zoodra wij het punt C kunnen vinden, naar hetwelk eene der koorden moet worden getrokken, en het is hierom, dat wij $\angle$ AMC $= \phi$ stellen. Door deze stelling wordt nu terstond $\angle$CMB $= \beta + \phi$, en daar CB de koorde van dezen boog is, zoo hebben wij, den straal van den cirkel gelijk r stellende,

$$BC = 2r \times Sin. \tfrac{1}{2}(\beta + \phi).$$

Daar verder de hoek α gemeten wordt door de halve som der bogen AC en BD, zoo is

$$2\alpha = \phi + \angle BMD,$$

en dus

$$\angle BMD = 2\alpha - \phi,$$

zoodat

$$\angle AMD = \beta + 2\alpha - \phi,$$

en daar AD de koorde is, die, voor den straal r, tot dezen hoek behoort, zoo is

$$AD = 2r \times Sin. \tfrac{1}{2}(\beta + 2\alpha - \phi).$$

Stellen wij nu, dat AD : BC $= a : b$ moet zijn, dan vinden wij, AD door BC deelende,

$$\frac{a}{b} = \frac{Sin. \left\{\frac{1}{2}(\beta + 2\alpha) - \frac{1}{2}\phi\right\}}{Sin. \left\{\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\phi\right\}},$$

of wanneer wij teller en noemer ontwikkelen, en tevens onder en boven door $Cos. \tfrac{1}{2}\phi$ deelen,

$$\frac{Sin. \tfrac{1}{2}(\beta + 2\alpha) - Cos. \tfrac{1}{2}(\beta + 2\alpha)\, Tang. \tfrac{1}{2}\phi}{Sin. \tfrac{1}{2}\beta + Cos. \tfrac{1}{2}\beta \,.\, Tang. \tfrac{1}{2}\phi} = \frac{a}{b},$$

uit welke vergelijking gemakkelijk gevonden wordt

$$Tang. \tfrac{1}{2}\phi = \frac{b\, Sin. \tfrac{1}{2}(\beta + 2\alpha) - a\, Sin. \tfrac{1}{2}\beta}{b\, Cos. \tfrac{1}{2}(\beta + 2\alpha) + a\, Cos. \tfrac{1}{2}\beta}.$$

Door deze vergelijking ϕ gevonden hebbende, zijn ook BC en AD bekend, waardoor dan het vraagstuk is opgelost.

Om den hoek ϕ te construeren, zoo make men AML $= \tfrac{1}{2}\beta$ en LMF $= \alpha$; verder neme men MI $= a$ en MG $= b$; wanneer men dan IK en GH loodregt op AM trekt, dan is

IK $=$

IK $= a$ *Sin.* $\frac{1}{2}\beta$, MK $= a$ *Cos.* $\frac{1}{2}\beta$, GH $= b$ *Sin.* $(\frac{1}{2}\beta + \alpha)$ en MH $= b$ *Cos.* $(\frac{1}{2}\beta + \alpha)$. Maken wij alzoo MO = MK + MH, en stellen wij loodregt op MO de lijn ON = GH − IK, dan zal, NM getrokken hebbende, ten duidelijkste NMO $= \frac{1}{2}\phi$ zijn.

Maakt men bijgevolg den boog PC gelijk den boog AP, dan zal BC eene der gevraagde koorden zijn, en om de tweede te vinden, zal men, ingevolge het vroeger bewezene, alleen $\angle$ BMD $= 2\alpha - \phi$, dat is gelijk 2 × LMF − AMC, behoeven te maken, waardoor het punt D en dus AD bepaald is.

LXIX. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK, JUN.

Men vraagt naar de waarde van de uitdrukking

$$\frac{ax^2 + Sin.(x+m)}{ax - \sqrt{a^3x}} - \frac{\sqrt[3]{(a^2x - ax^2)} + Sin.(x+n)}{x - a},$$

ingevalle $x = a$ *is?*

OPGELOST *door* A. B. DE BOCK, JUN., en F. J. STAMKART.

OPLOSSING *van* A. B. DE BOCK, JUN.

Door $x = a$ te stellen, gaat de gegevene uitdrukking over in $\infty - \infty$; doch brengen wij alles onder denzelfden noemer, dan komt er

$$\frac{\{ax^2+Sin.(x+m)\}(x-a)-\{\sqrt[3]{(a^2x-ax^2)}+Sin.(x+n)\}(ax-\sqrt{a^3x})}{(ax-\sqrt{a^3x})(x-a)}$$

of, na behoorlijke herleiding,

$$\frac{ax^3-a^2x^2+(x-a)Sin.(x+m)-\{\sqrt[3]{(a^2x-ax^2)}+Sin.(x+n)\}(ax-\sqrt{a^3x})}{(ax-\sqrt{a^3x})(x-a)}$$

en stelt men nu $x = a$, dan komt er $\frac{0}{0}$.

Stellen wij nu $x = a + y$, dan verandert dit laatste gebroken in

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} a(a+y)^3 - a^2(a+y)^2 + y\,Sin.(a+m+y) - \\ \{\sqrt[3]{(a^2(a+y)-a(a+y)^2)} + Sin.(a+n+y)\}\,\{a(a+y) - \sqrt{a^3(a+y)}\} \end{array}\right\}}{y\,\{a(a+y) - \sqrt{a^3(a+y)}\}}$$

 of

of na behoorlijke herleiding in

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} a^3y+2a^2y^2+ay^3+y\,Sin.(a+m+y)-\ldots \\ \{\sqrt[3]{(a^3+a^2y)}-a^3-2a^2y-ay^2+Sin.(a+n+y)\}\{a^2+ay-\sqrt{(a^4+a^3y)}\} \end{array}\right\}}{y(a^2+ay-\sqrt{(a^4+a^3y)})}$$

Ontwikkelen wij nu $\sqrt[3]{(a^3+a^2y)}$ en $\sqrt{(a^4+a^3y)}$ door de formule van NEWTON, dan vinden wij

$$\sqrt[3]{(a^3+a^2y)} = a + \tfrac{1}{3}y - \tfrac{1}{9}\frac{y^2}{a} + \text{enz.}$$

$$\sqrt{(a^4+a^3y)} = a^2 + \tfrac{1}{2}ay - \tfrac{1}{8}y^2 + \text{enz.}$$

en dit in ons gebroken overbrengende, komt er

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} a^3y+2a^2y^2+ay^3+y\,Sin.(a+m+y)-\{a+\frac{1}{3}y-\frac{1}{9}\frac{y^2}{a}+\text{enz.} \\ -a^3-2a^2y-ay^2+Sin.(a+n+y)\}\{\frac{1}{2}ay+\frac{1}{8}y^2-\text{enz.}\} \end{array}\right\}}{y\{\frac{1}{2}ay+\frac{1}{8}y^2-\text{enz.}\}}$$

of onder en boven door y deelende

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} a^3+2a^2y+ay^2+Sin.(a+m+y)-\{(a-a^3)+(\frac{1}{3}-2a^2)y- \\ \ldots(\frac{1}{9a}+a)y^2-\text{enz.}+Sin.(a+n+y)\}\{\frac{1}{2}a+\frac{1}{8}y-\text{enz.}\} \end{array}\right\}}{\frac{1}{2}ay+\frac{1}{8}y^2-\text{enz.}}$$

Daar nu $x = a + y$ is, zoo zal de waarde van de opgegevene uitdrukking voor $x = a$ dezelfde zijn, als die van de laatste breuk voor $y = 0$; stellende dus $y = 0$, dan komt er

$$\frac{a^3+Sin.(a+m)-\{(a-a^3)+Sin.(a+n)\}\times\frac{1}{2}a}{0}$$

waaruit dan blijkt, dat de waarde, die de opgegevene formule in het geval van $x = a$ verkrijgt, oneindig groot is.

LXX. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Een tienhoekig getal te vinden, zoodanig, dat wanneer men bij hetzelve het vijfvoud des wortels voegt en de som door driemaal den wortel deelt, het quotient juist de som der getalmerken is, waaruit het tienhoekig getal bestaat. Verheft men deze som tot de tweede magt en trekt men hiervan de gezegde som af, dan be-

bestaat de rest uit drie cijferletters, welke de volgende eigenschappen bezitten. Schrijft men het cijfer der eenheden op de plaats der honderdtallen, waardoor de cijfers der honderdtallen en tientallen in die van de tientallen en eenheden veranderen, dan vormen deze cijfers, van de linkerhand naar de regterhand tellende, eene opklimmende rekenkunstige reeks, waarin de som der tweede magten der eersten en derden terms gelijk is aan $3\frac{1}{3}$ maal het product dezer termen. Zoekt men eindelijk tot deze drie termen eenen vierden meetkunstig evenredigen, dan zal het vierkant der som van de twee laatste het vierkant der som van de twee eersten met 288 overtreffen.

OPGELOST *door* G. BRANDSTEDER, J. B. VOLMER VAN BORN, F. J. STAMKART, A. B. DE BOCK, JUN., L. J. ULMAN, J. BASSAN en J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* G. BRANDSTEDER.

Stellen wij de rekenkunstige reeks, waarvan in de opgaaf gewag wordt gemaakt, $x - y$, x en $x + y$, en dus de vierde meetkunstige evenredige tot deze drie termen gelijk $\frac{x(x+y)}{x-y}$, dan worden de twee laatste voorwaarden van het vraagstuk stelkunstig uitgedrukt door de volgende vergelijkingen

$$2x^2 + 2y^2 = 3\tfrac{1}{3}(x^2 - y^2) \quad . \; . \; . \; . \; (1)$$

en $$\left\{x + y + \frac{x(x+y)}{x-y}\right\}^2 = (2x - y) + 288 \; . \; . \; (2)$$

Uit de eerste dezer twee vergelijkingen volgt

$$6x^2 + 6y^2 = 10x^2 - 10y^2,$$

of $$x^2 = 4y^2,$$

zoodat $$x = 2y.$$

Deze waarde van x overbrengende in (2), komt er

$$\left(3y + \frac{6y^2}{y}\right)^2 = (3y)^2 + 288,$$

of $$81y^2 = 9y^2 + 288;$$

dus $$72y^2 = 288,$$

waaruit $$y = 2.$$

Wij hebben alzoo $y = 2$ en $x = 4$; maar het getal van drie cijferletters, waarvan in de opgaaf gesproken wordt, heeft, ingevolge de voorwaarde van het vraagstuk, deze gedaante;

100 x

$$100x + 10(x + y) + x - y,$$

en dit getal is alzoo 462.

Verder moet dit getal gelijk zijn aan het verschil tusschen de tweede en eerste magt van de som der cijferletters van het tienhoekig getal; stellende dus deze som s, dan is

$$s^2 - s = 462,$$

uit welke vierkantsvergelijking gevonden wordt $s = 22$, daar de tweede wortel -21, als negatief zijnde, in ons geval niet in aanmerking kan komen.

Stellen wij eindelijk het tienhoekig getal voor door $4p^2 - 3p$, hetwelk de algemeene vorm der tienhoekige getallen is, dan moet, volgens de eerste voorwaarde van het vraagstuk, de som der cijferletters worden uitgedrukt door

$$\frac{4p^2 - 3p + 5p}{3p} \text{ of } \tfrac{1}{3}(4p + 2),$$

en daar wij zoo even voor deze som 22 vonden, zoo is

$$\tfrac{1}{3}(4p + 2) = 22,$$

of

$$4p + 2 = 66,$$

waaruit $p = 16$, zoodat het begeerde tienhoekig getal is $4p^2 - 3p = 976$.

LXXI. VOORSTEL.

Door S. KLIJNSMA.

Een regte cirkelvormige kegel wordt gesneden door een plat vlak, dat het grondvlak onder eenen gegevenen hoek en volgens eene gegevene koorde doorsnijdt. Men vraagt den inhoud van de twee stukken te vinden, waarin deze kegel door dit vlak verdeeld is?

OPGELOST *door* I. R. SCHMIDT en F. J. STAMKART.

OPLOSSING *van* I. R. SCHMIDT.

Zij ACD, *Fig.* 41, de kegel, FG de koorde van het grondvlak, door welke het snijdend vlak gaat, AC de middellijn, die loodregt op deze koorde staat en FHG het snijdende vlak, dan is HBC de hoek, die dit vlak met het grondvlak maakt, en dus is EB $= m$ en HBC $= \lambda$ gegeven.

Het is genoegzaam den inhoud van een der twee stukken te berekenen, waarin de kegel door het platte vlak gesneden wordt; want

want daar de geheele inhoud van den kegel bekend is, wordt dan het andere deel door eenvoudige aftrekking gevonden.

Snijden wij den kegel door een plat vlak, gaande door den top en de koorde FG, dan snijdt hetzelve den kegel in twee andere kegels, die de cirkelsegmenten AGF en CGF tot grondvlak hebben. De inhouden dezer twee kegels worden zeer gemakkelijk gevonden; want stellende dezelve gelijk A en A′, dan is

$$A = segm.\ AFG \times \tfrac{1}{3}\ DE \text{ en } A' = segm.\ CFG \times \tfrac{1}{3}\ DE,$$

stellende dan den straal van het grondvlak r en de hoogte van den kegel h, en noemen wij den halven hoek GEF of wel den boog, die voor den straal 1 met dezen halven hoek overeenkomt, γ, dan is $m = r\ Cos.\ \gamma$ of

$$\gamma = Boog\ Cos.\ \frac{m}{r} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

hieruit volgt dan verder

$$segm.\ AFG = \tfrac{1}{2} r^2 (2\gamma - Sin.\ 2\gamma),$$

en $$segm.\ CFG = \tfrac{1}{2} r^2 (2\pi - 2\gamma + Sin.\ 2\gamma),$$

waardoor dan de inhouden der gemelde kegels worden

$$A = \tfrac{1}{6} hr^2 (2\gamma - Sin.\ 2\gamma) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$A' = \tfrac{1}{6} hr^2 (2\pi - 2\gamma + Sin.\ 2\gamma) \quad \ldots \quad (3).$$

Het zal er dus alleen op aankomen, om den inhoud te bepalen van den kegel, die D tot top en het vlak GHF tot grondvlak heeft; want stellen wij dezen inhoud X, en den inhoud van de twee gevraagde stukken I en I′, dan is klaarblijkelijk

$$I = A + X \quad \text{en} \quad I' = A' - X \quad \ldots \quad (4).$$

Vooreerst is ons hiertoe bekend, dat de inhoud X gelijk is aan het grondvlak GHF = V vermenigvuldigd met een derde van de hoogte DI. Daar nu de driehoeken DKI en BKE, als beide regthoekig en den hoek K gemeen hebbende, gelijkvormig zijn, zoo is KDI = KBE = δ en dus DI = DK $Sin.\ \delta$; maar EK = $m\ Tang.\ \delta$ zijnde, is DK = $h - m\ Tang.\ \delta$ en dus DI = DK $Sin.\ \delta = h\ Sin.\ \delta - m\ Cos.\ \delta$, zoodat

$$X = \tfrac{1}{3} (h\ Sin.\ \delta - m\ Cos.\ \delta)\ V,$$

er blijft dus nog alleen over, de waarde van den inhoud des vlaks V te bepalen.

Het is genoegzaam bekend, dat dit vlak V eene ellips, para-

boo/

bool of hyperbool is, naarmate δ kleiner, gelijk of grooter is dan de hoek DAC, en dat de vergelijking der kromme GHF, de abscissen HL = x van het punt H rekenende, in het algemeen is

$$y^2 = px - qx^2;$$

voorts zijn de waarden van p en q, wanneer men DH = c, ADC = β en BHC = α stelt, (I. R. SCHMIDT, *Hoog. Meetk.* §. 52)

$$p = 2c\,Sin.\alpha\,Tang.\tfrac{1}{2}\beta \text{ en } q = \frac{Sin.\alpha\,Sin.(\alpha-\beta)}{Cos^2.\tfrac{1}{2}\beta}.$$

De hoek β kan hierin, als de tophoek van den kegel zijnde, bekend beschouwd worden, terwijl c en α gemakkelijk in onze oorspronkelijke gegevens worden uitgedrukt; want het is vooreerst klaar, dat men heeft, $\alpha + \delta + 90^\circ - \tfrac{1}{2}\beta = 180^\circ$, zoodat

$$\alpha = 90^\circ - (\delta - \tfrac{1}{2}\beta),$$

en daar verder BC = $m + r$ is, zoo vindt men in driehoek BHC, HC = BC $\times \frac{Sin.\delta}{Sin.\alpha} = (m+r) \times \frac{Sin.\delta}{Cos.(\delta - \frac{1}{2}\beta)}$, waaruit men, omdat CD $= \frac{r}{Sin.\frac{1}{2}\beta}$ is, heeft

$$c = \frac{r}{Sin.\tfrac{1}{2}\beta} - (m+r).\frac{Sin.\delta}{Cos.(\delta-\tfrac{1}{2}\beta)};$$

zoodat wij, deze waarden in p en q overbrengende, verkrijgen

$$p = 2\left\{r\,\frac{Cos.(\delta-\tfrac{1}{2}\beta)}{Cos.\tfrac{1}{2}\beta} - (m+r)\,Sin.\delta\,Tang.\tfrac{1}{2}\beta\right\} \ldots (5)$$

$$q = \frac{Cos.(\delta-\tfrac{1}{2}\beta)\,Cos.(\delta+\tfrac{1}{2}\beta)}{Cos^2.\tfrac{1}{2}\beta} \quad \ldots \; (6).$$

Daar wij alzoo p en q in onze gegevens hebben uitgedrukt, zoo hebben wij

$$V = 2\int y\partial x = 2\int \partial x \surd(px - qx^2),$$

van welke formule de integraal verschillenden vorm heeft, naarmate q positief, nul of negatief, dat is naarmate δ kleiner, gelijk of grooter dan $90^\circ - \tfrac{1}{2}\beta$ is, hetgeen met de ellips, parabool of hyperbool overeenstemt.

Is dan q positief, of $\delta < 90^\circ - \tfrac{1}{2}\beta$, dat is, is de kromme eene ellips, dan is

$$V = 2\surd q \int \partial x \surd(\frac{p}{q}x - x^2),$$

dat

dat is (zie I. R. SCHMIDT, *Beg. der Diff. en Int. Rek.* §. 189)

$$V=\tfrac{1}{2}(2x-\tfrac{p}{q})\sqrt{(px-qx^2)}+\tfrac{1}{4}.\frac{p^2}{4\sqrt{q}}\,Boog.Cos.\frac{p-2qx}{p}.$$

Is, $\delta=90^0-\frac{1}{2}\beta$ zijnde, $q=0$, dan is voor de parabool

$$V=2\int\partial x\sqrt{px}=\tfrac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\sqrt{p}.$$

Is eindelijk de kromme een hyperbool, en dus, omdat $\delta>90^0-\frac{1}{2}\beta$ is, q negatief, dan hebben wij

$$V=2\sqrt{q}\int\partial x\sqrt{(\frac{p}{q}x+x^2)},$$

en dus (I. R. SCHMIDT, *Int. Rek.* §. 189)

$$V=\tfrac{1}{2}(2x+\tfrac{p}{q})\sqrt{(px+qx^2)}-\tfrac{1}{4}\frac{p^2}{q\sqrt{q}}\,Log.\frac{p+2qx+2\sqrt{q(px+qx^2)}}{p},$$

welke integralen zoodanig genomen zijn, dat zij voor $x=0$ verdwijnen.

In elk dezer gevallen moet nu, om den inhoud van het vlak GHF te verkrijgen, $x=$ BH genomen worden. Voor deze waarde van BH vinden wij, uit den driehoek BHC, gemakkelijk

$$BH=n=(m+r).\frac{Cos.\frac{1}{2}\beta}{Cos.(\delta-\frac{1}{2}\beta)}\;.\;.\;.\;(7)$$

en wanneer wij dit alles zamentrekken, vinden wij, dat de inhoud van de twee gevraagde stukken, door het volgende stelsel van vergelijkingen, uit de oorspronkelijke gegevens, dat is uit

AE $=r$, ADC $=\beta$, EB $=m$ en HBC $=\delta$,

kan worden afgeleid.

$$p=2\left\{r\,\frac{Cos.(\delta-\frac{1}{2}\beta)}{Cos.\frac{1}{2}\beta}-(m+r)\,Sin\,\delta\,Tang.\tfrac{1}{2}\beta\right\}\;.\;.\;(I)$$

$$q=\frac{Cos.(\delta-\frac{1}{2}\beta)\,Cos.(\delta+\frac{1}{2}\beta)}{Cos^2.\frac{1}{2}\beta}\;.\;.\;.\;.\;(II)$$

$$n=(m+r)\frac{Cos.\frac{1}{2}\beta}{Cos.(\delta-\frac{1}{2}\beta)}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(III)$$

$$\left.\begin{array}{l} V=\frac{1}{2}(2n-\frac{p}{q})\sqrt{(pn-qn^2)}+\frac{1}{4}\frac{p^2}{q\sqrt{q}}\,Boog.Cos.\frac{p-2qn}{p} \\ V=\frac{4}{3}n^{\frac{3}{2}}\sqrt{p} \\ V=\frac{1}{2}(2n+\frac{p}{q})\sqrt{(pn+qn^2)}-\frac{p^2}{4q\sqrt{q}}\,Log.\frac{p+2qn+2\sqrt{q(pn+qn^2)}}{p} \end{array}\right\}(IV)$$

naar

naarmate q positief, nul of negatief wordt, in welk laatste geval de waarde van q als positief moet worden in rekening gebragt; omdat wij het teeken in de formule reeds veranderd hebben.

$$X = \tfrac{1}{2}(r\,Cot.\tfrac{1}{2}\beta\,Sin.\,\delta - m\,Cos.\,\delta)\,V \quad . \; . \; . \; . \; . \; (V)$$

$$\gamma = Boog.\,Cos.\,\frac{m}{r} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (VI)$$

$$A = \tfrac{1}{6}r^3\,Cot.\tfrac{1}{2}\beta\,(2v - Sin.\,2v) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (VII)$$

$$A' = \tfrac{1}{6}r^3\,Cot.\tfrac{1}{2}\beta\,(2\pi - 2v + Sin.\,2v) \quad . \; . \; . \; . \; (VIII)$$

$$I = A + X \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (IX)$$

$$I' = A' - X \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (X)$$

Hierdoor is dan het Vraagstuk op de algemeenste wijze opgelost, en het kan nu niet meer moeijelijk zijn, deze oplossing op bijzondere gevallen toe te passen, indien men slechts oplet van zich niet in het teeken van m te vergissen, en bovendien vooral niet vergeet, dat wij, in de derde formule voor V, het teeken van q reeds veranderd hebben, zoodat men aldaar de negatieve waarde van q als positief in rekening moet brengen.

Stelt men m negatief en $\delta = 90°$, dan verkrijgt men het geval, dat in het IIe *Deel*, *Voorstel* CCIX, afzonderlijk behandeld is; in dit geval zal men, het bovenstaande wel begrepen hebbende, vinden $p = 2m\,Tang.\,\tfrac{1}{2}\beta$, $q = Tang^2\,\tfrac{1}{2}\beta$, $n = (r - m) \times Cot.\,\tfrac{1}{2}\beta$, $2n + \frac{p}{q} = 2r\,Cot.\,\tfrac{1}{2}\beta$ en $\sqrt{(pn + qn^2)} = \sqrt{(r^2 - m^2)}$, en door deze waarden in de derde formule voor V te brengen, zal men, in aanmerking nemende dat $r\,Cot.\,\tfrac{1}{2}\beta = h$ is, vinden

$$V = h\sqrt{(r^2 - m^2)} - \frac{m^2 h}{r}\,Log.\,\frac{h + \sqrt{(r^2 - m^2)}}{m}$$

zijnde dit dezelfde formule, die in gezegd Voorstel voor B gevonden is, wel te verstaan, wanneer men eene drukfout, welke aldaar is ingeslopen, verbetert; de overige substitutiën verrigtende, zal men tot dezelfde uitkomsten geraken, die in gemeld Voorstel zijn opgegeven.

Aanmerking. Wanneer, *Fig.* 42, de kegel in eenen cilinder overgaat, dan is de kromme GHF altijd eene ellips, doch dan kunnen de opgegevene formulen niet gebruikt worden, omdat

als-

[illegible] A′ en X beide oneindig worden. Het ſtuk, tusſchen GCF en GHF begrepen, kan ondertusſchen in dit geval bepaald worden, door middel van het ligchaam te ſnijden door vlakken, evenwijdig met FG en loodregt op FCG; want ſtellende CK $= x$, dan is DD′ $= 2\sqrt{(2rx - x^2)}$ en KI $=$ BK $\times$ *Tang.* δ $= (m + r - x)$ *Tang.* δ, zoodat de differentiaal van den inhoud zal zijn

$$\partial V = 2\,(m + r - x)\,Tang.\,\delta \times \partial x \sqrt{(2rx - x^2)},$$

$$\text{dus } V = 2\,Tang.\,\delta \left\{ (m + r) \int \partial x \sqrt{(2rx - x^2)} - \int x \partial x \sqrt{(2rx - x^2)} \right\}.$$

Nu is (I. R. SCHMIDT, *Int. Rek.* §. 209)

$$\int \partial x \sqrt{(2rx - x^2)} = -\tfrac{1}{2}(r - x)\sqrt{(2rx - x^2)} + \tfrac{1}{2} r^2\, Boog.\,Cos.\,\frac{r - x}{r}$$

$$\text{en } \int x \partial x \sqrt{(2rx - x^2)} = -\tfrac{1}{6}(3r^2 + rx - 2x^2)\sqrt{(2rx - x^2)} + \tfrac{1}{2} r^3\, B.C.\,\frac{r - x}{r},$$

wèl te verſtaan, wanneer de integralen zoodanig genomen worden, dat zij voor $x = 0$ verdwijnen. Deze waarden ſubſtitueerende, verkrijgen wij dan:

$$V = 2\,Tang.\,\delta \left\{ \left(-\tfrac{1}{2} mr + \left(\tfrac{2}{3} r + \tfrac{1}{2} m\right) x - \tfrac{1}{3} x^2\right) \sqrt{(2rx - x^2)} \ldots \right.$$

$$\left. + \tfrac{1}{2} r^2 m\, Boog.\,Cos.\,\frac{r - x}{r} \right\},$$

en hierin $x = r + m$ ſtellende, komt er voor den inhoud van het gevraagde ſtuk, na herleiding,

$$V = Tang.\,\delta \left\{ \tfrac{1}{3}(2r^2 + m^2)\sqrt{(r^2 - m^2)} + \tfrac{1}{2} r^2 m\, Boog.\,Cos. - \frac{m}{r} \right\},$$

waarin men voor $Boog.\,Cos. - \dfrac{m}{r}$ ook kan ſchrijven $\pi - Boog.\,Cos.\,\dfrac{m}{r}$.

GEVOLGEN. 1°. Gaat FG door de as van den cilinder, dan is $m = 0$, en in dit bijzonder geval komt er

$$V = Tang.\,\delta \times \tfrac{2}{3} r.$$

2°. Is $m = r$, *Fig.* 43, dan verkrijgt men voor het afgeſneden ſtuk

$$V = Tang.\,\delta \times \tfrac{1}{2} r^2 \pi.$$

LXXII. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

De ſom der ſinusſen en de ſom der coſinusſen te vinden eener reeks van bogen, die met gelijke verſchillen opklimmen?

Opgelost door I. R. Schmidt, A. B. de Bock, Jun., F. J. Stamkart en L. J. Ulman.

Oplossing *van* I. R. Schmidt.

Laat gesteld worden

$Sin.x+Sin.(x+a)+Sin.(x+2a)+enz.+Sin.(x+(n-1)a)=y(1)$,

dan vinden wij, door te differentieren en door ∂x te deelen,

$$Cos.x+Cos.(x+a)+Cos.(x+2a)+enz.+Cos.(x+(n-1)a)=\frac{\partial y}{\partial x}(2).$$

Deze vergelijking andermaal differentierende en door $-\partial x$ deelende, komt er

$$Sin.x+Sin.(x+a)+Sin.(x+2a)+enz.+Sin.(x+(n-1)a)=-\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.(3),$$

en daar het eerste lid gelijk y gesteld is, zoo geeft ons dit de vergelijking

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-y.$$

Onder de verschillende wijze, waarop deze vergelijking geintegreerd kan worden, komt ons de volgende het eenvoudigste voor. Uit

$$\partial^2 y=-y\partial x^2,$$

volgt $\qquad 2\partial y.\partial^2 y=\partial x^2\times -2y\partial y,$

en daar wij bij het differentieren ∂x standvastig hebben ondersteld, zoo is de integraal dezer vergelijking klaarblijkelijk

$$\partial y^2=\partial x^2(C^2-y^2),$$

en dus $\qquad \partial y=\partial x\sqrt{(C^2-y^2)},$

dat is $\qquad \partial x=\frac{\partial y}{\sqrt{(C^2-y^2)}},$

waaruit $\qquad x=C'+Boog.\,Sin.\frac{y}{C},$

of $\qquad y=C\,Sin\,(x-C'),$

brengende dus de waarden van y en $\frac{\partial y}{\partial x}$ in (1) en (2) over, komt er

$$Sin.x+Sin.(x+a)+Sin.(x+2a)+enz.+Sin.(x+(n-1)a)$$
$$=C\,Sin.(x-C')\ \ldots\ldots\ (I)$$
$$Cos.x+Cos.(x+a)+Cos.(x+2a)+enz.+Cos.(x+(n-1)a)$$
$$=C\,Cos.(x-C')\ \ldots\ldots\ (II)$$

zoo-

zoodat er niet meer overblijft dan de standvastige grootheden C en C' te bepalen.

Hiertoe stellen wij in (I) achtervolgens $x = 0$ en $x = a$, waardoor wij vinden

$Sin.\,a + Sin.\,2a + Sin.\,3a + enz. + Sin.\,(n-1)a = -C\,Sin.\,C'$,

en $Sin.\,a + Sin.\,2a + Sin.\,3a + enz. + Sin.\,(n-1)a + Sin.\,na = C\,Sin.\,(a - C')$

waarvan het verschil is

$Sin.\,na = C\{Sin.\,(a-C') + Sin.\,C'\} = 2C\,Sin.\,\tfrac{1}{2}a\,Cos.\,(C' - \tfrac{1}{2}a)$,

zoodat $$C\,Cos.\,(C' - \tfrac{1}{2}a) = \frac{Sin.\,na}{2\,Sin.\,\tfrac{1}{2}a} \quad \ldots \ldots \text{(A)}$$

Stellen wij op dezelfde wijze in (II) achtervolgens $x = 0$ en $x = a$, dan verkrijgen wij

$1 + Cos.\,a + Cos.\,2a + enz. + Cos.\,(n-1)a = C\,Cos.\,C'$,

en $Cos.\,a + Cos.\,2a + enz. + Cos.\,(n-1)a + Cos.\,na = C\,Cos.\,(a - C')$,

waarvan het verschil is

$-(1 - Cos.\,na) = C\{Cos.\,(a-C') - Cos.\,C'\} = 2C\,Sin.\,\tfrac{1}{2}a\,Sin.\,(C' - \tfrac{1}{2}a)$

waaruit $$C\,Sin.\,(C' - \tfrac{1}{2}a) = -\frac{Sin^2.\,\tfrac{1}{2}na}{Sin.\,\tfrac{1}{2}a} \quad \ldots \ldots \text{(B)}$$

Deelende (B) door (A), dan komt er

$$Tang.\,(C' - \tfrac{1}{2}a) = -\frac{2\,Sin^2.\,\tfrac{1}{2}na}{Sin.\,na} = -Tang.\,\tfrac{1}{2}na,$$

zoodat $C' - \tfrac{1}{2}a = -\tfrac{1}{2}na$ en bijgevolg

$$C' = -\tfrac{1}{2}(n-1)a \quad \ldots \ldots \text{(C)}$$

en dit in (A) overbrengende, komt er

$$C = \frac{Sin.\,na}{2\,Sin.\,\tfrac{1}{2}a\,Cos.\,(C' - \tfrac{1}{2}a)} = \frac{Sin.\,na}{2\,Sin.\,\tfrac{1}{2}a\,Cos.\,\tfrac{1}{2}na},$$

dat is $$C = \frac{Sin.\,\tfrac{1}{2}na}{Sin.\,\tfrac{1}{2}a} \quad \ldots \ldots \ldots \text{(D)}$$

Hierdoor zijn dan de standvastige grootheden C en C' bepaald, en wanneer wij dezelve in (I) en (II) overbrengen, zal er komen

$$Sin.\,x + Sin.\,(x+a) + enz. + Sin.\,(x+(n-1)a) = \frac{Sin.\,\tfrac{1}{2}na}{Sin.\,\tfrac{1}{2}a}\,Sin.\,(x + \tfrac{1}{2}(n-1)a)$$

$$Cos.\,x + Cos.\,(x+a) + enz. + Cos.\,(x+(n-1)a) = \frac{Sin.\,\tfrac{1}{2}na}{Sin.\,\tfrac{1}{2}a}\,Cos.\,(x + \tfrac{1}{2}(n-1)a).$$

Gevolgen. Hieruit zal men nog gemakkelijk de volgende formulen afleiden

$$Sin.a+Sin.2a+Sin3a+Sin4a+enz.+Sin(n-1)a=\frac{Sin.\frac{1}{2}naSin.\frac{1}{2}(n-1)a}{Sin.\frac{1}{2}a}$$

$$Cos.a+Cos\,2a+Cos.3a+Cos.4a+enz.+Cos(n-1)a=\frac{Cos\,\frac{1}{2}naSin.\frac{1}{2}(n-1)a}{Sin.\frac{1}{2}a}$$

$$\frac{Sin.x+Sin.(x+a)+Sin.(x+2a)+enz.+Sin.(x+(n-1)a)}{Cos.x+Cos.(x+a)+Cos.(x+2a)+enz.+Cos\,(x+(n-1)a)}=Tang.(x+\tfrac{1}{2}(n-1)a)$$

$$\frac{Sin.\,a+Sin.\,2a+Sin.\,3a+enz+Sin.\,(n-1)a}{Cos.\,a+Cos.\,2a+Cos.\,3a+enz.+Cos.\,(n-1)a}=Tang.\,(\tfrac{1}{2}na).$$

ANDERE OPLOSSING *van* I. R. SCHMIDT.

Men kan ook zonder differentiaal- of integraal-rekening op de volgende wijze tot de gevondene formulen geraken. Volgens de bekende goniometrische formulen hebben wij

$$Sin^2.\,b - Sin^2.\,a = Sin.\,(b+a)\,Sin.\,(b-a)$$
$$Sin^2.\,c - Sin^2.\,b = Sin.\,(c+b)\,Sin.\,(c-b)$$
$$Sin^2.\,d - Sin^2.\,c = Sin.\,(d+c)\,Sin.\,(d-c)$$
$$enz. \qquad\qquad enz.$$
$$Sin^2\,p - Sin^2.\,o = Sin.\,(p+o)\,Sin.\,(p-o)$$
$$Sin^2.\,q - Sin^2.\,p = Sin.\,(q+p)\,Sin.\,(q-p)$$

en nemende hiervan de som, dan komt er

$$\begin{aligned}Sin^2.\,q - Sin^2.\,a = {} & Sin.\,(b+a)\,Sin.\,(b-a)\\ & + Sin.\,(c+b)\,Sin.\,(c-b)\\ & + Sin.\,(d+c)\,Sin.\,(d-c)\\ & + enz.\\ & + Sin.\,(q+p)\,Sin.\,(q-p);\end{aligned}$$

Stellen wij nu $b=a+u$, $c=a+2u$, $d=a+3u$, *enz.* tot $p=a+(n-1)u$ en $q=a+nu$, dan is $b-a=c-b=d-c=enz.=u$, en bijgevolg is

$$Sin^2.(a+nu)-Sin^2.a=Sin.\,u\{Sin.\,(2a+u)+Sin.\,(2a+3u)$$
$$+Sin.\,(2a+5u)+enz.+Sin.\,(2a+(2n-1)u)\}$$

of $Sin.(2a+u)+Sin.\,(2a+3u)+enz.+Sin.\,(2a+(2n-1)u)=$
$$\frac{Sin^2.\,(a+nu)-Sin^2.a}{Sin.\,u},$$

Stellen wij dan $2a+u=x$ en $2u=a$, dan is $u=\frac{1}{2}a$ en $a=\frac{2x-a}{4}$, waardoor onze vergelijking overgaat in

Sin. x

$$Sin.\,x + Sin.(x+a) + Sin.(x+2a) + enz. + Sin.(x+(n-1)a) = \frac{Sin^2.\frac{1}{4}(2x+(2n-1)a) - Sin^2.\frac{1}{4}(2x-a)}{Sin.\frac{1}{2}a}$$

welke, omdat $Sin^2.\,p - Sin^2.\,p' = Sin.\,(p+p')\,Sin.(p-p')$ is, overgaat in

$$Sin.\,x + Sin.(x+a) + Sin.(x+2a) + enz. + Sin.(x+(n-1)a) = \frac{Sin.\frac{1}{2}na\,Sin.(x+\frac{1}{2}(n-1)a)}{Sin.\frac{1}{2}a}$$

zijnde dit dezelfde formule, die wij door de eerste oplossing gevonden hebben.

De formule voor de som der cosinussen kan op eene soortgelijke wijze gevonden worden; doch het is gemakkelijker, dezelve uit die voor de som der sinussen af te leiden. Deze laatste kan namelijk aldus geschreven worden

$$Cos.(90^\circ - x) + Cos.(90^\circ - x - a) + Cos.(90^\circ - x - 2a) + enz. + Cos.(90^\circ - x - (n-1)a) = \frac{Cos.(90^\circ - x - \frac{1}{2}(n-1)a)\,Sin. - \frac{1}{2}na}{Sin. - \frac{1}{2}a},$$

en stellende hierin $90^\circ - x = y$ en $a = -\beta$, dan komt er

$$Cos.\,y + Cos.(y+\beta) + Cos.(y+2\beta) + enz. + Cos.(y+(n-1)\beta) = \frac{Sin.\frac{1}{2}n\beta\,Cos.(y+\frac{1}{2}(n-1)\beta)}{Sin.\frac{1}{2}\beta},$$

hetwelk wederom dezelfde formule van de eerste oplossing is.

Het is echter gemakkelijk in te zien, dat de eerste oplossing veel meer regtstreeks tot de gevraagde formule leidt, daar men bij de tweede in den eersten opslag niet duidelijk inziet, waartoe de berekeningen dienen, en op welke wijze dezelve tot het gevraagde doel zullen voeren.

OPLOSSING *van* A. B. DE BOCK, JUN.

Stellen wij de reeksen voor door

$$Sin.\,x + Sin.\,(x+y) + enz. \ldots + Sin.\,(x+ny) = S$$
$$Cos.\,x + Cos.\,(x+y) + enz. \ldots + Cos.\,(x+ny) = S'.$$

Wanneer men dan in de bekende formulen

$$Sin.\,x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \text{ en } Cos.\,x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2},$$

achtervolgens voor x schrijft $x+y$, $x+2y$, enz. tot $x+ny$,

 en

en de uitkomsten in de twee gestelde reeksen substitueert, dan zal men verkrijgen

$$S=\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{(x+y)\sqrt{-1}}+e^{(x+2y)\sqrt{-1}}+enz.+e^{(x+ny)\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

$$-\frac{e^{-x\sqrt{-1}}+e^{-(x+y)\sqrt{-1}}+e^{-(x+2y)\sqrt{-1}}+enz.+e^{-(x+ny)\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

$$S'=\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{(x+y)\sqrt{-1}}+e^{(x+2y)\sqrt{-1}}+enz.+e^{(x+ny)\sqrt{-1}}}{2}$$

$$+\frac{e^{-x\sqrt{-1}}+e^{-(x+y)\sqrt{-1}}+e^{-(x+2y)\sqrt{-1}}+enz.+e^{-(x+ny)\sqrt{-1}}}{2}.$$

De tellers van elke dezer breuken zijn klaarblijkelijk meetkunstige reeksen; wanneer wij alzoo dezelve door den bekenden regel sommeren, verkrijgen wij

$$S=\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{(x+(n+1)y)\sqrt{-1}}}{2(1-e^{y\sqrt{-1}})\sqrt{-1}}-\frac{e^{-x\sqrt{-1}}-e^{-(x+(n+1)y)\sqrt{-1}}}{2(1-e^{-y\sqrt{-1}})\sqrt{-1}}$$

$$S'=\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{(x+(n+1)y)\sqrt{-1}}}{2(1-e^{y\sqrt{-1}})}+\frac{e^{-x\sqrt{-1}}-e^{-(x+(n+1)y)\sqrt{-1}}}{2(1-e^{y\sqrt{-1}})},$$

neemt men nu in aanmerking, dat in het algemeen

$$e^{z\sqrt{-1}}=Cos.z+Sin.z\sqrt{-1},$$

en

$$e^{-z\sqrt{-1}}=Cos.z-Sin.z\sqrt{-1};$$

is, dan gaan hierdoor onze formulen over in

$$S=\frac{Cos.x+Sin.x\sqrt{-1}-Cos.(x(n+1)y)-Sin.(x+(n+1)y)\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}\{1-Cos.y-Sin.y\sqrt{-1}\}}$$

$$-\frac{Cos.x-Sin.x\sqrt{-1}-Cos.(x+(n+1)y)+Sin.(x+(n+1)y)\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}\{1-Cos.y+Sin.y\sqrt{-1}\}},$$

$$S'=\frac{Cos.x+Sin.x\sqrt{-1}-Cos.(x+(n+1)y)-Sin.(x+(n+1)y)\sqrt{-1}}{2(1-Cos.y-Sin.y\sqrt{-1})}$$

$$+\frac{Cos.x-Sin.x\sqrt{-1}-Cos.(x+(n+1)y)+Sin.(x+(n+1)y)\sqrt{-1}}{2(1-Cos.y+Sin.y\sqrt{-1})};$$

of, wanneer wij, in elke dezer formulen, de termen onder den-

zelfden noemer brengen, en in acht nemen, dat in het algemeen $Sin. (a \pm b) = Sin. a\, Cos. b \pm Cos. a\, Sin. b$ is

$$S = \frac{Sin. x - Sin. (x+(n+1)y) + Sin. (y-x) + Sin. (x+ny)}{2 - 2\, Cos. y}$$

of, wanneer wij den eersten en derden, benevens den tweeden en vierden term, door de bekende formule voor $Sin. p \pm Sin. q$ tot producten herleiden en onder en boven door $2\, Sin. \frac{1}{2} y$ deelen

$$S = \frac{Cos. (x - \frac{1}{2}y) - Cos. (x + \frac{1}{2}(2n+1)y)}{2\, Sin. \frac{1}{2}y},$$

welke nu door de bekende formule voor $Cos. q - Cos. p$ gemakkelijk herleid wordt tot

$$S = \frac{Sin. (x + \frac{1}{2} ny)\, Sin. \frac{1}{2}(n+1)y}{Sin. \frac{1}{2}y}.$$

De formule voor S' op dezelfde wijze behandelende, zal men verkrijgen

$$S' = \frac{Cos. (x + \frac{1}{2} ny)\, Sin. \frac{1}{2}(n+1)y}{Sin. \frac{1}{2}y},$$

welke laatste formule ondertusschen ook zonder veel moeite uit de eerste wordt afgeleid.

LXXIII. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Eenige massive regte cirkelvormige cilinders, van gelijken straal en hetzelfde gewigt P liggen zoodanig op een cilindervlak, waarvan de rigtlijn een cirkelboog is, en de beschrijvende lijnen horizontaal loopen, dat zij alle elkander in dit cilindervlak aanraken, en bijgevolg al deze aanrakingslijnen mede horizontaal loopen. Men vraagt, welke kracht, er tegen den benedensten cilinder in gegevene rigting zal moeten worden aangebragt, ten einde, de wrijving niet in aanmerking nemende, dit geheele stelsel van cilinders in evenwigt te houden?

OPGELOST *door* I. R. SCHMIDT en F. J. STAMKART.

OPLOSSING *van* I. R. SCHMIDT.

§ 1. Onderstellen wij vooreerst, dat er slechts twee cilinders zijn, die op de hellende vlakken BA en CB, *Fig.* 44, zoodanig rusten, dat het gemeenschappelijk rakend vlak BB', door de horizontale lijn B gaat, volgens welke deze hellende vlakken elkander doorsnijden, dan is het klaar, dat wanneer de stralen dezer

 ci-

cilinders even groot zijn, BB′ den hoek ABC midden door deelt, en dat de lijn PP′, welke de middelpunten vereenigt, met de stralen PQ en P′Q′ gelijke hoeken δ maakt. Stellen wij nu de hoeken, welke de vlakken BA en CB met den horizont maken, gelijk α en β, dan maken de verticalen, die door P′ en P gaan, met P′Q′ en PQ, mede hoeken gelijk α en β.

Ontbinden wij de kracht P, die in P verticaal naar beneden werkt in de rigtingen PQ en PP′, dan wordt de eerste door het vlak BC in evenwigt gehouden, en wij hebben voor de tweede

$$P : D = \text{Sin. } \delta : \text{Sin. } \beta \quad \text{of} \quad D = P \times \frac{\text{Sin. } \beta}{\text{Sin. } \delta}.$$

De kracht D drukt natuurlijk met derzelver geheel vermogen op den tweeden cilinder, en op het punt P′ werken dus de krachten P en D, de eerste verticaal, en de tweede in de rigting PP′. Ontbindende dan beide deze krachten in de rigtingen P′Q′ en evenwijdig aan BA, dan worden de eersten door het vlak BA in evenwigt gehouden, terwijl wij voor de twee laatste vinden

$$P' = P \text{ Sin. } \alpha \quad \text{en} \quad D' = D \text{ Sin. } \delta = P \text{ Sin. } \beta;$$

brengen wij dus op P eene kracht aan, evenwijdig met AB en gelijk de som der krachten P′ en D′, dan zal dezelve alles in rust houden, en deze kracht is alzoo

$$X = P (\text{Sin. } \alpha + \text{Sin. } \beta).$$

Daar nu P Sin. β de kracht is, die men noodig heeft, om, evenwijdig met BC aangebragt, den bovensten cilinder alleen in evenwigt te houden, en P Sin. α de kracht, welke, evenwijdig met AB aangebragt, den benedensten cilinder alleen in evenwigt houdt, zoo volgt hieruit, *dat de kracht* X, *benoodigd om, evenwijdig met het benedenste vlak, beide cilinders in evenwigt te houden, gelijk is aan de som der krachten, diemen behoeft, om elk der cilinders afzonderlijk, evenwijdig met het vlak, waarop zij liggen, in evenwigt te houden.*

§ 2. Onderstellen wij verder, dat er drie cilinders van gelijken straal zijn, die op de vlakken AB, BC en CD, *Fig.* 45, rusten, en dat de rakende vlakken BB′ en CC′ wederom door de punten B en C gaan, dan maakt wederom PP′ gelijke hoeken δ met PQ en P′Q′, terwijl P′P″ gelijke hoeken δ' met P′Q′ en

P″Q″

$P''Q''$ maakt. Stellen wij nu de hoeken, die de vlakken AB, BC en CD met den horizont maken, gelijk α, β en γ, dan zijn dit tevens de hoeken, welke de verticalen, door P'', P' en P gaande, met $P''Q''$, $P'Q'$ en PQ maken.

Ontbinden wij de kracht, die in P verticaal naar beneden werkt, loodregt op CD en in de rigting PP', dan wordt de eerste door CD gedragen, en voor de tweede hebben wij

$$P : D = Sin.\,\delta : Sin.\,\gamma, \quad \text{dus} \quad D = P \times \frac{Sin.\,\gamma}{Sin.\,\delta}.$$

Op het middelpunt P' werkt dus de kracht P verticaal, en de kracht D in de rigting PP', en ontbinden wij elk derzelve loodregt op BC en in de rigting $P'P''$, dan worden de twee eerste door BC gedragen, terwijl wij voor de twee laatste hebben

$$P : D' = Sin.\,\delta' : Sin.\,\beta, \quad \text{dus} \quad D' = P\,\frac{Sin.\,\beta}{Sin.\,\delta'}$$

$$\text{en} \quad D : D'' = Sin.\,\delta' : Sin.\,\delta, \quad \text{dus} \quad D'' = D\,\frac{Sin.\,\delta}{Sin.\,\delta'} = P\,\frac{Sin.\,\gamma}{Sin.\,\delta'},$$

zoodat de geheele druk der twee bovenste cilinders tegen den benedensten wordt uitgedrukt door

$$D_1 = D' + D'' = P \times \frac{Sin.\,\beta + Sin.\,\gamma}{Sin.\,\delta'}.$$

Op het middelpunt P'' van den benedensten cilinder werkt dan eindelijk de kracht P verticaal naar beneden, en de kracht D_1 in de rigting $P'P''$. Ontbinden wij dan beide in de rigtingen $P''Q''$ en evenwijdig aan BA, dan worden de eerste door BA opgehouden, terwijl de twee laatste worden uitgedrukt door

$$D_1' = P\,Sin.\,\alpha \quad \text{en} \quad D_1'' = D_1\,Sin.\,\delta' = P\,(Sin.\,\beta + Sin.\,\gamma),$$

en de kracht X, die alzoo evenwijdig met AB moet worden aangebragt, om de drie cilinders in evenwigt te houden, wordt voorgesteld door

$$X = P\,(Sin.\,\alpha + Sin.\,\beta + Sin.\,\gamma),$$

zoodat het besluit van § 1. hier wederom woordelijk blijft doorgaan.

§ 3. Zijn er, *Fig.* 46, meer dan drie cilinders van gelijken straal en gelijk gewigt, die op de omschrevene wijze tegen hellende vlakken en tegen elkander rusten, dan blijft de geheele loop der oplossing onveranderd, en indien de hellende vlakken achtervolgens hoe-

hoeken α, β, γ, δ, ε, *enz.* met den horizont maken, zal de kracht X, die tegen den benedensten cilinder evenwijdig met het benedenste hellende vlak moet worden aangebragt, om het geheele zamenstel in rust te houden, worden uitgedrukt door

$$X = P(Sin.\alpha + Sin.\beta + Sin.\gamma + Sin.\delta + Sin.\varepsilon + enz.)$$

dat is: *deze kracht zal altijd gelijk zijn aan de som der krachten, die men noodig heeft, om elk der cilinders, evenwijdig met de vlakken, waarop zij liggen, in evenwigt te houden.*

§ 4. Nemen wij nu aan, *Fig.* 46, dat de hoeken, welke de hellende vlakken met elkander maken, alle even groot zijn, dan klimmen de hoeken α, β, γ, δ, *enz.*, die deze hoeken met den horizont maken, volgens eene rekenkunstige reeks op; want stellen wij de hoeken, die deze stukken met elkander maken, gelijk μ, dan is klaarblijkelijk $\beta - \alpha = \gamma - \beta = \delta - \gamma = enz. = 180° - \mu$, waaruit

$$\beta = \alpha + (180° - \mu);\ \gamma = \alpha + 2(180° - \mu);\ \delta = \alpha + 3(180° - \mu);\ enz.$$

Stellen wij alzoo, dat er n cilinders boven elkander liggen, dan zullen wij, kortheidshalve $180° - \mu = \lambda$ stellende, voor die gevallen hebben,

$$X = P\{Sin.\alpha + Sin.(\alpha + \lambda) + Sin.(\alpha + 2\lambda) + enz. + Sin.(\alpha + (n-1)\lambda)\}.$$

De som dezer sinussen kan nu gemakkelijk gevonden worden; want hiertoe behoeven wij in de eerste der eindformulen van het voorgaande vraagstuk alleen $x = \alpha$ en $a = \lambda$ te stellen, zoodat wij zullen vinden

$$X = P \times \frac{Sin.\ \tfrac{1}{2}n\lambda}{Sin.\ \tfrac{1}{2}\lambda} \times Sin.(\alpha + \tfrac{1}{2}(n-1)\lambda) \quad \ldots \quad (A).$$

§ 5. Zijn de hoeken ABC, BCD, CDE, *enz.* alle even groot en de stralen der cilinders, die elkander en de vlakken op omschrevene wijze raken, mede even groot, dan is het blijkbaar, dat AB = BC = CD = DE = *enz.* zal wezen. Wordt alzoo door Q, Q′ en Q″ een cirkelboog gebragt, dan zal dezelve door al de overige punten Q gaan, en tevens de lijnen AB, BC, CD *enz.* benevens al de cirkels in de punten Q, Q′, Q″, *enz.* aanraken. Het cilindervlak, door den boog MN voorgesteld, is dus ten opzigte der massive cilinders werkelijk in denzelfden toestand, welke in de opgaaf

van

van het vraagstuk is omschreven, en de kracht X, die wij in § 3. bepaald hebben, zal dus ook de kracht zijn, welke al de cilinders op het cilindervlak MN in evenwigt zal houden.

§ 6. Moest de kracht X niet evenwijdig met de benedenste raaklijn AB, maar in eene willekeurige rigting VW aangebragt worden, dan zou hierdoor de oplossing in geenen deele veranderen; want men behoeft alsdan alleen de gevondene kracht X in twee andere te ontbinden, waarvan de eerste in de rigting RQ en de andere in de gegevene rigting VP werkt; de eerste wordt dan door het punt Q in evenwigt gehouden, en de tweede zal de gevraagde kracht zijn, zoodanig dat, den hoek VPR = Φ stellende, deze kracht zal worden uitgedrukt door X *Tang.* Φ.

§ 7. Het is gemakkelijk in te zien, dat de gevondene formule alleen gebruikt mag worden, tot zoo lang de hoek, die het bovenste vlak met den horizont maakt, niet grooter dan 90° is, en wel omdat wij hebben aangenomen, dat de hellende vlakken evenwigt maken met al de krachten, die loodregt op dezelve werken, hetgeen zou ophouden met de waarheid overeenkomstig te zijn, zoodra een dezer vlakken voorover helde. Zal dus de uitgebragte formule werkelijk doorgaan, dan moet $a + (n - 1)\lambda$ niet grooter, dan 90° zijn.

§ 8. Stellen wij in de formule voor X, $a + (n - 1)\lambda = 90°$, dan is $a + \frac{1}{2}(n - 1)\lambda = 90° - \frac{1}{2}(n - 1)\lambda$, en hierdoor verkrijgen wij voor dit bijzonder geval, dat in *Fig.* 47 is voorgesteld,

$$X = P \times \frac{Sin.\frac{1}{2}n\lambda \times Cos.\frac{1}{2}(n-1)\lambda}{Sin.\frac{1}{2}\lambda},$$

hetwelk ook aldus geschreven kan worden

$$X = \frac{1}{2}P\left(\frac{Sin.\frac{1}{2}(2n-1)\lambda}{Sin.\frac{1}{2}\lambda} + 1\right).$$

§ 9. Stellen wij in de formule voor X, $a = 0$, in welk geval de kracht X horizontaal werkt, dan wordt dezelve

$$X = P \times \frac{Sin.\frac{1}{2}n\lambda\, Sin.\frac{1}{2}(n-1)\lambda}{Sin.\frac{1}{2}\lambda},$$

zijnde dit geval afgebeeld in *Fig.* 48.

§ 10. Is $a = 0$, en tevens $a + (n - 1)\lambda = 90°$, dan is $\lambda = \frac{90°}{n - 1}$ en voor dit geval verkrijgen wij alzoo

X =

$$X = P \times \frac{Sin.\left(\frac{n}{n-1}.45^\circ\right) \times Cos.45^\circ}{Sin.\left(\frac{1}{n-1}.45^\circ\right)} = \tfrac{1}{2} P \left(1 + Cot.\frac{45^\circ}{n-1}\right),$$

welk geval eindelijk in *Fig.* 49 is voorgesteld.

§ 11. Uit deze oplossing laten zich nog vele merkwaardige gevolgen afleiden, waarvan wij er, om niet te langwijlig te worden, slechts één zullen opgeven.

Daar in onze oplossing van den vorm der cilinders, die op het vlak rusten, geen ander gebruik gemaakt is, dan zoo verre uit dezen vorm bleek, dat de lijnen, welke de zwaartepunten vereenigden, door de raakpunten gingen, zal de formule (A) blijven doorgaan zoo lang, *Fig.* 50, de ligchamen gelijk en gelijkvormig zijn, alle hetzelfde gewigt hebben, en elkander volgens platte vlakken aanraken, die door de as van het cilindervlak gaan. Stellen wij dus de som der gewigten van al deze ligchamen Q en derzelver aantal n, dan is $P = \frac{1}{n} Q$ en de formule (A) gaat over in

$$X = \frac{1}{n} Q . \frac{Sin.\tfrac{1}{2} n \lambda}{Sin.\tfrac{1}{2}\lambda} Sin.(a + \tfrac{1}{2}(n-1)\lambda).$$

Stellen wij verder den hoek ACB of $(n-1)\lambda = \delta$, dan is $\lambda = \frac{\delta}{n-1}$, en hierdoor verandert deze formule in

$$X = \frac{1}{n} Q \times \frac{Sin.\frac{n}{2(n-1)}\delta}{Sin.\frac{1}{2(n-1)}\delta} \times Sin.(a + \tfrac{1}{2}\delta).$$

Stellen wij eindelijk in deze formule $n = \infty$, dan wordt $\frac{1}{\infty} = 0$, $Sin.\frac{n}{2(n-1)}\delta = Sin.\tfrac{1}{2}\delta$ en $Sin.\frac{1}{2(n-1)}\delta = 0$, zoodat alsdan X overgaat in $\frac{0}{0} \times Sin.\tfrac{1}{2}\delta . Sin.(a + \tfrac{1}{2}\delta)\, Q$; en om deze waarde te bepalen, zal men dus moeten onderzoeken, wat de waarde is van $\frac{\frac{1}{n}}{Sin.\frac{1}{2(n-1)}\delta}$ op het oogenblik dat $n = \infty$ genomen wordt.

Dit.

Differentieeren wij dan teller en noemer ten opzigte van n, en deelen beide door δn, dan komt er

$$\frac{-\frac{1}{n^2}}{-\frac{1}{2}\delta.\frac{1}{(n-1)^2}Cos.\frac{1}{2(n-1)}.\delta} = \frac{2(n-1)^2}{\delta n^2} \times Sec.\frac{1}{2.(n-1)}.\delta,$$

welke formule, door de stelling van $n = \infty$, klaarblijkelijk overgaat in $\frac{2}{\delta}$, zoodat wij voor dit geval zullen hebben

$$X = Q \times \frac{2}{\delta} Sin.\tfrac{1}{2}\delta.\ Sin.\ (a + \tfrac{1}{2}\delta).$$

In dit geval, *Fig.* 51, is δ de geheele hoek, waartusschen het ligchaam begrepen is, terwijl a de hoek is, die de eerste lijn CB met de verticaal maakt. Eindelijk beteekent in $\frac{2}{\delta}$, de letter δ der lengte van den boog, welke voor den straal 1 met den hoek δ overeenstemt.

LXXIV. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Drie punten A, B *en* C, *Fig.* 52, *in eenig plat vlak gegeven zijnde, vraagt men de meetkunstige plaats van al de punten* M *in dit vlak te vinden, welke de eigenschap hebben, dat de lijnen* MA *en* MC, *uit* M *tot de punten* A *en* C *getrokken, met* MB *gelijke hoeken maken?*

OPGELOST *door* I. R. SCHMIDT en F. J. STAMKART.

OPLOSSING *van* I. R. SCHMIDT.

De gevraagde kromme kan zeer gemakkelijk door punten geconstrueerd worden; want het is klaar, dat wanneer men op AB en BC gelijkvormige cirkelsegmenten beschrijft, het punt M, waarin deze segmenten elkander snijden, een punt van de voorgestelde kromme zal zijn. Niets is nu gemakkelijker, dan deze gelijkvormige cirkelsegmenten te beschrijven; want vooreerst moeten derzelver middelpunten in de lijnen liggen, die loodregt door het midden van AB en CB gaan, en daar verder de stralen van gelijkvormige segmenten tot elkander in reden zijn als de koorden, zoo zal men een dezer segmenten, bij voorbeeld, dat op AB met eenen willekeurigen straal kunnen beschrijven, en dan

zal

zal de straal, waarmede het andere segment beschreven moet worden, vierde evenredig zijn tot AB, BC en den eerstgebezigden straal.

Deze constructie voor zeer veel punten verrigtende, zal men den vorm van de kromme lijn ZCBAOBMZ′, waarvan al de punten aan de voorwaarde van het vraagstuk voldoen, gemakkelijk kunnen nagaan, en men zal bevinden, dat deze kromme door de drie gegevene punten gaat, benevens door het punt O, waarin de loodlijn, uit B op AC nedergelaten, de lijn AC ontmoet. Verder zal men ontwaren, dat deze constructie, behalve de punten van de kromme lijn *ZZ′*, nog al de punten van de onbepaald voortloopende regte lijn XX′ geeft, die door A en C gaat, en het is ook uit den aard der zaak gemakkelijk in te zien, dat al deze punten aan de voorwaarde van het vraagstuk beantwoorden; want welk punt M′ men in XX′ aanneemt, vallen de lijnen AM′ en CM′ op elkander, en maken dus met M′B denzelfden hoek. Men zal zich verder, door verschillende punten in de kromme *ZZ′* aan te nemen, gemakkelijk kunnen overtuigen, dat alle mogelijke wijzen, waarop AM en CM met BM, ter eener of ter andere zijde gelijke hoeken kunnen maken, in deze kromme en de lijn XX′ zijn opgesloten.

Ten einde de vergelijking van deze kromme lijn te vinden, nemen wij de lijn XX′, die door de gegevene punten A en C gaat, als as der abscissen aan, terwijl wij YY′, door het gegeven punt B loodregt op AC getrokken, als de as der ordinaten beschouwen, zoodanig, dat wij nu de vergelijking tusschen OP $= x$ en MP $= y$ zullen moeten bepalen.

Ter bepaling van de onderlinge ligging der gegevene punten A, B en C stellen wij verder OC $= a$, OA $= b$ en OB $= c$; alsdan is CP $= a + x$, AP $= x - b$ en MB′ $= y - c$, waardoor wij verder vinden

CP = MP × *Tang.* CMP of $x + a = y$ *Tang.* CMP,
BB′ = MB′ × *Tang.* BMP of $x = (y - c)$ *Tang.* BMP,
AP = MP × *Tang.* AMP of $x - b = y$ *Tang.* AMP,

en hieruit is dus

$$\text{Tang. CMP} = \frac{x + a}{y};\ \text{Tang. BMP} = \frac{x}{y - c};\ \text{Tang. AMP} = \frac{x - b}{y}.$$

Door

Door middel van deze uitdrukkingen verkrijgen wij dan

$$Tang.\ \mathrm{CMB} = Tang.\ (\mathrm{CMP} - \mathrm{BMP}) = \frac{\frac{x+a}{y} - \frac{x}{y-c}}{1 + \frac{x(x+a)}{y(y-c)}},$$

$$Tang.\ \mathrm{BMA} = Tang.\ (\mathrm{BMP} - \mathrm{AMP}) = \frac{\frac{x}{y-c} - \frac{x-b}{y}}{1 + \frac{x(x-b)}{y(y-c)}},$$

of, wat hetzelfde is,

$$Tang.\mathrm{CMB} = \frac{(x+a)(y-c)-xy}{y(y-c)+x(x+a)};\ Tang.\ \mathrm{BMA} = \frac{xy-(x-b)(y-c)}{y(y-c)+x(x-b)},$$

en daar deze hoeken, en dus ook derzelver tangenten, even groot moeten zijn, zoo geeft ons dit de vergelijking

$$\frac{(x+a)(y-c)-xy}{y(y-c)+x(x+a)} = \frac{xy-(x-b)(y-c)}{y(y-c)+x(x-b)},$$

of $$\frac{ay-cx-ac}{y^2-cy+x^2+ax} = \frac{by+cx-bc}{y^2-cy+x^2-bx},$$

dat is, met het product der noemers multiplicerende,

$$(y^2-cy+x^2+ax)(by+cx-bc) = (y^2-cy+x^2-bx)(ay-cx-ac),$$

of $$\{y^2-cy+(x^2-bx)\}\{ay-c(x+a)\}$$
$$-\{y^2-cy+(x^2+ax)\}\{by+c(x-b)\}=0.\ (1)$$

welke, ontwikkeld en naar de magten van y gerangschikt, geeft

$$\left.\begin{array}{l} ay^3 - acy^2 + a(x^2-bx)y \\ \quad\ \ -cxy^2 + \qquad\qquad c^2xy - c(x^3-bx^2) \\ \quad\ \ -acy^2 + \qquad\qquad ac^2y - ac(x^2-bx) \\ -by^3 + bcy^2 - b(x^2+ax)y \\ \quad\ \ -cxy^2 + \qquad\qquad c^2xy - c(x^3+ax^2) \\ \quad\ \ +bcy^2 - \qquad\qquad bc^2y + bc(x^2+ax) \end{array}\right\} = 0,$$

en de vergelijking der voorgestelde kromme is alzoo

$$(a-b)y^3 - 2c(x+a+b)y^2 + ((a-b)x^2 + 2(c^2-ab)x + (a-b)c^2)y$$
$$-2c(x^3+(a-b)x^2-abx) = 0\ .\ .\ .\ (A).$$

Het moet bij den eersten opslag vreemd schijnen, dat de lijn XX', waarvan $y = 0$ de vergelijking is, niet in onze vergelijking begrepen is, offchoon de constructie zoo wel als de beschouwing van de figuur ons deed zien, dat al de punten van de-

deze lijn werkelijk aan de voorwaarde van het vraagstuk beantwoorden. Wij moeten echter wèl in het oog houden, dat wij in onze oplossing ondersteld hebben, dat BM den hoek der lijnen AM en CM midden door deelt, en dat alzoo de gelijke hoeken AMB en CMB aan verschillenden kant van de lijn BM vallen, hetgeen bij de punten van de lijn XX′ geen plaats heeft, daar de gelijke hoeken aldaar elkander bedekken, en dus aan dezelfde zijde van BM liggen. Om dus de punten van XX′ mede in onze vergelijking te besluiten, zouden wij niet hebben moeten stellen *Tang.* AMB $=$ *Tang.* CMB, maar *Tang.* AMB $=$ $\pm$ *Tang.* CMB, en hierdoor zou de vergelijking (1) zijn geworden

$$\{y^2 - cy + (x^2 - bx)\}\ \{ay - c\,(x + a)\}$$
$$\mp \{y^2 - cy + (x^2 + ax)\}\ \{by + c\,(x - b)\} = 0,$$

en daar wij reeds gezien hebben, dat het bovenste teeken tot de vergelijking (A) voert, hebben wij alleen te onderzoeken, tot welke vergelijking het benedenste teeken aanleiding geeft. Dit teeken gebruikende, en de vergelijking ontwikkelende, komt er

$$\left\{\begin{array}{llll} ay^3 & - acy^2 + a\,(x^2 - bx)\,y & & \\ & - cxy^2 + & c^2x\,y - & c\,(x^3 - bx^2) \\ & - acy^2 + & ac^2\,y - & ac\,(x^2 - bx\,) \\ + by^3 & - bcy^2 + b\,(x^2 + ax)\,y & & \\ & + cxy^2 - & c^2x\,y + & c\,(x^3 + ax^2) \\ & - bcy^2 + & bc^2\,y - & bc\,(x^2 + ax\,) \end{array}\right\} = 0,$$

dat is, na weglating der termen, die elkander vernietigen,

$$(a+b)\,y^3 - 2\,c\,(a+b)\,y^2 + (a+b)\,(x^2+c^2)\,y = 0,$$

of
$$y\,(y^2 - 2\,cy + x^2 + c^2) = 0,$$

dat is
$$y\,\{(y - c)^2 + x^2\} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (A')$$

en aan deze vergelijking wordt voldaan, door te nemen

$$y = 0 \quad \text{of} \quad (y - c)^2 + x^2 = 0,$$

van welke de eerste werkelijk al de punten van de lijn XX′ als oplossing van ons vraagstuk doet kennen, terwijl de tweede niets anders voldaan kunnende worden, als door te stellen $x = 0$ en $y = c$, het punt B aanwijst. Wij zullen ons alzoo in den verderen loop van onze oplossing alleen met de vergelijking (A) bezig houden, daar dezelve al de punten van de kromme ZZ′ bevat.

Om

Om de punten te bepalen, waarin deze kromme de as XX′ doorsnijdt, moeten wij $y = 0$ stellen, waardoor (A) overgaat in

$$x^3 + (a - b)\,x^2 - abx = 0 \quad . \; . \; . \quad (B)$$

van welke vergelijking de wortels zijn

$$x = 0, \qquad x = -a \qquad \text{en} \qquad x = b.$$

De kromme snijdt alzoo XX′ in de twee gegevene punten A en C, omdat dezelve met $x = b$ en $x = -a$ overeenstemmen, benevens in den oorsprong O, al hetgeen volmaakt overeenstemt met de constructie.

Ten einde de punten te vinden, waarin de kromme de as YY′ snijdt, moeten wij in (A) stellen $x = 0$, en dit geeft

$$(a - b)\,y^3 - 2c\,(a - b)\,y^2 + (a - b)\,c^2y = 0,$$

of

$$y^3 - 2cy^2 + c^2y = 0. \quad . \; . \; . \; . \quad (C).$$

Deze vergelijking heeft eenen wortel $y = 0$ en bovendien twee gelijke wortels $y = c$; dit toont aan, dat de kromme éénmaal door den oorsprong O, doch tweemaal door het gegeven punt B gaat, en de constructie bevestigt dit volkomen.

Differentieren wij de vergelijking (A), dan komt er

$$\{3(a-b)y^2-4c(x+a-b)y+(a-b)x^2+(2c^2-ab)x+(a-b)c^2\}\delta y+$$
$$\{-2cy^2+(2(a-b)x+2(c^2-ab))y-2c(3x^2+2(a-b)x-ab)\}\delta x=0,$$

waaruit wij voor het eerste differentiaal quotient vinden

$$\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{2cy^2-2\{(a-b)x+2(c^2-ab)\}y+2c\{3x^2+2(a-b)x-ab\}}{3(a-b)y^2-4c(x+a-b)y+\{(a-b)x^2+(2c^2-ab)x+(a-b\;c^2\}} \;.(D),$$

en daar deze uitdrukking de trigonometrische tangens van den hoek voorstelt, welke de raaklijn met de as der abscissen maakt, kan dezelve dienen, om aan elk willekeurig punt van onze kromme lijn de raaklijn te trekken, omdat voor elk gegeven punt der kromme zoowel y als x voor bekend kan worden gehouden, en niets gemakkelijker is, dan uit een gegeven punt eene lijn te trekken, die met eene gegevene lijn eenen bekenden hoek maakt. Gaan wij dan over, om de rigting der raaklijn voor eenige merkwaardige punten der kromme lijn te bepalen.

Voor $y = 0$, waarmede $x = 0$, $x = -a$ en $x = b$ overeenkomt, is

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{2c\,(3x^2 + 2\,(a - b)\,x + ab)}{(a - b)\,x^2 + 2\,(c^2 - ab)\,x + (a - b)\,c^2}.$$

Stellende hierin $x = 0$, dan komt er voor de rigting der raaklijn van het punt O

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{2c\times - ab}{(a-b)\,c^2} = -\frac{2ab}{c\,(a-b)},$$

waardoor de raaklijn DD′ van het punt O zeer gemakkelijk geconstrueerd kan worden.

Nemende verder $x = b$, dan komt er

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{2c(3b^2+2(a-b)b-ab)}{(a-b)b^2+2(c^2-ab)b+(a-b)c^2} = \frac{2bc}{c^2-b^2},$$

en hierdoor is de raaklijn EE′ van het punt A bepaald.

Nemende eindelijk $x = -a$, dan verkrijgen wij

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{2c(3a^2-2(a-b)a-ab)}{(a-b)a^2-2(c^2-ab)a+(a-b)c^2} = \frac{2ac}{a^2-c^2},$$

waardoor de raaklijn FF′ van het punt C gevonden is.

Zonderlinger is het geval, waarin wij beginnen met in (D) te stellen $x = 0$, waarmede $y = 0$ en $y = c$ overeenstemt. Wij vinden alsdan

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{2cy^2-2(c^2-ab)y-2abc}{3(a-b)y^2-4c(a-b)y+c^2(a-b)},$$

of

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{2}{a-b}\times\frac{cy^2-(c^2-ab)y-abc}{3y^2-4cy+c^2},$$

dat is, omdat teller en noemer door $y-c$ deelbaar zijn,

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{2(cy+ab)}{(a-b)(3y-c)} \;\ldots\ldots\; (2).$$

Stellen wij hierin $y = 0$, dan vinden wij voor de raaklijn van O dezelfde uitdrukking als boven, maar nemen wij $y = c$, dan vinden wij ter bepaling der raaklijnen van B schijnbaar

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{2(c^2+ab)}{(a-b)(3c-c)} = \frac{c^2+ab}{c(a-b)},$$

en men moet nu natuurlijker wijze vragen, tot welken der twee takken, die zich in B snijden, deze raaklijn behoort. Elk dezer takken heeft klaarblijkelijk eene verschillende raaklijn; doch construeert men de laatstgevondene uitdrukking, dan zal men bevinden, dat de hoek, welke hieruit ontstaat, met geen' dezer takken overeenstemt. Deze zwarigheid ontstaat hieruit, dat in dit éénige punt van de kromme, voor eene zelfde waarde van x en van y, het

quo-

quotient $\frac{\partial y}{\partial x}$ twee verschillende waarden moet hebben, en dus van de oplossing eener vierkantsvergelijking moet afhangen; terwijl bij al de overige punten dit quotient slechts eene waarde heeft, en deze zelfde zwarigheid zal men altijd ontmoeten, zoo dra er zich verschillende takken van eene zelfde kromme lijn in een zelfde punt doorsnijden. Zie hier hoe deze zwarigheid kan worden weggenomen.

Daar de vergelijking (A) door moet blijven gaan, welke gelijktijdige aangroeijingen x en y ook ondergaan, zoo moet dezelve nog blijven bestaan, wanneer wij x en y doen veranderen in $x + \partial x$ en $y + \partial y$. Hierdoor verkrijgen wij nu

$$\left.\begin{array}{llll}
(a-b)y^3 & +3(a-b)y\partial y & +3(a-b)y\partial y^2 & +ab\partial y^3 \\
-2cxy^2 & -4cxy\partial y & -2cx\partial y^2 & -2c\partial x\partial y^2 \\
-2c(a-b)y^2 & -2cy^2\partial x & -4cy\partial x\partial y & +(a-b)\partial x^2\partial y \\
+(a-b)x^2y & -4c(a-b)y\partial y & -2c(a-b)\partial y^2 & -2c\partial x^3 \\
+2(c^2-ab)xy & +2(a-b)xy\partial x & +(a-b)y\partial x^2 & \\
+(a-b)c^2y & +(a-b)x^2\partial y & +2(a-b)x\partial x\partial y & \\
-2cx^3 & +2(c^2-ab)x\partial y & +2(c^2-ab)\partial x\partial y & \\
-2c(a-b)x^2 & +2(c^2-ab)y\partial x & -6cx\partial x^2 & \\
+2abcx & +(a-b)c^2\partial y & -2(a-b)c\partial x^2 & \\
 & -6cx^2\partial x & & \\
 & -2(a-b)cx\partial x & & \\
 & +2abc\partial x & &
\end{array}\right\} = 0.$$

Welke overeenkomstige waarden er nu ook voor x en y mogen genomen worden, zoo verdwijnt de eerste kolom altijd, omdat dezelve niet anders is, dan het eerste lid van de vergelijking (A). Stemt dus met eene bepaalde waarde van x en y slechts een punt der kromme overeen, en dus ook slechts eene waarde van $\frac{\partial y}{\partial x}$, dan zal dezelve door middel van de tweede kolom gevonden worden, welke alsdan niet verdwijnt, en waartegen de verdere kolommen als van hoogeren rang moeten worden weggelaten. Stemt met eene zelfde waarde van x en y een dubbel punt der kromme overeen, dan bestaan er, voor deze waarde van x en y, twee waarden van $\frac{\partial y}{\partial x}$; deze zullen dus door

eene vierkantsvergelijking bepaald moeten worden, en in dit geval zullen deze waarden van x en y niet alleen de eerste, maar ook de tweede kolom doen verdwijnen, en de twee waarden van $\frac{\delta y}{\delta x}$ zullen nu door de derde kolom bepaald worden, die nu niet verdwijnen zal, en waartegen de verdere kolommen, als differentialen van hoogeren rang bevattende, zullen moeten worden weggelaten. Op dezelfde wijze zouden de waarden van x en y, die tot een driedubbel punt van eene kromme behoorden, de drie eerste kolommen doen verdwijnen, en de vierde kolom zou dan de drie overeenkomstige waarden van $\frac{\delta y}{\delta x}$ doen kennen, en zoo vervolgens. In ons geval geeft $x = 0$ en $y = c$ een dubbel punt, namelijk het punt B van de kromme te kennen, en deze waarden in de laatste vergelijking substituerende, zal men werkelijk bevinden, dat dezelve niet alleen de eerste, maar ook de tweede kolom doet verdwijnen, terwijl de derde kolom, waartegen wij nu de vierde moeten weglaten, door deze substitutie overgaat in

$$c(a-b)\delta y^2 - 2(c^2+ab)\delta y\delta x - c(a-b)\delta x^2 = 0,$$

of

$$\left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2 - \frac{2(c^2+ab)}{c(a-b)}\left(\frac{\delta y}{\delta x}\right) - 1 = 0,$$

uit welke vierkantsvergelijking, na herleiding, gevonden wordt

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{c^2+ab \pm \sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}}{c(a-b)},$$

welke uitdrukking, door het dubbele teeken, nu de twee verschillende hoeken δ en δ' doet kennen, onder welke de raaklijnen van het punt P de as XX′ ontmoeten. Het product der twee waarden van $\frac{\delta y}{\delta x}$, dat is van *Tang.* δ en *Tang.* δ', is gelijk aan -1, zoodat *Tang.* δ *Tang.* $\delta' = -1$ of $1 +$ *Tang.* δ *Tang.* $\delta' = 0$, en hieruit volgt *Tang.* $(\delta' - \delta) = \frac{Tang.\, \delta' - Tang.\, \delta}{1 + Tang.\, \delta\, Tang.\, \delta'} = \infty$, zoodat $\delta' - \delta = 90°$. Maar $\delta' - \delta$ is niets anders dan de hoek, onder welken de raaklijnen van het punt B elkander snijden, waaruit volgt, dat deze raaklijnen loodregt op elkander staan,

en

en dat de twee takken, die door B gaan, elkander in dit punt regthoekig doorsnijden.

Het is uit den loop der kromme reeds duidelijk in te zien, dat voor x gelijk plus of minus oneindig, y mede oneindig wordt. Om nu te onderzoeken, welke betrekking y en x op dit oogenblik tot elkander hebben, stellen wij $\frac{x}{y} = z$ of $x = yz$, en hierdoor verandert de vergelijking (A) in

$$(a-b)-2c(z+\frac{a-b}{y})+((a-b)z^2+\frac{2(c^2-ab)}{y}z+\frac{(a-b)c^2}{y^2})-$$
$$\ldots\ldots 2c(z^3+\frac{a-b}{y}z^2-\frac{ab}{y^2}z)=0;$$

stellende dus $y = \pm\infty$, dan komt er

$$(a-b)-2cz+(a-b)z^2-2cz^3=0,$$

of
$$(a-b)(1+z^2)-2cz(1+z^2)=0,$$

dat is
$$(a-b-2cz)(1+z^2)=0,$$

waaraan alleen voldaan kan worden, door de stelling van

$$a-b-2cz=0,$$

of
$$z=\frac{a-b}{2c},$$

omdat men den anderen factor $1+z^2=0$ stellende, de onbestaanbare waarden $z=+\sqrt{-1}$ en $z=-\sqrt{-1}$ verkrijgen zou. Er heeft dus voor $y=\infty$ slechts één tak plaats, bij welken $\frac{x}{y}=\frac{a-b}{2c}$ is, en deze tak nadert alzoo meer en meer tot regte lijn, waarvan de vergelijking is

$$y=\frac{2c}{a-b}x+C,$$

dat wil zeggen, deze tak heeft eene asymptoot, welke de as xx' onder eenen hoek snijdt, die $\frac{2c}{a-b}$ tot tangens heeft.

Dit besluit kunnen wij ook door de waarde van $\frac{\partial y}{\partial x}$ verkrijgen. Schrijven wij dezelve namelijk onder den vorm

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{2c-2\left\{(a-b)\frac{x}{y}+\frac{c^2-ab}{y}\right\}+2c\left\{3\frac{x^2}{y^2}+\frac{2(a-b)}{y}\cdot\frac{x}{y}-\frac{ab}{y^2}\right\}}{3(a-b)-4c\left\{\frac{x}{y}+\frac{a-b}{y}\right\}+\left\{(a-b)\frac{x^2}{y^2}+\frac{2(c^2-ab)}{y}\cdot\frac{x}{y}+\frac{(a-b)c^2}{y^2}\right\}},$$

 dan

dan komt er voor $y = \infty$ en $\frac{x}{y} = \frac{a-b}{2c}$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2c - 2.\frac{(a-b)^2}{2c} + 6c.\frac{(a-b)^2}{4c^2}}{3(a-b) - 4c.\frac{a-b}{2c} + \frac{(a-b)^3}{4c^2}} = \frac{8c^3 + 2c(a-b)^2}{4c^2(a-b) + (a-b)^3}$$

$$= \frac{2c(4c^2 + (a-b)^2)}{(a-b)(4c^2 + (a-b)^2)} = \frac{2c}{a-b},$$

hetgeen eveneens aantoont, dat de tangenten der oneindige takken, dat is de asymptoten, met XX′ eenen hoek maken, die $\frac{2c}{a-b}$ tot tangens heeft.

Om deze asymptoten volkomen te bepalen, zouden wij de punten moeten zoeken, waarin zij de as XX′ doorsnijden, en hiertoe zouden wij, den gewonen weg volgende, de waarden moeten bepalen, die de formulen $y\frac{\partial x}{\partial y} - x$, voor x en y oneindig, verkrijgt. Daar dit echter in ons geval tot zwarigheden aanleiding geeft, zullen wij eenen anderen weg inslaan.

Trekken wij door O de lijn UU′, zoodanig, dat $Tang.\,a = \frac{2c}{a-b}$ is, dan loopt dezelve evenwijdig met de gezochte asymptoten. Nemen wij dan UU′ en VV′, door O loodregt op UU′ getrokken, als assen der coordinaten aan, dan zullen er voor elke waarde van MQ $= v$ slechts twee waarden van OQ $= u$ bestaan, en hierdoor wordt het meer dan waarschijnlijk, dat in de vergelijking tusschen u en v de derde magt van u niet meer zal voorkomen. Dit zoo zijnde, zullen wij de waarde van u, door middel eener vierkantsvergelijking, in v kunnen uitdrukken, en dan zal de waarde van v, welke u oneindig maakt, den afstand doen kennen, op welken de asymptoot van UU′ gelegen is. Gaan wij dan over, om de vergelijking tusschen u en v te bepalen. Wij hebben hiertoe terstond

OP = OR − SQ of $x = u\,Cos.\,a - v\,Sin.\,a$

en MP = QR + MS of $y = u\,Sin.\,a + v\,Cos.\,a$,

en wij zullen dus deze waarden van x en y slechts in de vergelijking (A) hebben over te brengen.

Schrij-

Schrijven wij te dien einde (A) onder deze gedaante:

$$(x^2+y^2)((a-b)y-2cx)-2c(a-b)(x^2+y^2)+2(c^2-ab)xy+ c((a-b)cy+2abx)=0 \quad \ldots\ldots \quad (A'),$$

Nu vinden wij uit de waarden van x en y terstond

$$x^2+y^2=u^2+v^2,$$

$$xy=(u^2-v^2)\,Sin.\,\alpha\,Cos.\,\alpha+uv\,(Cos^2.\,\alpha-Sin^2.\,\alpha),$$

$$(a-b)y-2cx=((a-b)\,Sin\,\alpha-2c\,Cos.\,\alpha)u+((a-b)\,Cos.\,\alpha+2c\,Sin.\,\alpha)v,$$

$$c(a-b)y+2abx=(c(a-b)\,Sin.\,\alpha+2ab\,Cos.\,\alpha)u+(c(a-b)\,Cos.\,\alpha-2ab\,Sin.\,\alpha)v;$$

maar $Tang.\,\alpha=\frac{2c}{a-b}$ zijnde, zoo is

$$Sin.\,\alpha=\frac{2c}{\sqrt{\{(a-b)^2+4c^2)\}}} \text{ en } Cos.\,\alpha=\frac{a-b}{\sqrt{\{(a-b)^2+4c^2)\}}}$$

en hierdoor veranderen de vier laatste vergelijkingen in

$$x^2+y^2=u^2+v^2,$$

$$xy=(u^2-v^2).\frac{2c(a-b)}{(a-b)^2+4c^2}+uv.\frac{(a-b)^2-4c^2}{(a-b)^2+4c^2},$$

$$(a-b)y-2cx=\frac{(a-b)^2+4c^2}{\sqrt{\{(a-b)^2+4c^2\}}}v=v\sqrt{\{(a-b)^2+4c^2\}},$$

$$c(a-b)y+2abx=\frac{2(a-b)(c^2+ab)}{\sqrt{\{(a-b)^2+4c^2\}}}u+\frac{c((a-b^2-4ab)}{\sqrt{\{(a-b)^2+4c^2\}}}v,$$

waardoor dan (A') overgaat in

$$(u^2+v^2)v\sqrt{\{(a-b)^2+4c^2\}}-2c(a-b)(u^2+v^2)+(u^2-v^2)\frac{4c(a-b)(c^2-ab)}{(a-b)^2+4c^2}$$

$$+uv.\frac{2(c^2-ab)\{(a-b)^2-4c^2\}}{(a-b)^2+4c^2}+u.\frac{2c(a-b)(c^2+ab)}{\sqrt{\{(a-b)^2+4c^2\}}}+v.\frac{c^2\{(a-b)^2-4ab\}}{\sqrt{\{(a-b)^2+4c^2\}}}=0,$$

of wanneer wij alles volgens de magten van u rangschikken,

$$\left\{v\sqrt{\{(a-b)^2+4c^2\}}-\frac{2c(a-b)(a^2+b^2+2c_2)}{(a-b)^2+4c^2}\right\}u^2+\ldots\ldots$$

$$\left\{v\frac{2(c^2-ab)\{(a-b)^2-4c^2\}}{(a-b)^2+4c^2}+\frac{2c(a-b)(c^2+ab)}{\sqrt{\{(a-b)^2+4c^2\}}}\right\}u+\ldots$$

$$\left\{v^3\sqrt{\{(a-b)^2+4c^2\}}-v^2\frac{2c(a-b)(a^2-4ab+b^2+6c^2)}{(a-b)^2+4c^2}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\ldots v\frac{c^2(a^2-6ab+b^2)}{\sqrt{\{(a-b)^2+4c^2\}}}\right\}=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

waarin u^3 werkelijk niet aanwezig is.

Stellen wij deze vergelijking kortheidshalve voor door

$$(pv+q)u^2+2(p'v+q')u+(pv^2+rv^2+sv)=0 \quad \ldots (E')$$

dan vinden wij uit dezelve

$$u=-\frac{p'v+q'}{pv+q}\pm V\left\{\left(\frac{p'v+q'}{pv+q}\right)^2-\frac{pv^2+rv^2+sv}{pv+q}\right\}.(E'')$$

waaruit blijkt, dat u niet oneindig kan worden, ten zij $pv+q=0$ of $v=-\frac{q}{p}$ genomen worde. Brengen wij dan hierin de waarden van q en p over, namelijk

$$p=V((a-b)^2+4c^2)$$

en

$$q=-\frac{2c(a-b)(a^2+b^2+2c^2)}{(a-b)^2+4c^2},$$

zoo vinden wij, ter bepaling van de asymptoot,

$$v=\frac{2c(a-b)(a^2+b^2+2c^2)}{\left\{(a-b)^2+4c^2\right\}^{\frac{3}{2}}}; \quad \ldots (F)$$

nemende dus OT gelijk deze waarde en trekkende door T de lijn WW′ loodregt op VV′, dan zal dezelve de gevraagde asymptoot zijn.

Wil men de waarde van het stuk OH kennen, dat door de kromme van UU′ wordt afgesneden, dan moet men in eene der vergelijkingen (E) stellen $v=0$. Behalve $u=0$, welke het punt O aanduidt, vindt men door deze stelling

$$u=-\frac{2q'}{q}=\frac{c^2+ab}{a^2+b^2+2c^2}V\left\{(a-b)^2+4c^2\right\},$$

hetgeen dan nu de waarde van OH is.

Het is gemakkelijk in te zien, dat er in den tak CZ een buigpunt moet bestaan; wij zullen echter het onderzoek hieromtrent achterwege laten, daar het eerste differentiaal quotient van onze vergelijking reeds zoo zamengesteld is, dat het tweede differentiaal quotient bijna onhandelbaar wordt.

Om de polaire vergelijking van onze kromme te vinden, stellen wij OM $=t$ en MOX $=\phi$, alsdan is $x=t\,Cos.\,\phi$ en $y=t\,Sin.\,\phi$, zoodat $x^2+y^2=t^2$, waardoor de vergelijking (A′) overgaat in

$$t^2\left\{(a-b)t\,Sin.\phi-2ct\,Cos.\phi\right\}-2c(a-b)t^2+2(c^2-ab)t^2Sin.\phi\,Cos.\phi$$
$$+c\left\{(a-b)ct\,Sin.\phi+2abt\,Cos.\phi\right\}=0,$$

of,

of, alles door t deelende en volgens de magten van t rangschikkende,

$$t^2\left\{(a-b)Sin.\phi-2cCos\,\phi\right\}-2\left\{c(a-b)-(c^2-ab)Sin.\phi Cos.\phi\right\}t$$
$$+c\left\{c(a-b)\,Sin.\,\phi+2\,ab\,Cos.\phi\right\}=0\;\ldots\;(G).$$

en hieruit t oplossende, komt er

$$t=\frac{c(a-b)-(c^2-ab)Sin\phi Cos\phi}{(a-b)Sin.\phi-2c\,Cos.\phi}\pm\frac{Cos\phi\sqrt{\left\{c^2(a+b)^2+(c^2-ab)^2Sin^2\phi\right\}}}{(a-b)\,Sin.\phi-2\,c\,Cos.\phi}\;(G')$$

Het is klaar, dat t oneindig wordt, wanneer men heeft $(a-b)\;Sin.\,\phi-2\,c\,Cos.\,\phi=0$, of $Tang.\,\phi=\frac{2c}{a-b}$, en dit toont wederom aan, dat de asymptoot evenwijdig moet loopen met UU′.

Nemende $\phi=0$, dan komt er $t=-a$ en $t=+b$, hetgeen de punten A en C doet kennen. Nemende $\phi=90°$, dan worden beide de waarden van t gelijk c, en dit toont het dubbele punt B aan; op gelijke wijze verkrijgt men voor elke waarde van ϕ twee waarden voor t, welke ons den loop van de kromme geheel en al zouden leeren kennen, indien ons dezelve niet reeds genoegzaam bekend was. De punten O en L worden gevonden, door $Tang.\phi=Tang.\text{AQD}=-\frac{2ab}{c(a-b)}$ te nemen.

Wil men den afstand MQ $=v$, waarop elk punt der kromme van de lijn UU′ staat, door middel van de polaire vergelijking berekenen, ten einde hierdoor de asymptoot geheel te bepalen, dan heeft men

$$v=t\;Sin.\,(\phi-\alpha)=t\;(Sin.\phi\;Cos.\alpha-Cos.\phi\;Sin.\alpha)$$

maar $Sin.\alpha=\frac{2c}{\sqrt{\left\{(a-b)^2+4c^2\right\}}}$ en $Cos.\alpha=\frac{a-b}{\sqrt{\left\{(a-b)^2+4c^2\right\}}}$, dus

$$v=t\times\frac{(a-b)\;Sin.\phi-2\,c\;Cos.\phi}{\sqrt{\left\{(a-b)^2+4\,c^2\right\}}},$$

en brengende hierin de waarde van t over, dan komt er

$$v=\frac{c(a-b)-(c^2-ab)Sin\,\phi Cos\phi\pm Cos.\phi\sqrt{\left\{c^2(a+b)^2+(c^2-ab)^2Sin^2\phi\right\}}}{\sqrt{\left\{(a-b)^2+4c^2\right\}}},$$

Om nu hierdoor den afstand te bepalen, dien de asymptoot WW′ van de lijn UU′ heeft, moeten wij $\phi = a$ stellen, en dus voor *Sin.* ϕ en *Cos.* ϕ de uitdrukkingen schrijven, welke wij zoo aanstonds voor *Sin.* a en *Cos.* a hebben opgegeven, waardoor wij zullen verkrijgen

$$OT = \frac{c(a-b)(a^2+b^2+2c^2) \pm (a-b)c(2c^2+a^2+b^2)}{\{(a-b)^2+4c^2\}^{\frac{3}{2}}},$$

dat is, naarmate wij het bovenste of het benedenste teeken gebruiken,

$$OT = \frac{2c(a-b)(a^2+b^2+2c^2)}{\{(a-b)^2+4c^2\}^{\frac{3}{2}}}, \text{ en } OT = 0.$$

De eerste dezer twee uitdrukkingen stemt volkomen overeen met de vergelijking (F), en toont dus werkelijk den afstand aan, dien de twee oneindig afgelegene punten Z en Z′, welke als eenzelfde punt van de kromme beschouwd moeten worden, tot de lijn UU′ hebben, terwijl de tweede waarde van OT tot het punt H behoort, waarin de kromme door de lijn UU′ gesneden wordt.

Wil men door middel van de polaire vergelijking den voerstraal OH berekenen, dan moet men in (G′), het benedenste teeken gebruikende, $\phi = a$ stellen, waardoor men alsdan de onbepaalde uitdrukking $t = \infty - \infty$ verkrijgt. Men zal dus beter doen in (G) onmiddelijk $\phi = a$ of $(a-b)$ *Sin.* $\phi - 2c$ *Cos.* $\phi = 0$ te stellen, waardoor dezelve geeft

$$t = \frac{c^2(a-b)\,Sin.\,a + 2abc\,Cos.\,a}{2c(a-b) - 2(c^2-ab)\,Sin.\,a\,Cos.\,a},$$

en hierin voor *Sin.* a en *Cos.* a derzelver waarde stellende,

$$OH = \frac{c^2(a-b) \times \dfrac{2c}{\sqrt{\{(a-b)^2+4c^2\}}} + 2abc \times \dfrac{a-b}{\sqrt{\{(a-b)^2+4c^2\}}}}{2c(a-b) - 2(c^2-ab) \times \dfrac{2c(a-b)}{(a-b)^2+4c^2}},$$

welke uitdrukking gemakkelijk herleid wordt tot

$$OH = \frac{c^2+ab}{a^2+b^2+2c^2}\sqrt{\{(a-b)^2+4c^2\}},$$

even zoo als wij boven gevonden hebben.

AAN-

AANMERKING 1. Bijzonder merkwaardig is het geval, waarin de drie gegevene punten in eene regte lijn liggen. In dit geval is $c = o$, waardoor de vergelijking (A) overgaat in

$$(a-b)\,y^3 + \{(a-b)\,x^2 - 2abx\}\,y = o,$$

of

$$y\left\{y^2 + x^2 - \frac{2ab}{a-b}\,x\right\} = o,$$

waaraan voldaan wordt door te nemen

$$y = o \quad \text{of} \quad y^2 + \left(x - \frac{ab}{a-b}\right)^2 = \left(\frac{ab}{a-b}\right)^2$$

de eerste factor toont de as XX′ der abscissen aan, terwijl de tweede tot eenen cirkel behoort, die deszelfs middelpunt in XX′ heeft, waarvan de straal gelijk $\frac{ab}{a-b}$ is, en welks middelpunt ter regterhand van O op eenen afstand $\frac{ab}{a-b}$ ligt, zoodat deze cirkel door het punt O gaat. (*)

AANMERKING 2. Niet minder opmerkelijk is het geval, waarin O de lijn AC midden door deelt. Alsdan is $a = b$, waardoor (A) overgaat in

$$-2cxy^2 + 2(c^2 - a^2)\,xy - 2c\,(x^3 - a^2x) = o,$$

of

$$x\left\{y^2 - \frac{c^2 - a^2}{c}\,y + x^2 - a^2\right\} = o,$$

en hieraan wordt voldaan door te nemen

$$x = o \quad \text{of} \quad \left(y - \frac{c^2 - a^2}{2c}\right)^2 + x^2 = \left(\frac{a^2 + c^2}{2c}\right)^2,$$

zoodat de meetkunstige plaats van al de gevraagde punten alsdan bestaat uit de as YY′ en uit eenen cirkel, waarvan het middelpunt in YY′ ligt, welke door de punten A en C gaat, en waarvan de straal gelijk $\frac{a^2 + c^2}{2c}$ is. Daarenboven behoort XX′ alsdan mede tot de gevraagde meetkunstige plaats, zoo als wij in den aanvang der oplossing hebben aangewezen.

Is, tevens $c = a$, zoodat OA = OB = OC is, dan is $c^2 -$

(*) Dit geval is afzonderlijk behandeld *Deel* II, *Voorstel* CXLIII.

$c^2 - a^2 = 0$ en $\frac{c^2 + a^2}{2c} = a$, waaruit blijkt, dat alsdan het middelpunt van den cirkel in O ligt.

AANMERKING 3. Wij hebben onze figuur voor het bijzondere geval geteekend, waarin ABC een regte hoek is. In dit geval is $c^2 = ab$, waardoor de meeste der uitgebragte formulen veel eenvoudiger worden. Zoo is alsdan, bij voorbeeld, voor den hoek a, onder welken de asymptoot de as XX′ snijdt, $Tang.\ a = \frac{2\sqrt{ab}}{a-b}$ en $Cos.\ a = \frac{a-b}{a+b}$, terwijl de afstand OT van deze asymptoot tot UU′ wordt uitgedrukt door $OT = \frac{2ab}{a+b}$, gaande eindelijk de polaire vergelijking alsdan over in

$$t = \frac{(a-b) \pm (a+b)\ Cos.\ \phi}{(a-b)\ Sin.\ \phi - 2\ Cos.\ \phi . \sqrt{ab}} . \sqrt{ab}.$$

Hieruit wordt dan nu ook volkomen blijkbaar, waarom de oplossing van *Vraagstuk* XXVIII, opgegeven door den Heer J. BASSAN, en waarin gevraagd wordt *een' vierhoek te bepalen, hebbende eenen regten hoek, en waarin de zijden om dien regten hoek, benevens de diagonaal, die uit den regten hoek voortkomt, gegeven zijn, welke diagonaal nog bovendien den overstaanden hoek midden door deelt*, tot eene vergelijking van den vierden graad moest voeren. In onze figuur is namelijk B deze regte hoek, terwijl BA en BC de gegevene regthoekszijden zijn; beschrijft men dus uit B met de gegeven diagonaal als straal eenen cirkel, dan zullen al de punten, waarin deze cirkel onze kromme doorsnijdt, als vierde hoekpunt van den gevraagden vierhoek kunnen worden aangenomen, omdat dezelve klaarblijkelijk alsdan aan alle voorwaarden van het vraagstuk voldoen. Nu is het klaar, dat een cirkel uit B als middelpunt beschreven, de kromme lijn in vier verschillende punten doorsnijden kan, waaruit dan volgt, dat de vergelijking, waardoor deze punten bepaald worden, noodzakelijk tot den vierden graad moest opklimmen. Hieruit volgt dan, dat, onze kromme lijn eens geconstrueerd zijnde, welke constructie wij boven zagen, dat allergemakkelijkst is, gezegd vraagstuk XXVIII, en dus ook vraagstuk XXX, dat op hetzelve berust, zonder eenige berekening kan worden opgelost.

LXXV.

LXXV. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Men vraagt de integraal te vinden van de differentiaal-formule

$$\partial y = \frac{(2+3x)^{\frac{2}{3}}}{x^2}\,\partial x\,?$$

OPGELOST *door* I. R. SCHMIDT, P. H. VAN DER MEULEN, F. J. STAMKART, J. B. VOLMER VAN BORN en A. B. DE BOCK, JUN.

OPLOSSING *van* I. R. SCHMIDT.

Stel $2+3x = z^3$ dan is $(2+3x)^2 = z^6$ en $(2+3x)^{\frac{2}{3}} = z^2$,

waaruit $x = \dfrac{z^3-2}{3}$ en $\partial x = z^2\partial z$, zoodat

$$y = \int \frac{9}{(z^3-2)^2}\times z^2 \times z^2\partial z = 9\int \frac{z^4\partial z}{(z^3-2)^2} = \frac{9}{4}\int \frac{z^4\partial z}{\left(\frac{z^3}{2}-1\right)^2}.$$

Stel $\frac{1}{2}z^3 = u^3$ of $z^3 = 2u^3$ dus $z = u\sqrt[3]{2}$ en $\partial z = \partial u\sqrt[3]{2}$, dan is

$$y = \frac{9}{4}\int \frac{u^4.2\sqrt[3]{2}\times\partial u\sqrt[3]{2}}{(u^3-1)^2} = \frac{9\sqrt[3]{4}}{2}\int\frac{u^4\partial u}{(u^3-1)^2}.$$

Stellen wij nu

$$\frac{u^4}{(u^3-1)^2} = \frac{u^4}{(u-1)^2(u^2+u+1)^2} = \ldots$$

$$\frac{A}{(u-1)^2} + \frac{B}{u-1} + \frac{C+Du}{(u^2+u+1)^2} + \frac{E+Fu}{u^2+u+1},$$

dan is, wanneer wij alles tot denzelfden noemer brengen,

$$u^4 = A(u^2+u+1)^2 + B(u-1)(u^2+u+1)^2 + (C+Du)(u-1)^2$$
$$+(E+Fu)(u-1)^2(u^2+u+1),$$

of, alles volgens de magten van u rangschikkende,

$$\left.\begin{array}{rrrrrr}
 & Au^4 & +2Au^3 & +3Au^2 & +\;2\,Au & +\,A \\
+\,Bu^5 & +\,Bu^4 & +\,Bu^3 & -\,Bu^2 & -\;\;Bu & -\,B \\
+\,Fu^5 & +\,Eu^4 & +\,Du^3 & +\,Cu^2 & -\;2\,Cu & +\,C \\
 & -\,Fu^4 & -\,Eu^3 & -2Du^2 & +\;\;Du & +\,F \\
 & -\;\;u^4 & & -\,Fu^2 & -\;\;Eu & \\
 & & & & +\;\;Fu &
\end{array}\right\} = 0,$$

$$\text{zoodat}\quad \left.\begin{array}{l}
B+F=0 \\
A+B+E-F=1 \\
2A+B+D-E=0 \\
3A-B+C-2D-F=0 \\
2A-B-2C+D-E+F=0 \\
A-B+C+F=0
\end{array}\right\}\ \text{waaruit}\ \left\{\begin{array}{l}
A=\frac{1}{9} \\
B=\frac{2}{9} \\
C=-\frac{1}{3} \\
D=0 \\
E=\frac{4}{9} \\
F=-\frac{2}{9}
\end{array}\right.$$

en

en deze waarden substituerende, komt er

$$y = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\left\{\int\frac{\partial u}{(u-1)^2} + 2\int\frac{\partial u}{u-1} - 3\int\frac{\partial u}{(u^2+u+1)^2} + 2\int\frac{(2-u)\partial u}{u^2+u+1}\right\}.$$

Nu is $\int\frac{\partial u}{(u-1)^2} = -\frac{1}{u-1}$ . . . . (I)

en $\int\frac{\partial u}{u-1} = Nep.\ Log.\ (u-1)$ . . . . . (II),

Volgens mijne *Diff.* en *Int. Rek.* § 184 *verg.* (γ) is verder

$$\int\frac{\partial u}{(u^2+u+1)^2} = \frac{1}{3}\left\{\frac{1+2u}{1+u+u^2} + \int\frac{\partial u}{1+u+u^2}\right\}$$

en dus § 179 *vergel.* (a)

$$\int\frac{\partial u}{(u^2+u+1)^2} = \frac{1}{3}\left\{\frac{1+2u}{1+u+u^2} + \frac{4}{3}\sqrt{3}\ Boog.Tang.\frac{u\sqrt{3}}{2+u}\right\} \ldots \text{(III)}$$

Eindelijk is, § 179 *verg.* (a)

$$\int\frac{(2-u)\partial u}{1+u+u^2} = -Log.(1+u+u^2) + \frac{5}{3}\sqrt{3}\ Boog.Tang.\frac{u\sqrt{3}}{2+u} \ldots \text{(IV)}$$

en deze waarden in de laatste formule voor y overbrengende, komt er

$$y = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\left\{-\frac{3u^2}{u^3-1} + Nep.Log.\frac{(u-1)^3}{u^3-1} + 2\sqrt{3}\ Boog.Tang.\frac{u\sqrt{3}}{2+u}\right\}$$

dat is, uit hoofde van $u = \frac{z}{\sqrt[3]{2}} = \frac{(2+3x)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{2}}$,

$$y = C - \frac{(2+3x)^{\frac{2}{3}}}{x} + \frac{\sqrt[3]{4}}{2}Nep.Log.\frac{\{(2+3x)^{\frac{1}{3}} - \sqrt[3]{2}\}^3}{x} + \ldots$$

$$\ldots\ldots \sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{3}\cdot Boog.Tang.\frac{(2+3x)^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}+(2+3x)^{\frac{1}{3}}}\Bigg\}.$$

LXXVI. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

De integraal te vinden van de formule $\partial y = \frac{x\,\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}}$ $Log.\frac{x}{\sqrt{(1-x)}}$?

OPGELOST *door* I. R. SCHMIDT, R. LOBATTO, P. H. VAN DER MEULEN, A. B. DE BOCK, JUN., F. J. STAMKART en J. B. VOLMER VAN BORN.

Op-

OPLOSSING *van* I. R. SCHMIDT.

Vergelijken wij de opgegevene formule met de algemeene herleidingsformule $\int P\partial Q = PQ - \int Q\partial P$, en nemen wij hiertoe $P = Log.\frac{x}{\sqrt{(1-x)}}$ en $\partial Q = \frac{x\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}}$, dan is vooreerst

$$Q = \int\frac{x\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\sqrt{(1-x^2)},$$

en wij hebben verder

$$\partial P = \frac{\partial.\frac{x}{\sqrt{(1-x)}}}{\frac{x}{\sqrt{(1-x)}}} = \frac{\partial x\sqrt{(1-x)}+\frac{x\partial x}{2\sqrt{(1-x)}}}{x\sqrt{(1-x)}} = \frac{(2-x)\partial x}{2x(1-x)}$$

en hierdoor verkrijgen wij

$$y = -\sqrt{(1-x^2)}\,Log.\frac{x}{\sqrt{(1-x)}} + \int\frac{(2-x)\sqrt{(1-x^2)}}{2x(1-x)}\partial x \,.\,(A)$$

Stel nu $\sqrt{(1-x^2)} = (1-x)z$ dan is $1-x^2 = (1-x)^2z^2$, of $1+x = (1-x)z^2$, dus $x = \frac{z^2-1}{z^2+1}$, $1-x = \frac{2}{z^2+1}$, $2-x = \frac{z^2+3}{z^2+1}$, $\sqrt{(1-x^2)} = \frac{2z}{z^2+1}$ en $\partial x = \frac{4z\partial z}{(z^2+1)^2}$, zoodat

$$X = \int\frac{(2-x)\sqrt{(1-x^2)}}{2x(1-x)}\partial x = 2\int\frac{z^2(z^2+3)\partial z}{(z^2+1)^2(z+1)(z-1)},$$

stellen wij nu

$$\frac{z^2(z^2+3)}{(z^2+1)(z+1)(z-1)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-1} + \frac{C+Dz}{(z^2+1)^2} + \frac{E+Fz}{z^2+1},$$

dan komt er, door alles tot denzelfden noemer te brengen,

$$z^4+3z^2 = A(z-1)(z^2+1)^2 + B(z+1)(z^2+1)^2 + (C+Dz)(z^2-1)$$
$$\ldots\ldots + (E+Fz)(z^4-1),$$

of

$$\begin{aligned} z^4+3z^2 = {} & Az^5 - Az^4 + 2Az^3 - 2Az^2 + Az - A \\ & + Bz^5 + Bz^4 + 2Bz^3 + 2Bz^2 + Bz + B \\ & + Fz^5 + Ez^4 + Dz^3 + Cz^2 - Dz - C \\ & - Fz - E \end{aligned}$$

zoodat

$$\left.\begin{aligned} A + B + F &= 0 \\ -A + B + E &= 1 \\ 2A + 2B + D &= 0 \\ -2A + 2B + C &= 3 \\ A + B - D - F &= 0 \\ -A + B - C - E &= 0 \end{aligned}\right\} \text{waaruit} \left\{\begin{aligned} A &= -\tfrac{1}{2} \\ B &= \tfrac{1}{2} \\ C &= 1 \\ D &= 0 \\ E &= 0 \\ F &= 0 \end{aligned}\right.$$

en

en deze waarden in X overbrengende, verkrijgen wij

$$X = -\int \frac{\partial z}{z+1} + \int \frac{\partial z}{z-1} + 2\int \frac{\partial z}{(z^2+1)^2}.$$

Nu is $-\int \frac{\partial z}{z+1} + \int \frac{\partial z}{z-1} = -Log.(z+1) + Log.(z-1) = Log.\frac{z-1}{z+1};$
verder is (zie mijne *Diff.* en *Int. Rek.* § 184, 1°. *Voorb.*)

$$\int \frac{\partial z}{(z^2+1)^2} = \tfrac{1}{2}.\frac{z}{1+z^2} + \tfrac{1}{2}\,Boog.\,Tang.\,z,$$

zoodat $X = Log.\frac{z-1}{z+1} + \frac{z}{1+z^2} + Boog.\,Tang.\,z.$

Daar nu $z = \frac{\sqrt{(1-x^2)}}{1-x} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ is, heeft men $z - 1 =$ $\frac{\sqrt{(1-x^2)}-(1-x)}{1-x}$, $z+1 = \frac{\sqrt{(1-x^2)}+(1-x)}{1-x}$, en bijgevolg

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{\sqrt{(1-x^2)}-(1-x)}{\sqrt{(1-x^2)}+(1-x)} = \frac{\{\sqrt{(1-x^2)}-(1-x)\}^2}{(1-x^2)-(1-x)^2}$$

$$= \frac{2(1-x)-2(1-x)\sqrt{(1-x^2)}}{2x(1-x)} = \frac{1-\sqrt{(1-x^2)}}{x};$$ verder is $1+z^2 = \frac{2}{1-x}$ en dus $\frac{z}{1+z^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-x^2)}$,
waardoor dan

$$X = Log.\frac{1-\sqrt{(1-x^2)}}{x} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-x^2)} + Boog.\,Tang.\sqrt{\frac{1+x}{1-x}};$$

hetwelk in (A) overgebragt, geeft

$$\int \frac{x\,\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} Log\,\frac{x}{\sqrt{(1-x)}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-x^2)} + \sqrt{(1-x^2)}.Log.\frac{\sqrt{(1-x)}}{x}$$
$$+ Log.\frac{1-\sqrt{(1-x^2)}}{x} + Boog.\,Tang.\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C,$$

in welke formule overal de neperiaansche logarithmen bedoeld worden.

LXXVII. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Een regthoekig parallelopipedum is zoodanig in het water gedompeld, dat vier der hoekpunten buiten water uitsteken, terwijl de vier overige zich onder water bevinden; indien nu twee der zijvlakken verticaal staan, vraagt men de standen te bepalen, in welke deze balk drijvend in evenwigt kan zijn?

Op-

OPGELOST door I. R. SCHMIDT, A. B. TROMP en F. J. STAMKART.

OPLOSSING van I. R. SCHMIDT.

Zij RSQT, *Fig.* 53, de doorſnede van den balk, welken wij vooreerst in verticalen ſtand voorſtellen, en die tot bij DE in het water gedompeld is, dan ligt het zwaartepunt Z van den geheelen balk in het midden van AB, en het zwaartepunt L van het ingedompelde deel in het midden van AG.

Wij nemen als bekend aan, dat tot het evenwigt van een drijvend ligchaam gevorderd wordt, vooreerst, dat het gewigt van het geheele ligchaam gelijk is aan het gewigt van de verplaatſte vloeiſtof, en ten andere, dat de zwaartepunten van het geheele ligchaam en van de verplaatſte vloeiſtof in eenen en denzelfden verticaal moeten gelegen zijn. Staat nu de balk verticaal, dan is reeds aan de tweede voorwaarde voldaan, en er blijft dus nog alleen over, om aan de eerſte te voldoen. Stellen wij hiertoe de lengte AB $= a$ en de breedte RS $= b$, benevens het ſtuk BG, dat boven water uitſteekt, gelijk d, dan zullen de gewigten van het ligchaam en de verplaatſte vloeiſtof, omdat derzelver volumen prisma's van gelijk grondvlak zijn, tot elkander in zamengeſtelde reden wezen, van de hoogte en het ſoortelijk gewigt, zoodat wij, het ſoortelijk gewigt van het ligchaam G en dat van de vloeiſtof g ſtellende, zullen hebben

gewigt ligch. : *gew. verpl. vloeiſt.* $= a\,G : (a - d)\,g$;

daar dan deze gewigten gelijk moeten zijn, zoo hebben wij

$$(a - d)\,g = a\,G,$$

waaruit

$$d = a \, . \, \frac{g - G}{g};$$

waardoor dan de ſtand van den balk geheel bepaald is.

Is dit nu echter de eenigſte ſtand, onder welken bij de gegevene voorwaarde het ligchaam in evenwigt kan zijn, en is dit evenwigt een evenwigt van volharding, dat is, zal het ligchaam, een weinig uit dezen ſtand gebragt, van zelf in denzelven trachten terug te keeren? — De oplosſing dezer vragen vordert een weinig meer nadenken, en wij zullen zoo kort mogelijk aan dezelve trachten te beantwoorden.

Vooreerst merken wij op, dat de balk in eenen hellenden

 ſtand,

stand, Fig. 54, brengende, er geen evenwigt kan bestaan, een zij vooreerst BG onveranderd de waarde blijft behouden, die wij zoo even gevonden hebben; want alsdan is, uit hoofde van D'G = GE', driehoek DGD' gelijk driehoek EGE' en dus trapezium DEQT gelijk regthoek D'E'QT, waaruit volgt, dat het volume en dus ook het gewigt van de verplaatste vloeistof onveranderd blijft, zoo lang wij BG dezelfde waarde laten behouden.

Om nu te onderzoeken, of er in zulk eenen hellenden stand evenwigt kan plaats hebben, zullen wij moeten nagaan, of het zwaartepunt P van het trapezium met het zwaartepunt Z van den balk in denzelfden verticaal kan liggen. Hiertoe zullen wij dan onderstellen, dat de as AB met den verticaal eenen willekeurigen hoek ϕ maakt, en in deze onderstelling de waarde van GP' en GZ' berekenen; want dan zullen wij alleen het verschil P'Z' gelijk nul behoeven te stellen, om de waarden van ϕ te vinden, die aan het begeerde voldoen.

Om Z'G te vinden, merken wij op, dat, $ZB = \frac{1}{2} a$ en $BG = d$ zijnde, $ZG = \frac{1}{2} a - d$ is, en daar bovendien $Z'ZG = \phi$ is, zoo hebben wij $Z'G = ZG \times Sin.\ \phi$, dat is

$$Z'G = (\tfrac{1}{2} a - d)\ Sin.\ \phi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Ten einde GP' te bepalen, trekken wij DF evenwijdig met RS. Alsdan is $EDF = \phi$, dus $KG = \frac{1}{2}\ b\ Tang.\ \phi$ en $FE = b\ Tang.\ \phi$, waaruit verder volgt $AK = a - d - \frac{1}{2}\ b\ Tang.\ \phi$. Stellen wij nu het zwaartepunt van den driehoek DFE in I, dat van regthoek QF in L en dat van trapezium QE in P, dan is volgens de leer der momenten

$$GP' = \frac{GL' \times regt.\ QF - GI' \times drieh\ DEF}{Trapez.\ QE},$$

of, omdat $regth.\ QF = DF \times AK = b\,(a - d - \frac{1}{2} b\,Tang.\ \phi)$, $drieh.\ DEF = \frac{1}{2}\ DF \times FE = \frac{1}{2}\ b^2\ Tang.\ \phi$ en $Trapez.\ QE = AG \times DF = (a - d)\ b$ is,

$$GP' = \frac{(a - d - \frac{1}{2} b\,Tang.\ \phi) \times GL' - \frac{1}{2} b\,Tang.\ \phi \times GI'}{a - d} \quad . \quad (2)$$

zoodat er nog overblijft GL' en GI' te bepalen.

Daar L in het midden van AK ligt, zoo hebben wij $LK = \frac{1}{2} AK$

$\frac{1}{2}$ AH $= \frac{1}{2}(a - d - \frac{1}{2}b\ Tang.\ \phi)$, en daar KG $= \frac{1}{2}b\ Tang.\ \phi$ is, LG $= \frac{1}{2}(a - d + \frac{1}{2}b\ Tang.\ \phi)$, waaruit volgt

$$L'G = \tfrac{1}{2}(a - d + \tfrac{1}{2}b\ Tang.\ \phi)\ Sin.\ \phi \ldots (3).$$

Daar verder GI $= \frac{1}{3}$ GF is, zoo is GI' $= \frac{1}{3}$ GF' $= \frac{1}{3}$(DF' − DG); maar DF' $= b\ Cos.\ \phi$ en DG $= \frac{1}{2}b\ Sec.\ \phi$, dus GI' $= \frac{1}{3}(b\ Cos.\ \phi - \frac{1}{2}b\ Sec.\ \phi)$, dat is

$$GI' = \tfrac{1}{6}b\left(2\ Cos.\ \phi - \frac{1}{Cos.\ \phi}\right) \ldots\ldots (4).$$

Brengende dus (3) en (4) over in (2), dan komt er

$$GP' = \frac{\frac{1}{4}\{(a-d)^2 - \frac{1}{4}b^2 Tang^2.\phi\}\ Sin.\phi + \frac{1}{12}b^2 Tang.\phi\left(2\ Cos.\phi - \frac{1}{Cos.\phi}\right)}{a-d},$$

$$= \tfrac{1}{4}(a-d)\ Sin.\phi - \frac{b^2\ Tang.\phi}{24(a-d)}\left(3\ Tang.\phi\ Sin.\phi + 4\ Cos.\phi - \frac{2}{Cos.\phi}\right);$$

maar $Tang.\ \phi\ Sin.\phi + Cos.\ \phi - \frac{1}{Cos.\phi} = \frac{Sin^2.\phi + Cos^2.\phi - 1}{Cos.\phi} = 0$

zijnde, zoo is ook $2\ Tang.\ \phi\ Sin.\ \phi + 2\ Cos.\ \phi - \frac{2}{Cos.\ \phi} = 0$, en hierdoor gaat de waarde van GP' over in

$$GP' = \tfrac{1}{4}(a-d)\ Sin.\phi - \frac{b^2\ Tang.\phi}{24(a-d)}(Tang.\phi\ Sin.\phi + 2\ Cos.\phi),$$

of, omdat $Tang.\ \phi(Tang.\ \phi\ Sin.\ \phi + 2\ Cos\ \phi) = Sin.\ \phi\left(\frac{Sin^2.\phi}{Cos^2.\phi} + 2\right) =$ $Sin.\ \phi(Tang^2.\phi + 2) = Sin.\ \phi(1 + Sec^2.\phi)$ is,

$$GP' = \tfrac{1}{4}(a-d)\ Sin.\phi - \frac{b^2\ Sin.\phi}{24(a-d)}(1 + Sec^2.\phi)$$

dat is $\quad GP' = \frac{1}{24}\left\{12(a-d) - \frac{b^2(1 + Sec^2.\phi)}{a-d}\right\} Sin.\phi \ldots (5)$

en daar wij in (1) gevonden hebben

$$GZ' = (\tfrac{1}{2}a - d)\ Sin.\ \phi = \tfrac{1}{24}(12a - 24d)\ Sin.\ \phi,$$

zoo volgt hieruit door aftrekking

$$P'Z' = \tfrac{1}{24}\left\{12\ d - \frac{b^2\ (1 + Sec^2.\ \phi)}{a-d}\right\} Sin.\ \phi \ldots (6).$$

Stellen wij dan nu, ten einde te onderzoeken, wanneer de balk in evenwigt is, $P'Z' = 0$, dan vinden wij vooreerst, dat hieraan voldaan wordt door $Sin.\ \phi = 0$ en dus $\phi = 0$ te stel-

len, hetgeen met den vertiçalen ftand overeenftemt; doch $P'Z'$ wordt ook nul, door de ftelling van

$$12\,d - \frac{b^2\,(1 + Sec^2.\,\phi)}{a - d} = 0,$$

en er zal dus ook evenwigt zijn, wanneer men neemt

$$1 + Sec^2.\,\phi = \frac{12\,d\,(a - d)}{b^2},$$

of $$Tang^2.\phi = \frac{12\,d(a-d)}{b^2} - 2 = \frac{12\,d(a-d) - 2\,b^2}{b^2},$$

waaruit $$Tang.\,\phi = \pm\frac{\sqrt{2\,\{6\,d\,(a-d) - b^2\}}}{b}\;\ldots\;(I).$$

Zal deze hoek bij de gegevene voorwaarden mogelijk, en dus de balk op gezegde wijze hellend in evenwigt kunnen zijn, dan zullen hiertoe ondertusfchen bepaalde betrekkingen tusfchen a, b en d moeten beftaan, welke wij nu zullen trachten op te fporen.

Vooreerst kan $Tang.\,\phi$ niet beftaan, ten zij de grootheid onder het wortelteeken pofitief is, en dit geeft ons

$$b^2 < 6\,d\,(a - d)\;\ldots\ldots\;(II).$$

Verder merken wij op, dat onze geheele berekening hierop berust, dat de vier bovenfte hoekpunten boven de vloeiftof uitfteken, en de vier andere zich onder de vloeiftof bevinden, daar in het tegenovergeftelde geval de oplosfing geheel anders zou moeten worden aangevat. Bij de onderftelde voorwaarden moet dus FE kleiner dan FS zijn. Dit geeft ons $b\,Tang.\,\phi < d + \frac{1}{2}\,b\,Tang\,\phi$ of $\frac{1}{2}\,b\,Tang.\,\phi < d$, dus $Tang.\,\phi < \frac{2\,d}{b}$ en $Tang^2.\phi < \frac{4\,d^2}{b^2}$. Schrijvende dus voor $Tang^2.\,\phi$ deszelfs waarde uit (I), dan komt er $\frac{12\,d(a-d) - 2\,b^2}{b^2} < \frac{4\,d^2}{b^2}$ of $12\,d\,(a - d) - 2\,b^2 < 4\,d^2$, dat is $2\,b^2 > 12\,d\,(a - d) - 4\,d^2$ of $b^2 > 6\,ad - 8\,d^2$, waaruit dan blijkt, dat tot de mogelijkheid van het gevraagde evenwigt gevorderd wordt, dat men heeft

$$b^2 > 6\,ad - 8\,d^2 \quad \text{en} \quad b^2 < 6\,ad - 6\,d^2\;\ldots\;(III)$$

tusfchen welke vergelijkingen geene ongerijmdheid beftaat, daar de tweede grens voor b^2 de eerfte werkelijk met $2\,d^2$ overtreft.

Zal

Zal eindelijk het hoekpunt Q niet boven water uitsteken, dan moet RD kleiner dan RQ zijn, en dit geeft ons $a > d + \frac{1}{2} b\ Tang.\ \Phi$ of $a - d > \frac{1}{2} b\ Tang.\ \Phi$, dus $(a - d)^2 > \frac{1}{4} b^2\ Tang^2.\ \Phi$ en voor $Tang^2.\ \Phi$ deszelfs waarde schrijvende $(a - d)^2 > \frac{1}{4} \{12 d(a - d) - 2 b^2\}$ of $4(a - d)^2 > 12 d(a - d) - 2 b^2$, dat is $2 b^2 > 12 d(a - d) - 4(a - d)^2$ of $b^2 > 2(a - d)(4d - a)$ en hieruit volgt, dat voor de mogelijkheid van het evenwigt b^2 tusschen deze twee grenzen moet worden genomen

$$b^2 > 2(a - d)(4d - a) \text{ en } b^2 < 6d(a - d) \ldots (IV)$$

van welke twee grenzen de laatste werkelijk grooter dan de eerste is, omdat $a > d$ zijnde $a + 3d > 4d$ en dus $3d > 4d - a$ of $6d > 2(4d - a)$ en dus ook $6d(a - d) > 2(a - d)(4d - a)$, waaruit dan blijkt, dat ook deze twee grenzen niet met elkander strijden.

De grootste grens $6d(a - d)$ is in (III) en (IV) dezelfde, doch de kleinste grens is voor beide voorwaarden verschillende, en men zal dus bij elk bijzonder geval de grootste der twee uitdrukkingen $6ad - 8d^2$ en $10ad - 8d^2 - 2a^2$ moeten gebruiken; nu is derzelver verschil $4ad - 2a^2$ of $4a(d - \frac{1}{2}a)$ en dus zal de tweede de grootste wezen, indien $d > \frac{1}{2} a$ is; terwijl de eerste de grootste zal zijn, wanneer $d < \frac{1}{2} a$ is. Dit was ook hieruit op te maken, dat de eerste grens gevonden is door de voorwaarde, dat S niet onder water mag komen, terwijl de tweede ontstaan is door de voorwaarde, dat Q niet buiten water mag komen; want is $d < \frac{1}{2} a$, dan zal S eerder onder dan Q boven water komen, zoodat men dan de grenzen (III) zal moeten gebruiken, terwijl het tegendeel plaats zal hebben wanneer $d > \frac{1}{2} a$ is, zoodat men alsdan de grenzen (IV) zal moeten gebruiken.

Uit dit alles blijkt dan nu, dat wanneer de balk in eenen hellenden stand drijvend in evenwigt zal zijn, hiertoe de volgende betrekkingen tusschen de gegevens zullen moeten plaats hebben

$$\text{voor } d < \tfrac{1}{2} a \ldots b^2 > 6ad - 8d^2 \text{ en } b^2 < 6ad - 6d^2 \quad (III).$$
$$\text{voor } d > \tfrac{1}{2} a \ldots b^2 > 2(a - d)(4d - a) \text{ en } b^2 < 6ad - 6d^2 \ (IV).$$

Valt alzoo b niet tusschen deze grenzen, dan zal de balk in geen' hellenden stand in evenwigt kunnen wezen; maar valt b tus-

 schen

fchen deze grenzen, dan wordt de hoek, waarbij dit evenwigt plaats heeft, gevonden door de vergelijking

$$Tang.\ \phi = \frac{\pm \sqrt{2\{6(a-d)b - b^2\}}}{b} \quad . \ . \ (I).$$

welke waarde alsdan zeker bestaanbaar zal zijn, terwijl men bij deze omstandigheden tevens kan verzekerd wezen, dat de hoek Q niet boven noch de hoek S niet onder water zal komen; eindelijk blijkt hieruit, dat er onder deze omstandigheden twee hoeken ϕ zijn, die aan het gevraagde voldoen, en welke ter wederzijde gelijke hoeken met den verticaal maken.

Nemen wij, tot voorbeeld, $d = \frac{1}{8}a$, dan moeten wij de grenzen (III) gebruiken, en deze geven ons $b^2 > \frac{20}{32}a^2$ en $b^2 < \frac{21}{32}a^2$, zoodat het gevraagde onmogelijk is, indien b^2 niet tusschen deze zeer beperkte grenzen genomen wordt. Nemen wij dan, om b rationaal te hebben, $b^2 = \left(\frac{51}{64}\right)^2 a^2 = \frac{2601}{4096}a^2 = \frac{20\frac{41}{128}}{32}a^2$, welke klaarblijkelijk tusschen de gevondene grenzen invalt, dan is $b = \frac{51}{64}a$, en hieruit vinden wij $\phi = 14°30'5'',27$. Dit geval is in *Fig.* 55 voorgesteld. Wij hebben in dezelve ϕ gelijk de gevondene waarde, BG $= \frac{1}{8}$ AB en RS $= \frac{51}{64}$ AB genomen. Men ziet terstond, dat het hoekpunt S nog even boven water blijft, en wanneer men het zwaartepunt P van den vierhoek DEQT door de bekende constructie bepaalt, zal men bevinden, dat hetzelve met Z werkelijk in eenen zelfden verticaal ligt, en dat er dus wezenlijk evenwigt plaats heeft.

Nemen wij, tot ander voorbeeld, $d = \frac{3}{7}a$, dan vinden wij, voor de grenzen van b, $b^2 > \frac{54}{49}a^2$ en $b^2 < \frac{72}{49}a^2$; wij kunnen

dus

dus onder andere nemen $b^2 = \frac{64}{49} a^2$ of $b = \frac{8}{7} a$, en dit geeft ons ten naaste bij $\phi = 26°33'50''$, en *Fig.* 56, welke voor dit geval geteekend is, doet ons zien, dat hierdoor werkelijk aan al de vóorwaarden is voldaan.

Is nu ondertusschen het gevonden evenwigt alleen oogenblikkelijk, of is hetzelve een evenwigt van volharding? Zie hier op welke wijze men dit onderzoeken kan. Daar BO', zoo als wij vroeger bewezen hebben, onveranderd blijft, kan men GA als een' hefboom aanzien, waarvan G het steunpunt is. Op dezen hefboom werken nu twee krachten, namelijk in Z het gewigt van den balk en in P'' de opwaartsche persing van het water, en deze krachten zijn bovendien aan elkander gelijk, al hetwelk in de hydrostatica genoegzaam bewezen is. Hieruit volgt dan, *dat GP'' grooter dan GZ of P'Z' positief zijnde, de balk zich van den verticalen stand meer en meer zal trachten te verwijderen, doch dat GP'' kleiner dan GZ of P'Z' negatief zijnde, de balk zich naar den verticalen stand zal toe begeven.*

Passen wij dit nu toe op ons hellend evenwigt, waarin de hoek ϕ zoodanig bepaald is, dat in

$$P'Z' = \tfrac{1}{24} \left(12d - \frac{b^2 (1 + Sec^2. \phi)}{a - d}\right) Sin. \phi$$

de factor $12d - \frac{b^2 (1 + Sec^2. \phi)}{a - d}$ en dus P'Z' nul wordt;

dan zal, omdat d, b en a onveranderd blijven, P'Z' negatief of positief worden, naarmate wij ϕ iets grooter of iets kleiner nemen, waaruit volgt, dat, de balk, ter eener en ter andere zijde, een weinig uit den bepaalden stand voor het evenwigt brengende, van zelf weder in dezen stand terug zal keeren, en hieruit blijkt, dat er bij dit bepaalde evenwigt in hellenden stand werkelijk stabiliteit plaats heeft.

Daar wij dan genoegzaam bepaald hebben, wat er voor het gevraagde evenwigt moet plaats hebben, wanneer d grooter of kleiner dan $\frac{1}{2} a$ is, blijft er nog over te onderzoeken, wat er voor dit evenwigt moet plaats hebben ingevalle van $d = \frac{1}{2} a$. In

dit geval geven de grenzen (III) en (IV) volkomen dezelfde uitkomst, namelijk:

$$b > a \quad \text{en} \quad b < a\sqrt{\tfrac{3}{2}},$$

terwijl, wanneer deze voorwaarde plaats heeft, de hoek ϕ zal worden gevonden, door te nemen

$$Tang.\ \phi = \pm \frac{\sqrt{(3a^2 - 2b^2)}}{b},$$

en deze omstandigheden zich vereenigende, zal het bepaalde evenwigt wederom een evenwigt van volharding zijn.

Onderzoeken wij eindelijk, wat er ten opzigte der stabiliteit plaats zal hebben, indien, d en a gegeven zijnde, b niet tusschen de bepaalde grenzen valt, en het hellende evenwigt alzoo niet mogelijk is. Wordt b^2 grooter dan de grootste limiet en dus $b^2 > 6d(a-d)$ genomen, dan is $\frac{b^2}{a-d} > 6d$, en daar, welke waarde men aan ϕ geeft, $1 + Sec^2.\ \phi > 2$ is, zoo is in dit geval $\frac{b^2(1 + Sec^2.\ \phi)}{a-d} > 12d$ en bijgevolg $Z'P'$ negatief, zoodat alsdan de balk uit elken hellenden stand van zelf in den verticalen stand terug zal komen; zoo lang dus b grooter dan de grootste grens genomen wordt, zal er evenwigt, en wel evenwigt van volharding plaats hebben, wanneer AB verticaal staat.

Wordt b kleiner dan de kleinste limiet genomen, dan moeten wij de gevallen onderscheiden, waarin $d < \frac{1}{2}a$, $d > \frac{1}{2}a$ of $d = \frac{1}{2}a$ is. Is $d < \frac{1}{2}a$, dan is de kleinste limiet van b^2 gelijk $6ad - 8d^2$, maar dan zal, opdat de hoek S niet onder water zal komen, $Tang^2.\phi < \frac{4d^2}{b^2}$ en dus $1 + Sec^2.\phi < \frac{4d^2 + 2b^2}{b^2}$ moeten zijn, waaruit volgt $b^2(1 + Sec^2.\ \phi) < 4d^2 + 2b^2$: nemende dus $b^2 < 6ad - 8d^2$, dan is $2b^2 < 12ad - 16d^2$ en $4d^2 + 2b^2 < 12ad - 12d^2$, dat is $4d^2 + 2b^2 < 12d(a-d)$ en dus zooveel te meer $b^2(1 + Sec^2.\ \phi) < 12d(a-d)$, zoodat alsdan $Z'P'$ voor elken hoek ϕ positief zal wezen, en de balk dus altijd van den verticalen stand zal zoeken af te wijken. Wordt dus in dit geval AB verticaal gesteld, dan zal er wel even-

evenwigt zijn, doch hetzelve zal alleen een oogenblikkelijk evenwigt wezen, en de minste beweging zal den balk geheel om doen kantelen.

Is $d > \frac{1}{2}a$, dan is de kleinste limiet van b^2 gelijk aan $2(a-d)(4d-a)$; doch in dit geval zal, opdat de hoek Q niet boven water zal komen, $Tang^2\ \phi < \frac{4(a-d)^2}{b^2}$ en dus $1 + Sec^2.\phi < \frac{4(a-d)^2 + 2b^2}{b^2}$ moeten zijn, waaruit $b^2(1 + Sec^2.\phi) < 4(a-d)^2 + 2b^2$. Nemende nu $b^2 < 2(a-d)(4d-a)$, dan is $2b^2 < 4(a-d)(4d-a)$ en $4(a-d)^2 + 2b^2 < 2(a-d)(4d-a) + 4(a-d)^2$, dat is na herleiding $4(a-d)^2 + 2b^2 < 12d(a-d)$, en dus zooveel te meer $b^2(1 + Sec^2.\phi) < 12d(a-d)$, zoodat ook in dit geval Z′P′ voor elken hoek ϕ positief zal wezen, en er alzoo dezelfde verschijnselen van het voorgaande geval plaats zullen hebben.

Is eindelijk $d = \frac{1}{2}a$, dan is de kleinste limiet van b^2 gelijk a^2, en dan zal, opdat de hoekpunten S en Q niet gelijktijdig in en buiten water komen, $Tang^2.\phi < \frac{a^2}{b^2}$ en dus $1 + Sec^2.\phi < \frac{a^2 + 2b^2}{b^2}$ of $b^2(1 + Sec^2.\phi) < a^2 + 2b^2$ moeten zijn. Nemende nu $b^2 < a^2$ dan is $2b^2 < 2a^2$ en $a^2 + 2b^2 < 3a^2$, dus zooveel te meer $b^2(1 + Sec^2.\phi) < 3a^2$ of $\frac{b^2(1 + Sec^2.\phi)}{a} < 3a$; maar in dit geval is $Z'P' = \frac{1}{12}\left(3a - \frac{b^2(1 + Sec^2.\phi)}{a}\right) Sin.\phi$, zoodat in deze onderstelling voor elken hoek ϕ de waarde van $Z'P'$ positief wordt, en dus dezelfde verschijnselen van de twee voorgaande gevallen plaats zullen hebben.

Wordt b gelijk aan de grootste limiet genomen, dan wordt klaarblijkelijk $\phi = 0$, en wordt b gelijk de kleinste limiet genomen, dan zal er evenwigt zijn, wanneer tevens, indien $d < \frac{1}{2}a$ is, de hoek S, indien $d > \frac{1}{2}a$ is, den hoek Q, en indien $d = \frac{1}{2}a$ is, de beide hoeken Q en S den waterspiegel raken; wij laten ons over deze gevallen niet verder uit, daar men, het verhandelde wel be-

grepen hebbende, zonder eenige moeite in elk geval zal kunnen nagaan, wat er ten opzigte van het evenwigt plaats zal hebben, en het dus overtollig zou wezen hierover verder uit te weiden.

LXXVIII. VOORSTEL.

Door L. R. SCHMIDT.

Men vraagt de integraal te vinden van de vergelijking $\partial^2 y + a\partial y \sqrt{(\partial y^2 + \partial x^2)} = 0$?

OPGELOST *door* I. R. SCHMIDT, R. LOBATTO, J. B. VOLMER VAN BORN, F. J. STAMKART en A. B. DE BOCK, JUN.

OPLOSSING *van* I. R. SCHMIDT.

Deelen wij de opgegevene vergelijking door ∂x^2, dan komt er

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + a\frac{\partial y}{\partial x}\sqrt{\left(1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)} = 0,$$

stellen wij hierin $\frac{\partial y}{\partial x} = z$, dan is $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial x}$, en hierdoor gaat deze vergelijking over in

$$\frac{\partial z}{\partial x} + az\sqrt{(1 + z^2)} = 0,$$

of

$$-a\partial x = \frac{\partial z}{z\sqrt{(1 + z^2)}},$$

en dus $a(C - x) = \int\frac{\partial z}{z\sqrt{(1+z^2)}} = \int\frac{z\partial z}{z^2\sqrt{(1+z^2)}}$ . . . (A)

Stellende nu $\sqrt{(1 + z^2)} = u$, dan is $1 + z^2 = u^2$, $z^2 = u^2 - 1$ en $z\partial z = u\partial u$, waardoor

$$\int\frac{z\partial z}{z^2\sqrt{(1+z^2)}} = \int\frac{u\partial u}{(u^2-1)u} = \int\frac{\partial u}{u^2-1} = \tfrac{1}{2}\int\frac{\partial u}{u-1} - \tfrac{1}{2}\int\frac{\partial u}{u+1},$$

zoodat

$$\int\frac{z\partial z}{z^2\sqrt{(1+z^2)}} = \tfrac{1}{2}\,Log.\,\frac{u-1}{u+1},$$

en voor u derzelver waarde schrijvende

$$\int\frac{z\partial z}{z^2\sqrt{(1+z^2)}} = \tfrac{1}{2}\,Log.\,\frac{\sqrt{(1+z^2)}-1}{\sqrt{(1+z^2)}+1} = \tfrac{1}{2}\,Log.\,\frac{(\sqrt{(1+z^2)}-1)^2}{z^2},$$

dat is

$$\int\frac{z\partial z}{z^2\sqrt{(1+z^2)}} = Log.\,\frac{\sqrt{(1+z^2)}-1}{z},$$

hetgeen in (A) overgebragt geeft

$$a(C - x) = Log.\,\frac{\sqrt{(1+z^2)}-1}{z},$$

of

of $$e^{a(C-x)} = \frac{\sqrt{(1+z^2)}-1}{z},$$

dus $$z e^{a(C-x)} = -1+\sqrt{(1+z^2)},$$

en $$z e^{a(C-x)} + 1 = \sqrt{(1+z^2)},$$

hetwelk in het vierkant verheven geeft

$$z^2 e^{2a(C-x)} + 2z e^{a(C-x)} = z^2,$$

of $$z e^{2a(C-x)} + 2 e^{a(C-x)} = z,$$

dat is $$z(1-e^{2a(C-x)}) = 2e^{a(C-x)},$$

waaruit $$z = \frac{2e^{a(C-x)}}{1-e^{2a(C-x)}},$$

of, omdat $z = \frac{\partial y}{\partial x}$ is,

$$\partial y = \frac{2e^{a(C-x)}}{1-e^{2a(C-x)}}\,\partial x.$$

Om deze formule te integreren, stellen wij $e^{a(C-x)} = v$, en dan is $e^{a(C-x)} \times -a\partial x = \partial v$, dus $\partial x = -\frac{\partial v}{ae^{a(C-x)}} = -\frac{\partial v}{av}$,

waardoor

$$\partial y = -\frac{2\partial v}{a(1-v^2)} \text{ of } -\partial y = \frac{2\partial v}{a(1-v^2)},$$

dat is $$-\partial y = \frac{1}{a}\left\{\frac{\partial v}{1-v}+\frac{\partial v}{1+v}\right\},$$

zoodat $$C' - y = \frac{1}{a}\,\text{Nep. Log.}\,\frac{1+v}{1-v},$$

of voor v derzelver waarde schrijvende

$$C' - y = \frac{1}{a}\,\text{Nep. Log.}\,\frac{1+e^{a(C-x)}}{1-e^{a(C-x)}},$$

dus $$y = C' - \frac{1}{a}\,\text{Nep. Log.}\,\frac{1+e^{a(C-x)}}{1-e^{a(C-x)}} \quad \ldots \text{(A)}$$

waardoor dan y in x is uitgedrukt.

Wil

Wil men daarentegen x in y uitdrukken, dan heeft men

$$a(C' - y) = \text{Nep. Log.} \frac{1 + e^{a(C-x)}}{1 - e^{a(C-x)}},$$

of

$$e^{a(C'-y)} = \frac{1 + e^{a(C-x)}}{1 - e^{a(C-x)}},$$

zoodat $e^{a(C'-y)} - e^{a(C'-y)} e^{a(C-x)} = 1 + e^{a(C-x)}$,

of $e^{a(C-x)}(1 + e^{a(C'-y)}) = e^{a(C'-y)} - 1$,

en

$$e^{a(C-x)} = \frac{e^{a(C'-y)} - 1}{e^{a(C'-y)} + 1},$$

zoodat

$$a(C - x) = \text{Nep. Log.} \frac{e^{a(C'-y)} - 1}{e^{a(C'-y)} + 1},$$

of

$$C - x = \frac{1}{a} \text{Nep. Log.} \frac{e^{a(C'-y)} - 1}{e^{a(C'-y)} + 1},$$

waaruit

$$x = C - \frac{1}{a} \text{Nep. Log.} \frac{e^{a(C'-y)} - 1}{e^{a(C'-y)} + 1} \quad \ldots (B)$$

LXXIX. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Men vraagt: het middelbaar soortelijk gewigt te vinden van een concentriek uitgeholden bol, in de onderstelling, dat het soortelijk gewigt of de digtheid in elke bolvormige laag eene gegevene functie van den straal is?

OPGELOST *door* I. R. SCHMIDT en F. J. STAMKART.

OPLOSSING *van* I. R. SCHMIDT.

Stellen wij den straal van den bol r, die van de uitholing r' en die van eene willekeurige bolvormige laag x, dan is de differentiaal van den inhoud $4x^2\pi\,\partial x$ of $4\pi x^2 \partial x$. Laat nu het soortelijk gewigt van deze laag z zijn, waarin z eene bekende functie van x beteekent, dan is het gewigt van deze differentiaal $4\pi x^2 z \partial x\,\gamma$, zijnde γ het gewigt van eene cubieke eenheid

wa-

water. Hieruit volgt dan voor het gewigt van den concentriek uitgeholden bol $4\pi\gamma \int x^2 z \delta x$, wel te verstaan, wanneer deze integraal van r' tot r genomen wordt.

Daar nu in het algemeen het middelbaar soortelijk gewigt gelijk is aan het volstrekte gewigt gedeeld door het volume en door γ, zoo volgt hieruit, omdat het volume hier door $\frac{4}{3} r^3 \pi$ wordt uitgedrukt, dat het gevraagde middelbaar soortelijk gewigt zal worden uitgedrukt door de formule

$$G = \frac{4\pi\gamma \int x^2 z \delta x}{\frac{4}{3}\pi\gamma r^3},$$

dat is door $$G = \frac{3}{r^3} \int x^2 z \delta x \quad . \; . \; . \; . \; . \; (A)$$

waarin nu $\int x^2 z \delta x$ nog tusschen de grenzen $x = r'$ en $x = r$ moet genomen worden.

Deze formule stelt dan nu het middelbaar soortelijk gewigt van het uitgeholde ligchaam voor, dat is, het soortelijk gewigt, dat een gelijkslachtige massive bol van den straal r zou moeten hebben, om met den gegeven' uitgeholden bol gelijk gewigt te hebben; doch men kan ook naar het middelbaar soortelijk gewigt vragen van het massieve gedeelte des uitgeholden bols, welke vraag hierop neder zou komen, dat men het soortelijk gewigt van een bol wilde kennen, die op dezelfde wijze als de gegevene uitgehold en in al deszelfs deelen gelijkslachtig zijnde, met het gegeven ligchaam gelijk gewigt zou hebben, en alsdan verschilt de oplossing met de voorgaande nergens anders in, dan dat het volume hier zou worden uitgedrukt door $\frac{4}{3}(r^3 - r'^3)\pi$, zoodat wij alsdan zouden hebben

$$G' = \frac{3}{r^3 - r'^3} \cdot \int x^2 z \delta x \quad . \; . \; . \; . \; (B)$$

waarin $\int x^2 z \delta x$ nog van r' tot r genomen moet worden.

Stellen wij, om een enkel voorbeeld te geven, de digtheid in omgekeerde reden van den straal, doch aan het oppervlak van den bol gelijk d, dan is $z = \frac{rd}{x}$, zoodanig, dat, de geheele bol massief zijnde, het soortelijk gewigt in het middelpunt oneindig zou wezen. Voor dit geval hebben wij

$$\int x^2 z \delta x = \int r d x \delta x = \tfrac{1}{2} r d x^2 + C,$$

en

en dus tusschen de grenzen $x = r'$ en $x = r$

$$\int x^2 z \partial x = \frac{1}{2} rd\,(r^2 - r'^2).$$

Wij vinden hierdoor voor het middelbaar soortelijk gewigt van den uitgeholden bol

$$G = \frac{3}{2}\, d\, \frac{r^2 - r'^2}{r^2},$$

en voor het middelbaar soortelijk gewigt van het massieve gedeelte

$$G' = \frac{3}{2}\, d \times \frac{r(r+r')}{r^2 + rr' + r'^2},$$

welke beide formule, door $r' = 0$ te stellen, voor het middelbaar soortelijk gewigt van den bol, ingevalle dezelve geheel massief is, geven $G' = \frac{3}{2}\, d$.

LXXX. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Den loop en de verdere eigenschappen te vinden van de kromme lijn, welke tot polaire vergelijking heeft $z = \phi$ *Sin.* ϕ?

OPGELOST *door* I. R. SCHMIDT, F. J. STAMKART en A. B. DE BOCK, JUN.

OPLOSSING *van* I. R. SCHMIDT.

§ 1. Om vooreerst den vorm van de kromme ten naaste bij te bepalen, verkrijgen wij, door ϕ achtervolgens met $30°$ te laten opklimmen,

$\phi = 0° = 0 \ldots\ldots z = 0 \times 0$	$= 0$	$=$	$0{,}00000$
$\phi = 30° = \frac{1}{6}\pi \ldots z = \frac{1}{6}\pi \times \frac{1}{2}$	$= \frac{1}{12}\pi$	$=$	$0{,}26160$
$\phi = 60° = \frac{2}{6}\pi \ldots z = \frac{2}{6}\pi \times \frac{1}{2}\sqrt{3}$	$= \frac{1}{6}\pi\sqrt{3}$	$=$	$0{,}90690$
$\phi = 90° = \frac{3}{6}\pi \ldots z = \frac{3}{6}\pi \times 1$	$= \frac{1}{2}\pi$	$=$	$1{,}57079$
$\phi = 120° = \frac{4}{6}\pi \ldots z = \frac{4}{6}\pi \times \frac{1}{2}\sqrt{3}$	$= \frac{1}{3}\pi\sqrt{3}$	$=$	$1{,}81380$
$\phi = 150° = \frac{5}{6}\pi \ldots z = \frac{5}{6}\pi \times \frac{1}{2}$	$= \frac{5}{12}\pi$	$=$	$1{,}30899$
$\phi = 180° = \frac{6}{6}\pi \ldots z = \frac{6}{6}\pi \times 0$	$= 0$	$=$	$0{,}00000$
$\phi = 210° = \frac{7}{6}\pi \ldots z = \frac{7}{6}\pi \times -\frac{1}{2}$	$= -\frac{7}{12}\pi$	$= -$	$1{,}83269$
$\phi = 240° = \frac{8}{6}\pi \ldots z = \frac{8}{6}\pi \times -\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$= -\frac{2}{3}\pi\sqrt{3}$	$= -$	$3{,}62760$
$\phi = 270° = \frac{9}{6}\pi \ldots z = \frac{9}{6}\pi \times -1$	$= -\frac{3}{2}\pi$	$= -$	$4{,}71238$
$\phi = 300° = \frac{10}{6}\pi \ldots z = \frac{10}{6}\pi \times -\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$= -\frac{5}{6}\pi\sqrt{3}$	$= -$	$4{,}53450$
$\phi = 330° = \frac{11}{6}\pi \ldots z = \frac{11}{6}\pi \times -\frac{1}{2}$	$= -\frac{11}{12}\pi$	$= -$	$2{,}87999$
$\phi = 360° = \frac{12}{6}\pi \ldots z = \frac{12}{6}\pi \times 0$	$= 0$	$=$	$0{,}00000$
enz. *enz.*			

Nemen wij nu in aanmerking, dat de negatieve waarden van z op

op het verlengde der polaire ordinaten moet worden uitgezet, en nemen wij OP, *Fig.* 57, voor eenheid aan, dan verkrijgen wij, door deze tafel, ten naasten bij den vorm van twee bladen der kromme, waarvan de eerste geheel binnen de tweede gelegen is. Men zal dezen vorm naauwkeuriger verkrijgen, door de waarden van ϕ met kleinere verschillen te doen opklimmen, en zal hierbij met veel vrucht van de logarithmen gebruik kunnen maken, daar uit onze vergelijking terstond volgt $Log.\ z = Log.\ \phi + Log.\ Sin.\ \phi$, zijnde het klaar, dat men voor $Log.\ \phi$ niet den logarithmus van het aantal graden, maar den logarithmus van het aantal deelen van den straal moet nemen.

§ 2. Het is klaar, dat men de opgegevene tafel tot in het oneindige voort kan zetten, en er alzoo een oneindig aantal bladen zal bestaan, waarvan elke volgende al de voorgaande insluit. Neemt men verder in aanmerking, van de negatieve ordinaten op het verlengde der bewegende lijn uit te zetten, dan is het duidelijk in te zien, dat zoo lang ϕ positief blijft, de kromme geheel boven de lijn ZZ' zal liggen, en de opgegevene leerwijze is dus genoegzaam, om de geheele kromme lijn door punten te construeren.

§ 3. Indien men echter de twee eerste bladen OQHO en OQ_1H_1O eens en vooral zuiver geteekend heeft, is het niet noodig, voor de volgende bladen, de ordinaten door berekening te zoeken, daar zulks alsdan door eene zeer eenvoudige constructie geschieden kan. Stellen wij namelijk voor ϕ achtervolgens a, $a + \pi$, $a + 2\pi$, $a + 3\pi$, *enz.* dan verkrijgen wij

$\phi = a \ldots\ldots z = a\ Sin.\ a \qquad = a\ Sin.\ a$

$\phi = a + \pi \ldots\ldots z = (a + \pi)\ Sin.\ (a + \pi) = -(a\ Sin.\ a + \pi\ Sin.\ a)$

$\phi = a + 2\pi \ldots\ldots z = (a + 2\pi)\ Sin.\ (a + 2\pi) = +\ (a\ Sin.\ a + 2\pi\ Sin.\ a)$

$\phi = a + 3\pi \ldots\ldots z = (a + 3\pi)\ Sin.\ (a + 3\pi) = -(a\ Sin.\ a + 3\pi\ Sin.\ a)$

enz. *enz.*

Is dus POQ de hoek a, dan zullen de verschillende waarden, die wij voor z vonden, alle positief genomen, de achtervolgende waarden van OQ, OQ_1, OQ_2, *enz.* voorstellen, en daar deze waarden van z eene rekenkunstige reeks vormen, die met $\pi\ Sin.\ a$ opklimt, zoo volgt hieruit, dat QQ_1, Q_1Q_2, Q_2Q_3, *enz.* alle even groot en gelijk $\pi\ Sin.\ a$ zullen wezen, waardoor dan, de twee eer-

eerste bladen geconstrueerd zijnde, alle de overige zonder eenige moeite kunnen geteekend worden.

§ 4. Wij hebben tot nog toe alleen de positieve waarden van ϕ in aanmerking genomen; doch de constructie van z voor de negatieve waarden van ϕ, wordt door de volgende beschouwing allerduidelijkst.

Stellen wij ϕ achtervolgens gelijk $+ a$ en $- a$, dan vinden wij

voor $\phi = a \ldots\ldots z = a \ Sin.\ a$.

voor $\phi = - a \ldots z = - a \ Sin.\ (- a) = a \ Sin.\ a$,

en daar deze twee waarden van z volmaakt dezelfde zijn, zoo volgt hieruit, dat de hoeken POQ en POQ′ even groot nemende, de ordinaten OQ en OQ′ mede even groot zullen wezen. Daar dit nu voor alle mogelijke hoeken a doorgaat, zoo blijkt hieruit, dat de gevraagde kromme boven en beneden ZZ′ volmaakt denzelfden vorm zal hebben, waardoor dan nu de loop van deze kromme genoegzaam bepaald is.

§ 5. Verlengen wij Q′O en QO tot zij de kromme in q'_1 en q_1 ontmoeten, dan volgt uit de voorgaande §, dat $Oq_1 = Oq'_1$ en dus $Qq_1 = QO + q'_1O$ zal zijn; is nu $POQ = a$, dan is $POq'_1 = \pi - a$, en wij hebben bijgevolg $QO = a \ Sin.\ a$ en $q'_1O = (\pi - a) \ Sin.\ (\pi - a) = \pi \ Sin.\ a - a \ Sin.\ a$, zoodat

$$Qq_1 = QO + q'_1O = \pi \ Sin.\ a;$$

en daar dit juist de waarde is, die wij boven voor de stukken $QQ_1 = Q_1Q_2 =$ *enz.* gevonden hebben, zoo volgt hieruit, *dat elke onbepaalde regte lijn* VV′, *die door den oorsprong* O *gaat, door de kromme in stukken* Q_2Q_1, Q_1Q, Qq_1, q_1q_2, *enz. gesneden wordt, welke alle even groot zijn.*

§ 6. Door middel van de laatste eigenschap kan men de geheele kromme construeren, zoodra het eerste blad $OQ\,q'_1O$ door berekening bepaald is. Is namelijk dit blad geteekend, dan is ook het overeenkomstige blad $OQ'q_1O$ bepaald, en trekt men nu eene willekeurige lijn VV′ door O, dan zal men alleen QQ_1, Q_1Q_2, *enz.*, benevens q_1q_2, q_2q_3, *enz.* alle gelijk Qq_1 moeten nemen, om al de punten van de kromme te vinden, die op VV′ liggen. Dit zelfde op een genoegzaam aantal lijnen VV′ verrigtende, zal men de kromme zoo naauwkeurig kunnen vinden als men begeert.

§ 7.

§. 7. Zelfs het eerste blad kan, op de volgende wijze, door constructie gevonden worden. Uit de vergelijking $z = \phi$ *Sin.* ϕ volgt terstond $1 : \phi = $ *Sin.* $\phi : z$, en de polaire ordinaat is dus, voor elken boog ϕ, vierde evenredig tot de eenheid, de lengte van dezen boog en deszelfs sinus. Maakt men alzoo OM, *Fig.* 58, zoo naauwkeurig als de werktuigen gedoogen, gelijk aan π, dat is gelijk 3,1415962 × OP, en deelt men OM in evenveel gelijke deelen als den halven omtrek, dan zullen deze deelen (O ; 1), (1 ; 2), *enz.* gelijk zijn aan de bogen (P ; 1), (1 ; 2), *enz.* Om dus de ordinaat OQ voor eenig deelpunt (2) te vinden, make men OR gelijk de sinus (2 ; S) van den boog (P ; 2) en trekke PR ; verder neme men ON gelijk zooveel deelen van OM als de boog (P ; 2) deelen van den halven omtrek bedraagt, en trekke NQ evenwijdig met PR, en alsdan zal Q het gevraagde punt van de kromme zijn, want dan is OP : OR = ON : OQ of 1 : *Sin.* $\phi = \phi$: OQ, zoodat OQ $= \phi$ *Sin.* $\phi = z$. Door middel van deze constructie kan men in weinig tijd een aanmerkelijk aantal punten van de kromme bepalen, en door middendoordeeling van de bogen en de deelen van OM, kan men deze punten zoo digt bij elkander brengen, als men verkiest. Het eerste blad op deze wijze geconstrueerd hebbende, zal men de overige bladen, naar aanleiding van hetgeen in § 6. gezegd is, kunnen daarstellen, zoodat men dan nu de geheele kromme, zonder berekening, zal hebben geconstrueerd.

§ 8. Daar in elk der bladen de ordinaten met 0 aanvangen, en wederom met 0 eindigen, is het klaar, dat in elk van dezelve eene grootste ordinaat moet bestaan, en om te onderzoeken, voor welke waarden van ϕ deze grootste ordinaten plaats hebben, zullen wij de functie $z = \phi$ *Sin.* ϕ tot een maximum moeten maken. Hiertoe hebben wij

$$\frac{\delta z}{\delta \phi} = \textit{Sin.}\ \phi + \phi\ \textit{Cos.}\ \phi = 0,$$

waaruit $$\phi = -\frac{\textit{Sin.}\ \phi}{\textit{Cos.}\ \phi} = -\textit{Tang.}\ \phi,$$

en het vinden dezer grootste ordinaten komt dus eigenlijk neder *op het bepalen van al de bogen, welke gelijk zijn aan derzelver tangens, negatief genomen.* — Dit vraagstuk kan niet anders dan

bij benadering worden opgelost, en deze benadering kan op de volgende wijze worden ingerigt. Onderstellen wij, dat men bij tasting een' hoek a gevonden heeft, die te naasten bij aan de vergelijking $\phi = -$ Tang. ϕ voldoet, en dat x het kleine boogje is, hetwelk aan a ontbreekt, om de ware waarde van ϕ te verkrijgen, dan is $\phi = a + x$ en bijgevolg

$$a+x=-Tang.(a+x)=-\frac{Tang.a+Tang.x}{1-Tang.a.Tang.x},$$

daar nu x zeer klein ondersteld wordt, kan men $Tang.\ x = x$ stellen, en dit geeft ons

$$a+x=\frac{Tang.\ a+x}{x\ Tang.\ a-1},$$

of $$a\,x\,Tang.\ a-a+x^2\,Tang.\ a-x=Tang.\ a+x,$$

wegens de geringheid van x kunnen wij ook x^2 verwaarloozen, en dan is

$$ax\,Tang.\ a-2x=a+Tang.\ a,$$

waaruit $$x=\frac{a+Tang.\ a}{a\,Tang.\ a-2},$$

en, door telkens in plaats van a de nieuwe benaderende waarde van ϕ te schrijven, kan men deze benadering zoo ver voortzetten als men goedvindt.

Het is ons oogmerk niet, om de benadering werkelijk te verrigten; doch wij mogen niet nalaten om te doen zien, op welke wijze men bij tasting de waarden van a kan vinden, waarmede men de benadering moet aanvangen. Verdeelen wij, *Fig.* 59, den halven omtrek in een zeker aantal gelijke deelen, waartoe wij er in de figuur 9 hebben aangenomen, welke alzoo elk een' boog van 20° voorstellen, doch waarvoor men bij eenen grooteren cirkel gemakkelijk graden zou kunnen aannemen, en verdeelen wij PQ, die wij nagenoeg gelijk den halven omtrek onderstellen, insgelijks in evenveel gelijke deelen; teekenen wij verder de deelpunten op den omtrek en op PQ, beide van P te beginnen, met dezelfde cijfers aan, dan is het klaar, dat wij alleen zullen moeten beproeven, door welke cijfers van den omtrek de lijnen, door het middelpunt getrokken, juist op dezelfde punten of cijfers van PQ nederkomen; want omdat alsdan de boog positief en de tangens negatief is, doch voor het overige gelijke lengte hebben, zullen

de-

dane bogen aan de vraag voldoen. Zoo toont de figuur aan, dat het gezegde de eerste nul tusschen g en 6 en wel te maaten bij op 5½ gebeurt, en dit geeft voor den eersten boog te nemen bij 115°, welke dan nu de waarde is, die men bij de benadering voor u kan aannemen. De figuur zal even duidelijk doen zien, dat er een oneindig aantal bogen bestaat, welke aan de vraag voldoen, en die in het 2e, 4e, 6e, 8e, en in het algemeen in de evene quadranten gelegen zijn. Deze aanmerking is van wezenlijk belang, daar zij, met de constructie van onze kromme in verband gebragt, aantoont, dat elke waarde van Φ, die aan de vergelijking $\Phi = -$ *Tang.* Φ voldoet, tot eene der grootste ordinaten van de verschillende bladen der kromme behoort, hetgeen ons van de moeite bevrijdt, om deze waarden aan het tweede differentiaal quotiens te toetsen.

Men kan der waarden van u, die ten naaste bij aan de vergelijking $\Phi = -$ *Tang.* Φ voldoen, ook op de volgende wijze verkrijgen. Men beschrijve, wanneer de kromme zuiver geteekend is, uit O, *Fig.* 39, cirkelbogen MN, die, zoo na mogelijk als zulks op het bloote oog plaats kan hebben, de verschillende takken of bladen aanraken. De stralen van deze cirkels zullen dan klaarblijkelijk gelijk de gevraagde grootste ordinaten zijn, en bij de raakpunten H, H_1, H_2, *enz.* plaats hebben. Indien men dus de hoeken POH, POH_1, POH_2, *enz.* naauwkeurig met eenen goeden transporteur meet, dan zullen POH, $\pi + POH_1$, $2\pi + POH_2$, enz. de waarden van u zijn, waarmede men de benadering moet aanvangen. Het is echter klaar, dat deze handelwijze niet naauwkeuriger zal wezen dan de voorgaande, omdat de raakpunten op het oog met weinig zekerheid te bepalen zijn.

Wij kunnen van dit onderwerp niet afstappen, zonder op te merken, dat indien de cirkelbogen MN de takken in H aanraken, deze cirkelbogen en de bogen van de kromme in de punten H de raaklijnen gemeen moeten hebben, waaruit volgt, *dat in de punten* H, *waarin de grootste polaire ordinaten plaats hebben, de raaklijn loodregt op de polaire ordinaat staat.* Wij zullen weldra zien, dat de berekening deze eigenschap bevestigt, en tevens nog eene andere merkwaardige eigenschap der punten H doet kennen.

§ 9. Om de punten I, I', *enz.* te vinden, waarin zich de

kromme het meest van de lijn ZZ' verwijdert, of waarin de raaklijn evenwijdig met ZZ' loopt, moet men onderzoeken, wanneer de loodlijn QL een maximum wordt. Nu wordt deze loodlijn uitgedrukt door

$$y = z \, Sin. \phi = \phi \, Sin^2. \phi,$$

en wij hebben alzoo om het gevraagde te bepalen

$$\frac{\partial y}{\partial \phi} = Sin^2. \phi + 2\phi \, Sin. \phi \, Cos. \phi = o,$$

of $$Sin. \phi \, (Sin. \phi + 2\phi Cos. \phi) = o.$$

Aan deze vergelijking wordt vooreerst voldaan, door $Sin. \phi = o$ en dus $\phi = o$ te nemen, en deze waarde behoort tot het punt O, in hetwelk al de takken door de lijn ZZ' worden aangeraakt. Eigenlijk gezegd behoort $\phi = o$ alleen tot het punt O van den eersten tak OQ of OQ$'$, en hieruit volgt, dat dit punt O een keerpunt is. De punten O van de volgende takken stemmen daarentegen overeen met $\phi = \pi$, $\phi = 2\pi$, *enz.*, welke allen in den factor $Sin. \phi = o$ begrepen zijn.

De punten I zullen alzoo door den tweeden factor moeten worden gevonden, en wij hebben dus ter bepaling van deze punten

$$\phi = - \tfrac{1}{2} \frac{Sin. \phi}{Cos. \phi} = - \tfrac{1}{2} \, Tang. \phi,$$

welke vergelijking op dezelfde wijze kan worden benaderd als die van § 8, en tot soortgelijke aanmerkingen aanleiding geeft.

§ 10. Ten einde de punten te vinden, waar zich de kromme het meeste van de lijn UU$'$ verwijdert, die loodregt door ZZ' gaat, moeten wij

$$x = z \, Cos. \phi = \phi \, Sin. \phi \, Cos. \phi = \tfrac{1}{2} \phi \, Sin. 2\phi$$

tot een maximum of minimum maken, en dit geeft

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} = \tfrac{1}{2} \, Sin. 2\phi + \phi \, Cos. 2\phi = o,$$

waaruit $$\phi = - \tfrac{1}{2} \frac{Sin. 2\phi}{Cos. 2\phi} = - \tfrac{1}{2} \, Tang. 2\phi,$$

welke vergelijking al wederom op dezelfde wijze kan worden behandeld, als die van § 8 en tot aanmerkingen van denzelfden aard voert.

§ 11. Om aan een gegeven punt van de kromme eene raaklijn

te

te trekken, zullen wij den hoek ψ berekenen, welken dezelve met de polaire ordinaat maakt. Hiertoe hebben wij alzoo

$$Tang.\psi = \frac{z\partial\phi}{\partial z} = \frac{\phi\, Sin.\,\phi\,\partial\phi}{(Sin.\,\phi + \phi\, Cos.\,\phi)\,\partial\phi} = \frac{\phi}{1+\phi\, Cot.\,\phi},$$

door welke formule de hoek ψ voor elke gegevene waarde van ϕ kan worden berekend.

Wil men dus onderzoeken, in welke punten de raaklijn loodregt op de ordinaat staat, dan moeten wij $Tang.\,\psi = Tang.\,90^\circ = \infty$ stellen, en dit geeft $1 + \phi\, Cot.\,\phi = 0$, waaruit $\phi = -Tang.\,\phi$; en daar dit dezelfde vergelijking is, die wij boven voor de berekening der grootste ordinaten vonden, zoo wordt hierdoor bevestigd, dat de grootste ordinaten loodregt op derzelver raaklijnen staan.

Zullen de raaklijnen evenwijdig met ZZ' loopen, dan moet $\psi = 180^\circ - \phi$ en dus $Tang.\,\psi = -Tang.\,\phi$ zijn, hetgeen ons geeft $-Tang.\,\phi = \frac{\phi}{1+\phi\, Cot.\,\phi}$ of $-Tang.\,\phi - \phi = \phi$, waaruit $\phi = -\frac{1}{2}Tang.\,\phi$, dat volkomen met § 9 overeenkomt.

Zal de raaklijn loodregt op ZZ' staan, dan moet $\psi = 90^\circ - \phi$ en dus $Tang.\,\psi = Cot.\,\phi$ zijn. Dit geeft ons $Cot.\,\phi = \frac{\phi}{1+\phi\, Cot.\,\phi}$ of $Cot.\,\phi + \phi\, Cot^2.\,\phi = \phi$, waaruit wij vinden $\phi = -\frac{Cot.\,\phi}{Cot^2.\,\phi - 1}$ $= -\frac{Tang.\,\phi}{1 - Tang^2.\,\phi} = -\frac{1}{2}Tang.\,2\phi$, even zoo als wij in § 10. gevonden hebben.

Wil men eindelijk onderzoeken, of eene der ordinaten tevens raaklijn aan de kromme kan zijn, dan zal men $\psi = 0$ moeten stellen, en dit geeft $\phi\, Sin.\,\phi = 0$, waaruit blijkt, dat aan het gevraagde zal worden voldaan, door te stellen $\phi = 0$, $\phi = \pi$, $\phi = 2\pi$, *enz.*, hetgeen met het veelvoudig punt O overeenstemt, en alzoo wederom aanwijst, dat ZZ' raaklijn van al de bladen is.

§ 12. De formule voor $Tang.\,\psi$ geeft ook een middel aan de hand, om, wanneer de kromme eens geconstrueerd is, de raaklijn van eenig punt door eene gemakkelijke constructie te bepalen;

 daar

daar namelijk $\phi\, Sin.\, \phi = z$ en dus $\phi = \frac{z}{Sin.\, \phi}$ is, zoo heeft men

$$Tang.\, \psi = \frac{\phi\, Sin.\, \phi}{\phi\, Cos.\, \phi + Sin.\, \phi} = \frac{z}{z\, Cot.\, \phi + Sin.\, \phi}$$

Zij nu A, *Fig.* 57, het punt, waaraan de raaklijn moet worden getrokken, en stellen wij AB loodregt op OA, dan is OBA $= \phi$ en dus AB $= z\, Cot.\, \phi$; verlengende dus AB, totdat BE $=$ CD is, dan is AE $= z\, Cot.\, \phi + Sin.\, \phi$, en wij hebben alzoo $Tang.\, OEA = \frac{OA}{AE} = \frac{z}{z\, Cot.\, \phi + Sin.\, \phi}$, waaruit blijkt, dat OEA $= \psi$ is. Makende dus $\angle OAF = \angle OEA$, dan zal FF' de raaklijn van het punt A zijn.

Deze constructie behoort oorspronkelijk op een punt van het eerste blad verrigt te worden, omdat aldaar ϕ in het eerste of tweede quadrant valt, en dan moet dezelve, in de volgende bladen, naar de verschillende toestanden der lijnen gewijzigd worden.

§ 13. De inhoud van eenig gedeelte der kromme lijn, begrepen tusschen twee willekeurige polaire ordinaten, wordt op de volgende wijze bepaald. Daar in het algemeen $I = \frac{1}{2}\int z^2 \partial\phi$ is, zoo hebben wij hier

$$I = \tfrac{1}{2}\int \phi^2\, Sin^2.\, \phi\, \partial\phi = \tfrac{1}{4}\int \phi^2 (1 - Cos.\, 2\phi)\, \partial\phi$$
$$= \tfrac{1}{12}\phi^3 - \tfrac{1}{4}\int \phi^2\, Cos.\, 2\phi\, \partial\phi.$$

Verder hebben wij

$\int \phi^2\, Cos.\, 2\phi\, \partial\phi = \frac{1}{2}\int \phi^2\, \partial.\, Sin.\, 2\phi = \frac{1}{2}\phi^2\, Sin.\, 2\phi - \int \phi\, Sin.\, 2\phi\, \partial\phi,$

$\int \phi\, Sin.\, 2\phi\, \partial\phi = -\frac{1}{2}\int \phi\, \partial.\, Cos.\, 2\phi = -\frac{1}{2}\phi\, Cos.\, 2\phi + \frac{1}{2}\int Cos.\, 2\phi\, \partial\phi,$

$\int Cos.\, 2\phi\, \partial\phi = \frac{1}{2}\, Sin.\, 2\phi,$

en deze integralen in elkander substituerende, komt er

$$I = \tfrac{1}{12}\phi^3 - \tfrac{1}{8}\phi^2\, Sin.\, 2\phi - \tfrac{1}{8}\phi\, Cos.\, 2\phi + \tfrac{1}{16}\, Sin.\, 2\phi + C,$$

welke integraal nu gemakkelijk van $\phi = \alpha$ tot $\phi = \beta$ kan worden genomen, indien men slechts in aanmerking neemt, dat dezelve alsdan de ruimte voorstelt, door de polaire ordinaat doorloopen, om van den eersten boog tot den tweeden te geraken, waardoor zeer dikwijls, gedurende deze beweging, eene zelfde ruimte meer dan eenmaal doorloopen wordt.

Vangt

Vangt men bij $\phi = 0$ aan, dan wordt $C = 0$, en de formule voor den inhoud is alsdan

$$I = \tfrac{1}{12}\phi^3 - \tfrac{1}{4}\phi^2 \, Sin.\, 2\phi - \tfrac{1}{4}\phi \, Cos.\, 2\phi + \tfrac{1}{8}\, Sin.\, 2\phi.$$

Stellen wij hierin ϕ achtervolgens gelijk π, 2π, 3π, 4π, *enz.*, dan verkrijgen wij, voor

$\phi = \pi \ldots\ldots I = \tfrac{1}{24}\pi(2\pi^2 - 3)$. Inhoud. 1e blad.

$\phi = 2\pi \ldots\ldots I = \tfrac{1}{24}\pi(16\pi^2 - 6)$ Som der inhouden van 2 bladen.

$\phi = 3\pi \ldots\ldots I = \tfrac{1}{24}\pi(54\pi^2 - 9)$ Som der inhouden van 3 bladen.

enz. *enz.*

$\phi = n\pi \ldots\ldots I = \tfrac{1}{24}\pi(2n^3\pi^2 - 3n)$. Som der inhouden van n bladen.

Om den inhoud van het n^e blad te vinden, moeten wij de som der inhouden van $n - 1$ bladen aftrekken van de som der inhouden van n bladen. Nu hebben wij door de laatste uitdrukking

Som der inhouden van n bladen $= \tfrac{1}{24}\pi(2n^3\pi^2 - 3n)$.

Som der inhouden van $n-1$ bladen $= \tfrac{1}{24}\pi(2(n-1)^3\pi^2 - 3(n-1))$,

waarvan het verschil is

$$\text{Inhoud } n^e \text{ blad} = \tfrac{1}{24}\pi \left\{ (6n^2 - 6n - 2)\pi^2 - 3 \right\},$$

en hieruit volgt voor den inhoud der achtervolgende bladen

Inhoud 1e. blad $= \tfrac{1}{24}\pi(2\pi^2 - 3)$

Inhoud 2e blad $= \tfrac{1}{24}\pi(14\pi^2 - 3)$

Inhoud 3e blad $= \tfrac{1}{24}\pi(38\pi^2 - 3)$

Inhoud 4e blad $= \tfrac{1}{24}\pi(74\pi^2 - 3)$

enz. *enz.*

Nemende hiervan de achtervolgende verschillen, dan vinden wij, voor de ruimten, die tusschen de verschillende takken gelegen zijn, de reeks

$$\tfrac{1}{2}\pi^3,\ \pi^3,\ 1\tfrac{1}{2}\pi^3,\ 2\pi^3,\ 2\tfrac{1}{2}\pi^3,\ \textit{enz.}$$

zoodat deze inhouden in eene rekenkunstige reeks opklimmen, waarvan het gemeene verschil gelijk $\tfrac{1}{2}\pi^3$ is. De inhouden der achtervolgende bladen vormen alzoo eene reeks, waarvan de tweede verschillen gelijk zijn.

§ 14. Begeert men de vergelijking op de regthoekige coördinaten te kennen, en stelt men hiertoe $OL = x$ en $LQ = y$, dan heeft men $y = x\, Tang.\, \phi$ of $Tang.\, \phi = \frac{y}{x}$, dus $\phi =$ *Boog Tang.* $\frac{y}{x}$; verder is $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ en $y = z\, Sin.\, \phi$, dus

$$Sin.\phi = \frac{y}{z} = \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)}},\ \text{zoodat}\ \frac{z}{Sin.\phi} = \frac{z^2}{y} = \frac{x^2+y^2}{y}.$$

Brengende nu deze waarden over in $z = \phi\, Sin.\phi$ of $\frac{z}{Sin.\phi} = \phi$, dan verkrijgen wij voor de vergelijking op de regtstandige coördinaten

$$\frac{x^2+y^2}{y} = Boog\ Tang.\ \frac{y}{x}.$$

Door middel van deze vergelijking kan de eene onbekende niet in de andere worden uitgedrukt; doch dezelve verschaft een gemakkelijk middel, om de raaklijn van elk punt door constructie te vinden, en zal bovendien tot aanmerkingen voeren, die belangrijk genoeg zijn, om opgeteekend te worden.

Differentieren wij de laatstgevondene vergelijking, dan vinden wij, den straal OP door r uitdrukkende,

$$\frac{y(2x\delta x+2y\delta y)-\delta y(x^2+y^2)}{ry^2} = \frac{x\delta y - y\delta x}{x^2+y^2},$$

of
$$\frac{2xy\delta x+(y^2-x^2)\delta y}{ry^2} = \frac{x\delta y - y\delta x}{x^2+y^2},$$

dus
$$2xy(x^2+y^2)\delta x+(y^4-x^4)\delta y = rxy^2\delta y - ry^3\delta x,$$

waaruit
$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{2xy(x^2+y^2)+ry^3}{rxy^2-(y^4-x^4)},$$

zoodat wij voor de subtangens, gerekend op ZZ', vinden

$$y.\frac{\delta x}{\delta y} = \frac{rxy^2-(y^4-x^4)}{2x(x^2+y^2)+ry^2}.$$

Daar verder de afstand OT van den oorsprong O tot het punt T, waarin de raaklijn de as ZZ' snijdt, in het algemeen wordt uitgedrukt door $x - \frac{y\delta x}{\delta y}$, zoo vinden wij voor dezen afstand

$$OT = x - \frac{rxy^2-(y^4-x^4)}{2x(x^2+y^2)+ry^2} = \frac{2x^2(x^2+y^2)+(y^4-x^4)}{2x(x^2+y^2)+ry^2}$$

$$= \frac{(x^2+y^2)(2x^2+(y^2-x^2))}{2x(x^2+y^2)+ry^2} = \frac{(x^2+y^2)^2}{2x(x^2+y^2)+ry^2},$$

welke uitdrukking ook aldus kan worden geschreven

$$OT = \frac{x^2+y^2}{2x+r.\frac{y^2}{x^2+y^2}}.$$

Nu

Nu is $x^2 + y^2 =$ OA² en $r \times \frac{y^2}{x^2+y^2} = r\, Sin^2.\phi$, zoodat, CD loodregt op ZZ' en DH loodregt op OA getrokken wordende, CH de waarde van $r.\frac{y^2}{x^2+y^2}$ zal zijn. Hierdoor hebben wij dan

$$OT = \frac{OA^2}{2OG + CH},$$

waardoor dan de constructie van OT voor elk gegeven punt A zeer gemakkelijk wordt.

§ 15. Om de punten I te vinden, waarin de kromme zich het verste van ZZ' verwijdert, moeten wij $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ stellen, en dit geeft ons

$$2xy(x^2+y^2)+ry^3=0,$$

of, wanneer wij door den factor y deelen, welke klaarblijkelijk de lijn ZZ' aanduidt, die aan de vraag voldoet,

$$2x^3 + 2xy^2 + ry^2 = 0,$$

waaruit $$y = \pm x \sqrt{\frac{-2x}{2x+r}} = \pm x \sqrt{\frac{-x}{\frac{1}{2}r+x}}.$$

De punten I, die aan de vraag voldoen, moeten alzoo in de kromme lijn gelegen wezen, welke door deze vergelijking wordt uitgedrukt, en daar dezelve ook in de gegevene kromme moeten liggen, zoo zijn zij de punten, waarin deze twee kromme lijnen elkander doorsnijden.

Nu is het vooreerst klaar, dat de laatstgevondene vergelijking alleen voor negatieve waarden van x kan bestaan. Stellen wij dus $-x'$ in plaats van x, dat is, rekenen wij de abscisfen dezer kromme lijn als positief, wanneer zij op OZ genomen worden, dan wordt deze vergelijking

$$y = \pm x' \sqrt{\frac{x'}{\frac{1}{2}r - x'}},$$

verder is deze laatste vergelijking niets anders, dan die van eene cisfoide, beschreven met eenen cirkel, die $\frac{1}{2}r$ tot middellijn of $\frac{1}{4}r$ tot straal heeft. Beschrijven wij alzoo op OK $= \frac{1}{2}$ OP′ als middellijn een' cirkel, en construeren wij met dezen cirkel een cisfoide WOW′, dan zullen de punten I, waarin dezelve

onze kromme doorsnijdt, diegene zijn, welke zich het verste van ZZ' verwijderen, of waarvan de raaklijn evenwijdig met ZZ' loopt.

Deze aanmerking is van belang; want daar wij in § 9 gevonden hebben, dat de punten I bepaald worden door de vergelijking

$$\phi = -\tfrac{1}{2}\,Tang.\ \phi,$$

zoo volgt hieruit, dat wanneer men de beide krommen zuiver getekend heeft, derzelver doorsnijding al de hoeken ZOI, die aan de vergelijking $\phi = -\tfrac{1}{2}\,Tang.\ \phi$ beantwoorden, meetkunstig zal doen kennen, welke hoeken wij vroeger gezien hebben, dat niet dan door eene lastige benadering kunnen berekend worden. Wij merken hierbij nog op, dat, de constructie volvoerd zijnde, ZOI, ZOI' $+\ \pi$, ZOI'' $+\ 2\pi$, *enz.* de hoeken zullen zijn, die aan de vergelijking $\phi = -\tfrac{1}{2}\,Tang.\ \phi$ beantwoorden.

§ 16. Voor de punten, waarin de raaklijn loodregt op ZZ' staat of evenwijdig met UU' loopt, moet $\dfrac{\partial y}{\partial x} = \infty$ zijn, en dit geeft ons

$$rxy^2 - y^4 + x^4 = 0;$$

deze vergelijking ten opzigte van y opgelost, geeft

$$y = \pm\sqrt{\left\{\tfrac{1}{2}rx \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}r^2x^2 + x^4\right)}\right\}};$$

welke kromme lijn gemakkelijk geconstrueerd kan worden, en alsdan, door derzelver doorsnijding met onze kromme, al de punten zal doen kennen, waarin de raaklijn loodregt op ZZ' staat, en bijgevolg (§ 10) ook al de hoeken, die aan de vergelijking $\phi = -\tfrac{1}{2}\,Tang.\ 2\phi$ voldoen.

§ 17. Ook de punten H, waarbij de grootste polaire ordinaten plaats hebben, kunnen door zulk eene meetkunstige constructie gevonden worden. Daar namelijk bij deze punten, zoo als wij vroeger bewezen hebben, de raaklijn loodregt staat op de lijn, die naar den oorsprong gaat, en in dit geval $\angle$ ATZ' $= 90^\circ + \angle$ AOZ en dus *Tang.* ATZ' $= -$ *Cot.* AOZ, dat is $\dfrac{\partial y}{\partial x} = -\dfrac{x}{y}$ moet zijn, zoo geeft dit

$$-\frac{2xy\,(x^2 + y^2) + ry^3}{rxy^2 - y^4 + x^4} = -\frac{x}{y},$$

of

of $\quad 2xy^2(x^2+y^2)+ry^4=-rx^2y^2+xy^4-x^5$,

dat is $\quad (x+r)y^4+x^2(2x+r)y^2+x^5=0$,

of $\quad (x+r)(y^4+x^2y^2)+x^3y^2+x^5=0$,

dus $\quad (x+r)(y^2+x^2)y^2+x^3(y^2+x^2)=0$,

dat is $\quad (y^2+x^2)\{(x+r)y^2+x^3\}=0$.

Aan deze vergelijking wordt vooreerst voldaan door $y^2+x^2=0$, of $y=\pm x\sqrt{-1}$ te stellen, in welke vergelijking niets dan het enkele punt O is opgesloten. Stellen wij daarentegen den tweeden factor nul, dan hebben wij

$$(r+x)y^2+x^3=0,$$

waaruit
$$y=\pm x\sqrt{\frac{-x}{r+x}},$$

vergelijking van eene cissoide SOS′, met eenen cirkel beschreven, waarvan OP′ de middellijn is. De snijpunten van deze cissoide met onze kromme zullen dus al de punten H doen kennen, en bijgevolg meetkunstig al de hoeken aanwijzen, die aan de vergelijking $\phi=-Tang.\ \phi$ voldoen.

LXXXI. VOORSTEL.

Door U. HUGUENIN.

Drie cirkels zijn in grootte en stelling op een plat vlak gegeven, men vraagt het middelpunt van eenen cirkel te vinden, welken deze drie cirkels aanraakt.

Dit vraagstuk kan op zeer veel verschillende wijzen worden opgelost, door welke men op eene vierkants- of vierdemagts, ja zelfs somwijlen op eene vergelijking van den achtsten graad nederkomt; men vraagt hier echter het middelpunt van den begeerden cirkel door eene vergelijking van den eersten graad te vinden?

OPLOSSING van U. HUGUENIN.

Laat D, E en F, *Fig.* 60, de middelpunten der gegevene cirkels zijn, en H dat van den gevraagden cirkel, welken men onderstelt de drie eerste in de punten M, N en O aan te raken. Nemen wij verder XY en XZ, loodregt op elkander staande, als de assen der coördinaten aan, van welke wij de middelpunten D, E en F als op gegevene afstanden beschouwen, zoodanig, dat

dat, als men DA, EB en FC evenwijdig met XZ getrokken heeft, XA $= a$, XB $= a'$, XC $= a''$, AD $= b$, BE $= b'$ en FC $= b''$ bekend zijn. Voorts stelle men de lijnen DH, EH en FH te hebben getrokken, welke het middelpunt van den gevraagden cirkel met de middelpunten der gegevene cirkels vereenigen, en dus door de drie raakpunten gaan. Laat eindelijk HG evenwijdig met XZ en DI, HL en FK evenwijdig met XY getrokken worden; indien men dan XG $= x$ en HG $= y$ stelt, dan heeft men

$$AG = DI = x - a, \qquad HI = HG - AD = y - b,$$
$$GB = HL = a' - x, \qquad EL = EB - HG = b' - y,$$
$$KF = GC = a'' - x, \qquad HK = HG - FC = y - b'',$$

waardoor men verkrijgt

$$DH = \sqrt{\{(x - a)^2 + (y - b)^2\}},$$
$$EH = \sqrt{\{(x - a')^2 + (y - b')^2\}},$$
en
$$FH = \sqrt{\{(x - a'')^2 + (y - b'')^2\}}.$$

Stelt men alzoo de stralen van de drie gegevene cirkels DM $= r$, EN $= r'$ en FO $= r''$, dan vindt men voor den straal van den gevraagden cirkel deze drie uitdrukkingen:

$$MH = -r + \sqrt{\{(x - a)^2 + (y - b)^2\}} \,..(1),$$
$$NH = -r' + \sqrt{\{(x - a')^2 + (y - b')^2\}} \,..(2),$$
en
$$OH = -r'' + \sqrt{\{(x - a'')^2 + (y - b'')^2\}} \,..(3).$$

Daar nu deze stralen alle even groot zijn, zoo heeft men, door (1) en (2),

$$-r+\sqrt{\{(x-a)^2+(y-b)^2\}} = -r'+\sqrt{\{(x-a')^2+(y-b')^2\}} \,..(\alpha),$$

welke, in het vierkant gebragt en herleid zijnde, geeft

$$2(a'-a)x+2(b'-b)y+(a^2+b^2)-(a'^2+b'^2)+r^2-r'^2 = \ldots$$
$$\ldots 2r\sqrt{\{(x-a)^2+(y-b)^2\}} - 2r'\sqrt{\{(x-a')^2+(y-b')^2\}} \,..(\beta).$$

Vermenigvuldigt men nu (α) met $2r$, dan komt er

$$2rr'-2r'^2 = 2r'\sqrt{\{(x-a)^2+(y-b)^2\}} - 2r'\sqrt{\{(x-a')^2+(y-b')^2\}},$$

en trekkende dit van (3) af, dan blijft er

$$2(a'-a)x+2(b'-b)y+(a^2+b^2)-(a'^2+b'^2)+(r-r')^2 = \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots 2(r-r')\sqrt{\{(x-a)^2+(y-b)^2\}},$$

of

of, door 2 $(r - r')$ deelende,

$$\frac{a'-a}{r-r'}x+\frac{b'-b}{r-r'}y+\frac{a^2+b^2-a'^2-b'^2}{2(r-r')}+\tfrac{1}{2}(r-r')=\surd\{(x-a)^2+(y-b)^2\}\ (A).$$

Neemt men verder in aanmerking, dat de vergelijkingen (2) en (3) in niets anders verschillen, dan in de accenten, die bij a, b en r staan, dan is het klaar, dat men, de vergelijkingen (1) en (3) op dezelfde wijze behandelende, als wij nu met (1) en (2) zijn te werk gegaan, zal vinden

$$\frac{a''-a}{r-r''}x+\frac{b''-b}{r-r''}y+\frac{a^2+b^2-a''^2-b''^2}{2(r-r'')}+\tfrac{1}{2}(r-r'')=\surd\{(x-a)^2+(y-b)^2\}(a),$$

zoodanig, dat wij, door het verschil tusschen (A) en (a) te nemen, vinden

$$\left(\frac{a'-a}{r-r'}-\frac{a''-a}{r-r''}\right)x+\left(\frac{b'-b}{r-r'}-\frac{b''-b}{r-r''}\right)y\ \ldots\ldots$$
$$\ldots+\tfrac{1}{2}\left(\frac{a^2+b^2-a'^2-b'^2}{r-r'}-\frac{a^2+b^2-a''^2-b''^2}{r-r''}\right)+\tfrac{1}{2}(r''-r')=0\ (B).$$

Handelt men voorts, eerst met de vergelijkingen (1) en (3) en dan met (2) en (3), even zoo als wij nu met (1) en (2), en met (1) en (3) gehandeld hebben, dan is het even duidelijk, dat zulks alleen op de accenten invloed kan hebben, en dat men zal vinden

$$\left(\frac{a'-a''}{r''-r'}-\frac{a-a''}{r''-r}\right)x+\left(\frac{b'-b''}{r''-r'}-\frac{b-b''}{r''-r}\right)y\ \ldots\ldots$$
$$+\tfrac{1}{2}\left(\frac{a''^2+b''^2-a'^2-b'^2}{r''-r'}-\frac{a''^2+b''^2-a^2-b^2}{r''-r}\right)+\tfrac{1}{2}(r-r')=0\ .(B)'$$

welke vergelijking onmiddellijk uit (B) kan worden afgeleid, door de letters a, b, r en a'', b'', r'' met elkander te verwisselen, dat is, door twee accenten te schrijven, waar geene accenten staan, en dáár, waar twee accenten staan, dezelve weg te laten.

De twee vergelijkingen (B) en (B') zijn beide van den eersten graad, en daar de onbekenden x en y, in dezelve voorkomende, de coördinaten van het middelpunt des gevraagden cirkels zijn, zoo lossen deze vergelijkingen het vraagstuk volkomen op. Stellen wij dan deze vergelijkingen kortheidshalve voor door

$$Ax+By+C=0\ldots(B)\ \text{en}\ A'x+B'y+C'=0\ldots(B')$$

dan

dan zal men, door de bekende leerwijze ter oplossing der vergelijkingen van den eersten graad, vinden

$$x = \frac{CB' - C'B}{A'B - AB'} \quad \text{en} \quad y = \frac{C'A - CA'}{A'B - AB'},$$

waardoor dan nu het gevraagde middelpunt bepaald is.

I. Aanmerking. Wilde men in de uitdrukkingen voor x en y, in plaats van A, B en C, A', B' en C', derzelver gevondene waarden schrijven, dan is het klaar, dat men op zeer zamengestelde uitdrukkingen zou nederkomen. Men kan dezelve echter aanmerkelijk vereenvoudigen, door middel van den oorsprong X, der coördinaten in een der middelpunten D aan te nemen, en de as XY door nog een der middelpunten F te doen gaan; want alsdan is $a = 0$, $b = 0$ en $b'' = 0$, waardoor de vergelijkingen (B) en (B') overgaan in

$$\left(\frac{a'}{r-r'} - \frac{a''}{r-r''}\right)x + \frac{b'}{r-r'}y - \tfrac{1}{2}\left(\frac{a'^2+b'^2}{r-r'} - \frac{a''^2}{r-r''}\right) + \tfrac{1}{2}(r''-r) = 0 \quad (C)$$

$$\left(\frac{a'-a''}{r''-r'} + \frac{a''}{r''-r}\right)x + \frac{b'}{r''-r'}y + \tfrac{1}{2}\left(\frac{a''^2-a'^2-b'^2}{r''-r'} - \frac{a''^2}{r''-r}\right) + \tfrac{1}{2}(r-r') = 0 \quad (C)',$$

zijnde het klaar, dat de waarden van x en y hierdoor eenvoudiger zullen worden, zonder dat de oplossing iets in algemeenheid verliest.

II. Aanmerking. Offschoon de vergelijkingen, die wij ter bepaling van x en y vonden, alleen tot het middelpunt van den cirkel behooren, die door de drie gegevene cirkels uitwendig wordt aangeraakt, zoo kunnen dezelve even goed dienen ter bepaling van alle mogelijke cirkels, die de drie gegevene cirkels aanraken. Wil men, bij voorbeeld, dat de gevraagde cirkel, door de drie gegevene cirkels inwendig, zal worden aangeraakt; en stelt men, dat de aanrakingspunten in M', N' en O' gelegen zijn, dan zal men voor de stralen van den begeerden cirkel hebben,

$$M'H' = r + \sqrt{\{(x-a)^2 + (y-b)^2\}} \;\ldots\; (1)'$$

$$N'H' = r' + \sqrt{\{(x-a')^2 + (y-b')^2\}} \;\ldots\; (2)'$$

$$O'H' = r'' + \sqrt{\{(x-a'')^2 + (y-b'')^2\}} \;\ldots\; (3)',$$

welke met de vergelijkingen (1), (2) en (3) alleen hierin verschillen, dat r, r' en r'' van teeken veranderd zijn. Hieruit volgt dan, dat men ook in al de afgeleide vergelijkingen r, r' en r''

r'' van teeken zal moeten doen veranderen; en de vergelijkingen (C) en (C)' zullen dus voor dit geval overgaan in

$$\left(\frac{a'}{r'-r}-\frac{a''}{r''-r}\right)x+\frac{b'}{r'-r}y-\frac{1}{2}\left(\frac{a'^2+b'^2}{r'-r}-\frac{a''^2}{r''-r}\right)+\frac{1}{2}(r-r'')=0,$$

$$\left(\frac{a''-a'}{r''-r'}-\frac{a''}{r''-r}\right)x-\frac{b'}{r''-r'}y+\frac{1}{2}\left(\frac{a'^2+b'^2-a''^2}{r''-r'}+\frac{a''^2}{r''-r}\right)+\frac{1}{2}(r'-r)=0.$$

Daar dan het negatief stellen der waarden van r overeenkomt met de omstandigheid, dat de gegevene cirkels den gevraagden inwendig aanraken, zoo zal men, door eene dezer grootheden positief en de twee andere negatief, en door twee dezer grootheden positief en de derde negatief te nemen, nog zes andere cirkels verkrijgen, welke de drie gegevene cirkels aanraken, en elk dezer cirkels zal dan uitwendig worden aangeraakt door die der gegevene cirkels, waarvan de straal positief is ondersteld, en inwendig door die, waarvan de straal negatief is aangenomen. Noemen wij alzoo de cirkels, waarvan D, E en F de middelpunten zijn, kortheidshalve de cirkels D, E en F, dan hebben wij door middel van (B) en (B'), of, wat hetzelfde is, van (C) en (C'), de volgende acht gevallen

1°. *r, r' en r'' positief.* De cirkels D, E en F raken den cirkel H uitwendig.

2°. *r, r' en r'' negatief.* De cirkels D, E en F raken den cirkel H inwendig.

3°. *r negatief, maar r' en r'' positief.* De cirkel D raakt den cirkel H inwendig, maar E en F raken denzelven uitwendig.

4°. *r' negatief, maar r en r'' positief.* De cirkel E raakt den cirkel H inwendig, maar D en F raken denzelven uitwendig.

5°. *r'' negatief, maar r en r' positief.* De cirkel F raakt den cirkel H inwendig, maar D en E raken denzelven uitwendig.

6°. *r positief, maar r' en r'' negatief.* De cirkel D raakt den cirkel H uitwendig, maar E en F raken denzelven inwendig.

7°. *r' positief, maar r en r'' negatief.* De cirkel E raakt den cirkel H uitwendig, maar D en F raken denzelven inwendig.

8°. *r'' positief, maar r en r' negatief.* De cirkel F raakt den cirkel H uitwendig, maar D en E raken denzelven inwendig.

Daar dan het vraagstuk in het algemeen voor acht verschillende antwoorden vatbaar is, zoo is het niet te verwonderen, dat het-

zel-

zelve, op eene andere wijze aangevat, tot eene vergelijking van den achtsten graad kan voeren, hetgeen ook werkelijk plaats heeft, wanneer men, uit de drie gegevene stralen en de afstanden der middelpunten, den straal van den gevraagden cirkel tracht te bepalen.

LXXXII. VOORSTEL.

Door S. KLIJNSMA.

Wanneer men uit eenig punt C, Fig. 61, in den omtrek van eenen cirkel, eene loodlijn CD op de middellijn AB laat vallen, en op deze loodlijn als middellijn eenen cirkel beschrijft; vervolgens uit het uiteinde B van de middellijn des gegevenen cirkels eene lijn BE naar het middelpunt van den cirkel trekt, die op CD beschreven is, welke lijn den omtrek van dezen cirkel in F snijdt, dan zal, wanneer men eindelijk door C en F eene lijn trekt, de middellijn AB in G doorsnijdende, het stuk DG, begrepen tusschen dit punt en den voet van de loodlijn, middenevenredig zijn tusschen de twee overige stukken AD en BG van de middellijn AB. Men vraagt deze stelling te bewijzen?

OPGELOST door L. J. ULMAN, S. KLIJNSMA, J. JONKHEERT, J. BASSAN en A. B. DE BOCK, JUN.

OPLOSSING van L. J. ULMAN.

Laat BE verlengd worden tot aan den omtrek in H, en laten de loodlijnen FI en FK getrokken worden, dan is, in de gelijkvormige driehoeken BDE en FKE,

$$BE : ED = FE : EK,$$

of

$$BE : EH = CE : EK,$$

en dus, volgens de eigenschap der evenredigheden,

$$BE + EH : CE + EK = BE : EF,$$

dat is, uit hoofde van $BE : EF = BD : FK$,

$$BH : CK = DB : FK;$$

maar uit de gelijkvormige driehoeken CKF en CDG is

$$CD : CK = DG : FK,$$

dus

$$BD : DG = BH : CD \quad \ldots \ldots (1)$$

waaruit, uit hoofde van $CD = HF$, volgt

$$BD - DG : BH - HF = DG : CD,$$

of

$$BG : BF = DG : CD,$$

dat is

$$BG : DG = BF : CD. \quad \ldots \ldots (2).$$

Nu

Nu is uit de eigenschap van den cirkel

$$AD : CD = CD : BD,$$

en in (1) hebben wij gevonden

$$CD : DG = BH : BD,$$

zoodat de producten der overeenkomstige termen ons geven

$$AD : DG = CD \times BH : BD^2,$$

of, daar $BD^2 = BF \times BH$ is,

$$AD : DG = CD \times BH : BF \times BH,$$

dus $AD : DG = CD : BF;$

maar wij hebben in (2) gevonden

$$CD : BF = DG : BG,$$

en dus is $AD : DG = DG : BG,$

waardoor de opgegevene stelling bewezen is.

LXXXIII. VOORSTEL.

Door S. KLIJNSMA.

Indien op de drie zijden van eenen willekeurigen driehoek gelijkvormige cirkelsegmenten beschreven worden, waarvan er twee uitwendig geplaatst zijn, terwijl het derde naar binnen staat, en men door het hoekpunt, gelegen over de zijde, waarop het inwendige segment geplaatst is, eene willekeurige regte lijn trekt, die de drie segmenten doorsnijdt, dan zullen de stukken van deze lijn, begrepen tusschen den omtrek van het inwendige en de omtrekken der uitwendige segmenten, aan beide zijden even groot wezen. Men vraagt het bewijs van deze stelling?

OPGELOST *door* J. BASSAN en S. KLIJNSMA.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Zij ABC, *Fig.* 62, de driehoek en AC de zijde, waarop het inwendige segment beschreven is; indien dan DE de willekeurig getrokkene lijn is, zullen wij moeten bewijzen, dat men heeft $DF = GE$.

Omdat de cirkelsegmenten gelijkvormig zijn, zoo bevatten zij gelijke hoeken, trekkende alzoo AD, AF, AG, CE, CG en CF, dan is

$$\angle ADF = \angle AFC = \angle AGC = \angle GEC.$$

Verder is $\angle BFA$, als de uitwendige hoek van den driehoek AFD, gelijk de som der hoeken FDA en ADF; daar nu $\angle CFA = \angle ADF$ is, zoo volgt hieruit $\angle CFB = \angle FAD$; maar

 $\angle GAC$,

$\angle GAC$, als met $\angle GFC$ op de koorde GC staande, is gelijk aan $\angle CFG$, en wij hebben alzoo

$$\angle CFG = \angle FAD = \angle GAC.$$

Op dezelfde wijze blijkt nu ook, dat men heeft

$$\angle FGA = \angle FCA = \angle GCE,$$

waaruit dan volgt, dat driehoek DAF gelijkvormig is met driehoek AGC, en dat driehoek GCE gelijkvormig is met driehoek AFC.

Uit de twee eerste dezer gelijkvormige driehoeken hebben wij

$$AC : CG = AF : FD \quad \text{en dus} \quad FD = \frac{AF \times CG}{AC};$$

maar uit de twee laatste gelijkvormige driehoeken volgt

$$AC : AF = CG : GE \quad \text{en dus} \quad GE = \frac{AF \times CG}{AC},$$

waaruit dan volgt $FD = GE$, hetgeen te bewijzen was.

LXXXIV. Voorstel.

Door J. van Wijk, Rz.

De stof, waaruit een luchtbol vervaardigd is, heeft een gegeven gewigt; het soortelijk gewigt van de dampkringslucht en van de luchtsoort, waarmede deze bol gevuld zal worden, is mede bekend; men vraagt: hoe groot de straal van dezen bolvormigen luchtbol zal moeten zijn, om, bij eenen bepaalden last, in de lucht te kunnen zweven; alles in de onderstelling, dat de dikte van de stof, waaruit de luchtbol vervaardigd is, niet in aanmerking genomen wordt?

Opgelost door J. van Wijk, Rz., L. J. Ulman en J. Bassan.

Oplossing van J. van Wijk, Rz.

In Nederlandsche ponden en ellen rekenende, is het soortelijk gewigt van eenige stof niets anders dan het gewigt van een' cubieken palm dezer stof, en wij stellen alzoo het gewigt van een' cubieken palm dampkringslucht gelijk a, en dat van een' cubieken palm der luchtsoort, waarmede de bol gevuld moet worden, gelijk b. Indien wij dan den straal van den bol gelijk x palmen stellen, is deszelfs inhoud $\frac{4}{3}\pi x^3$ cubieke palmen, en het gewigt van de dampkringslucht, die door den bol verplaatst wordt, is dus $\frac{4}{3}\pi ax^3$, terwijl het gewigt van de ingeslotene luchtsoort alsdan zal zijn $\frac{4}{3}\pi bx^3$. Stellen wij eindelijk den last, welke de bol moet kunnen medevoeren L, en het gewigt van eenen vier-

vierkanten palm der stof, waaruit deze bol vervaardigd is, q, dan is het gewigt van den bol $4\pi qx^2$, zoodat het gewigt van den belasten bol is $L + 4\pi qx^2$.

Zal nu de bol in de lucht zweven, dat is rijzen noch dalen, dan moeten de krachten, die naar boven werken, evenwigt maken met of gelijk zijn aan de neêrwaartswerkende krachten. Nu bestaat er slechts eene opwaartsche kracht, namelijk $\frac{4}{3} a \pi x^3$, terwijl de neêrwaartswerkende krachten zijn $\frac{4}{3} b \pi x^3$ en $L + 4\pi qx^2$, waaruit dan blijkt, dat wij voor het evenwigt moeten hebben,

$$\tfrac{4}{3} a \pi x^3 = \tfrac{4}{3} b \pi x^3 + 4\pi qx^2 + L,$$

of $$\tfrac{4}{3}(a - b)\pi x^3 - 4\pi qx^2 = L,$$

dat is $$x^3 - \frac{3q}{a-b}x^2 - \frac{3L}{4\pi(a-b)} = 0 \ldots (A),$$

uit welke derde magtsvergelijking dan nu x gevonden kan worden, zoodra a, b, q en L in getallen gegeven zijn. Deze vergelijking zal echter het gemakkelijkst worden opgelost door middel van de logarithmen; want uit dezelve volgt

$$2\,Log.\,x + Log.\left(x - \frac{3q}{a-b}\right) = Log.\,\frac{3p}{4\pi(a-b)},\ (B),$$

en wanneer men nu de waarden van $\frac{3q}{a-b}$ en $\frac{3p}{4\pi(a-b)}$ eens berekend heeft, zal men bevinden, dat de vergelijking (B) door middel van de logarithmen-tafels veel gemakkelijker berekend wordt, dan de vergelijking (A).

1°. Aanmerking. Onderstelt men, dat het gewigt van den luchtbol zeer gering ten opzigte van den last L is, dan kan men den term $4\pi qx^2$ in onze vergelijking weglaten, zoodat men alsdan te naasten bij zal vinden

$$x = \sqrt[3]{\frac{3L}{4\pi(a-b)}},$$

en is dit gewigt $4\pi qx^2$ te aanmerkelijk, om tegen L verwaarloosd te worden, dan zal de laatstgevondene formule nog zeer geschikt wezen, om als benaderde waarde te dienen, welke men dan door (A) verder benaderen kan.

2°. Aanmerking. Moet de bol geen last medevoeren, maar

 al-

alleen in ſtaat zijn deszelfs eigen gewigt in evenwigt te houden, dan is $L = 0$, en de vergelijking (A) geeft alsdan

$$x = \frac{3q}{a-b}.$$

3°. Aanmerking. Wil men eindelijk uit de gegevene afmetingen van den gevulden bol den last berekenen, welke denzelve, behalve zijn eigen gewigt, in ſtaat is te kunnen ophouden, dan geeft de vergelijking (A) ons terſtond

$$L = \tfrac{4}{3}\pi x^2 \{(a-b)x - 3q\},$$

en dit drukt dan tevens de kracht uit, waarmede de bòl naar boven zou worden gevoerd, indien de belasting werd weggelaten. Wordt alzoo aan dezen bol àlleen een last P, kleiner dan L, toegevoegd, dan zal de kracht, waarmede de bol ſtijgt, zijn $L - P$ of $\tfrac{4}{3}\pi x^2 \{(a-b)x - 3q\} - P$.

LXXXV. VOORSTEL.

Door J. van Wijk, Rz.

Op den 2den December 1822 *werd, op* 49°45′ *noorderbreedte en gegiste lengte* 33°30′, *west van Greenwich, om* 11ᵘ8′30″, *de ſchijnbare afſtand van den verſten rand der Maan tot de planeet Jupiter waargenomen* 69°58′11″. *De hoogte van den Maans onderrand was op dien tijd* 21°34′, *en die van Jupiter* 59°32′. *Eindelijk was de hoogte van het oog 9 voeten. Men vraagt naar de lengte?* (*)

Oplossing. *Door* J. van Wijk, Rz.

De oplossing, naar de leerwijze van Dunthorn ingerigt, komt aldus te ſtaan:

Tijd aan boord 's avonds	11ᵘ 8′ 30″
Lengte in tijd, west	2ᵘ 14′
Tijd te Greenwich	13ᵘ 22′ 30″.

Vol-

(*) *Handbuch der Schiffahrtskunde. Hamburg* 1824. S. 371. *Ex.* 36.

Volgens den *Nautical Almanak* heeft men verder

	Horiz. paral. ☽	diam.
2 Dec. middern. Horiz. paral. ☽ . . .	59′24″	16′11″
3 Dec. middag	58 57″	16′14″
verandering in 12 uren	27″	— 3″
dus in 1u 22′	— 3	0
Ten tijde der waarneming	59′21″	16′11″
	vergrooting . . .	6″
	schijnb. diam.	16′17″
	Gemetenen afstand.	69°58′11″
	Schijnb. afstand	69°41′54″

Hoogte onderr. ☽ . .	21°34′	Hoogte van ♃	59°32′
Diam. . . . . +	16′	Kimduik.	3′
9 voet. Hoogt. oog. —	3′	schijnb. hoogte ♃ . . .	59°29′
schijnb. hoogte ☽ . . .	21°47′	refract — paral	0′33″
paral — refract	52′46″	ware hoogte ♃	59°28′27″
ware hoogte ☽	22°39′46″		

schijnb. hoogte ♃ . . .	59°29′ 0″	ware hoogte ♃	59°28′27″
schijnb. hoogte ☽ . . .	21°47′ 0″	ware hoogte ☽	22°39′46″
versch. schijnb. hoogte	47°42 0″	versch. ware hoogte .	36°48′41″

Cos. versch. schijnb. hoog. = 791224
Cos. schijnb. afstand = 346963

verschil = 444261
Log. verschil = 5,647638
Log. diff. ... = 9,997396

Log. n = 5,645034

n = 441605
Cos. versch. ware hoog. = 800612

Cos. waren afstand = 359007
waren afstand = 68°57′39″. (*)

(*) Volgens de Leerwijze van BORDA vond ik 68°57′38″.

Volgens de *Ephemerides of the distances of Venus, Mars, Jupiter, enz.* is

Jup. van het mid. der maan 1822. 2 Dec. om 12u . . . 68° 7′53″
. . . . 15u . . . 69°54′43″

Eerste vers. 0°49′46″ *prop. Log.* = 0,5583
Tweede vers. 1°46′50″ . . . = 0,2266

0,3317

1u 23′52″ na 12 uren.

Tijd te Greenwich 13u 23′52″
Tijd aan boord 11u 8′30″

Lengte in tijd . . 2u 15′22″

en dus de lengte in graden 33°50′30″ west.

LXXXVI. VOORSTEL.

Door F. J. Stamkart.

Twee kegels staan op dezelfde cirkelronde basis; nu wordt gevraagd, om den inhoud van het stuk te berekenen, dat aan beide kegels gemeen is?

Oplossing. *Door* F. J. Stamkart.

Zij AB, *Fig.* 63, de lijn, volgens welke het vlak, dat door de assen FC en FC′ der twee kegels gaat, het grondvlak doorsnijdt, en stellen wij, om den stand van deze twee assen, ten opzigte van elkander en het grondvlak, volkomen te bepalen, dat gezegd vlak der assen eenen hoek δ met het grondvlak maakt, terwijl de hoeken CFB en C′FA, welke deze assen met AB maken, gelijk α en α' gegeven zijn. De kegels zullen dan geheel bepaald wezen, wanneer bovendien de straal van het grondvlak gelijk r en de lengte der assen FC $= a$ en FC′ $= a'$ gegeven zijn.

Laat nu, op eenen afstand x boven het grondvlak, een vlak, evenwijdig met dit grondvlak, door de twee kegels gebragt worden, de assen in P en P′ snijdende, dan zal, omdat evenwijdige vlakken door een zelfde vlak volgens evenwijdige lijnen doorsneden worden, PP′ evenwijdig zijn met AB. Trekt men alzoo PQ en P′Q′ loodregt op AB, dan zal PP′ = QQ′ wezen. Trekkende verder PR en P′R′ loodregt op het grondvlak, dan zijn

zijn de boeken PQR en P'Q'R' beide gelijk δ, en hieruit volgt $PQ = P'Q' = \frac{x}{Sin.\,\delta}$, dus $FQ = PQ\ Cot.\,a = \frac{x\ Cot.\,a}{Sin.\,\delta}$

en $FQ' = P'Q'\ Cot.\,a' = \frac{x\ Cot.\,a'}{Sin.\,\delta}$, waardoor

$$PP' = QQ' = x\,\frac{Cot.\,a + Cot.\,a'}{Sin.\,\delta} = x\,\frac{Sin.\,(a + a')}{Sin.\,a\,Sin.\,a'\ Sin.\,\delta}.$$

Stelt men alzoo ter bekorting

$$\frac{Sin.\,(a + a')}{Sin.\,a\ Sin.\,a'\ Sin.\,\delta} = n \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

dan is $PP' = nx.$

Ten einde de stralen $PD = s$ en $P'D' = s'$ van de cirkels te bepalen, volgens welke het snijdende vlak de oppervlakken der twee kegels doorsnijdt, hebben wij

$$s : r = CP : a \quad \text{en} \quad s' : r = C'P' : a',$$

dus

$$s = \frac{r}{a} \times CP \quad \text{en} \quad s' = \frac{r}{a'} \times C'P'.$$

Nu is $PF = FQ\ Sec.\,a = \frac{x}{Sin.\,\delta\ Sin.\,a}$, dus $CP = a - \frac{x}{Sin.\,\delta\ Sin.\,a}$,

en $P'F = FQ'\ Sec.\,a' = \frac{x}{Sin.\,\delta\ Sin.\,a'}$, dus $C'P' = a' - \frac{x}{Sin.\,\delta\ Sin\,a'}$,

waaruit dan volgt

$$s = r - \frac{r}{a} \times \frac{x}{Sin.\,\delta\ Sin.\,a} \quad \text{en} \quad s' = r - \frac{r}{a'} \cdot \frac{x}{Sin.\,\delta\ Sin.\,a'},$$

of, wanneer men kortheidshalve stelt,

$$\frac{1}{Sin.\,a\ Sin.\,\delta} = m \quad \text{en} \quad \frac{1}{Sin.\,a'\ Sin.\,\delta} = m' \ldots (2),$$

$$s = r - \frac{rm}{a}\,x \quad \text{en} \quad s' = r - \frac{rm'}{a'}\,x.$$

Het dubbele segment HDH'D' is het gedeelte van het snijdende vlak, dat aan beide kegels gemeen is, en hieruit volgt, dat men, den gevraagden inhoud gelijk I stellende, zal hebben

$$\delta I = Figuur\ HDH'D' \times \delta x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

Zoodat wij zullen overgaan, om den inhoud van gezegde figuur, welke in *Fig.* 64 afzonderlijk is voorgesteld, te bepalen, in welke wij nu reeds hebben

$$PP' = z = nx,\ PH = s = r - \frac{rm}{a}\,x,\ P'H = s' = r - \frac{rm'}{a'}\,x.\ (\beta)$$

 Stel-

Stellen wij nu hoek HPP' $= \phi$ en *hoek* HP'P $= \phi'$, dan verkrijgen wij, door de bekende formule voor den inhoud van een cirkelsegment,

segment HDH H$=\frac{1}{2}s^2(2\phi - Sin.2\phi) = s^2(\phi - Sin.\phi\, Cos.\phi)$
en *segment* HD'H'H$=\frac{1}{2}s'^2(2\phi' - Sin.2\phi') = s'^2(\phi' - Sin.\phi'\, Cos.\phi')$,
en hiervan de som nemende, komt er, uit (α),

$$\delta I = \{s^2(\phi - Sin\,\phi\, Cos.\,\phi) + s'^2(\phi' - Sin.\,\phi'\, Cos.\,\phi')\}\,\delta x$$

en dus $I = \int s^2(\phi - Sin.\phi Cos.\phi)\delta x + \int s'^2(\phi' - Sin.\phi' Cos.\phi')\delta x$. ($\gamma$)

Nu hebben wij in den driehoek PP'H

$$s'^2 = s^2 + z^2 - 2sz\, Cos.\,\phi \ldots\ldots\ldots (\delta)$$

en hierin de waarden uit (β) overbrengende,

$$(r - \frac{rm'}{a'}x)^2 = (r - \frac{rm}{a}x)^2 + n^2x^2 - 2nx(r - \frac{rm}{a}x)Cos.\phi,$$

of, ontwikkelende, de gelijke termen weglatende, en door x deelende,

$$\frac{r^2m'^2}{a'^2}x - 2r^2\frac{m'}{a'} = \frac{r^2m^2}{a^2}x - 2r^2\frac{m}{a} + n^2x - 2nrCos.\phi + \frac{2rmn}{a}xCos.\phi,$$

en wanneer wij hieruit x oplossen, komt er

$$x = \frac{2r^2\left(\frac{m'}{a'} - \frac{m}{a}\right) - 2nr\, Cos.\,\phi}{r^2\left(\frac{m'^2}{a'^2} - \frac{m^2}{a^2}\right) - n^2 - 2r\frac{mn}{a}\, Cos.\,\phi},$$

stellen wij dus kortheidshalve

$$\left.\begin{array}{ll} 2r^2\left(\frac{m'}{a'} - \frac{m}{a}\right) = e, & 2nr = f \ldots \\ r^2\left(\frac{m'^2}{a'^2} - \frac{m^2}{a^2}\right) - n^2 = h, & \text{en}\quad 2r\frac{mn}{a} = k \ldots \end{array}\right\} (3)$$

dan is $\quad x = \dfrac{e - f\, Cos.\,\phi}{h - k\, Cos.\,\phi}$,

waaruit wij, omdat $mf - ak = 0$ is, vinden

$$s = \frac{r}{a} \times \frac{ah - me}{h - k\, Cos\,\phi} \ldots\ldots\ldots (A),$$

terwijl wij, door x te differentieren, vinden

$$\delta x = (hf - ek) \cdot \frac{Sin.\,\phi\,\delta\phi}{(h - k\, Cos.\,\phi)^2} \ldots\ldots (B).$$

Uit

Uit den driehoek PP'H, hebben wij ook eveneens

$$s^2 = s'^2 + x^2 - 2\, s'x \;Cos.\, \phi',$$

en daar deze met (γ) alleen in de accenten verschilt, is het klaar, dat wij uit dezelve zullen vinden

$$x = \frac{2 r^2 \left(\frac{m}{a} - \frac{m'}{a'}\right) - 2 nr \;Cos.\, \phi'}{r^2 \left(\frac{m^2}{a^2} - \frac{m'^2}{a'^2}\right) - n^2 - 2 r \frac{m'n}{a'} \;Cos.\, \phi},$$

waaruit wij, door te stellen

$$r^2 \left(\frac{m^2}{a^2} - \frac{m'^2}{a'^2}\right) - n^2 = h' \text{ en } 2 r \frac{nm'}{a'} = k' . (4),$$

op gelijke wijze zullen vinden

$$x = \frac{-e - f \;Cos.\, \phi'}{h' - k' \;Cos.\, \phi'},$$

$$s' = \frac{r}{a'} \times \frac{a'h' + m'e}{h' - k' \;Cos.\, \phi'} \;\ldots\ldots\; (A')$$

en $$\delta x = (h'f + ek') \frac{Sin.\, \phi' \delta\phi'}{(h' - k' \;Cos.\, \phi')^2} \;\ldots\; (B')$$

Brengen wij alzoo (A), (B), (A') en (B') over in (γ), dan verkrijgen wij, wanneer wij ter bekorting stellen,

$$\left.\begin{array}{l} \frac{r^2}{a^2} (ah - me)^2 (hf - ek) = p \\ \text{en } \frac{r^2}{a'^2} (a'h' + m'e)^2 (h'f + ek') = p' \end{array}\right\} (5),$$

de volgende waarde voor I:

$$I = p \int \frac{(\phi - Sin.\phi Cos.\phi) Sin.\phi \delta\phi}{(h - k \;Cos.\phi)^4} + p' \int \frac{(\phi' - Sin.\phi' Cos\phi') Sin\phi' \delta\phi'}{(h' - k' \;Cos.\phi)^4} . (C)$$

Hieruit blijkt, dat wij ons alleen met het integreren van de eerste formule, namelijk

$$u = \int \frac{(\phi - Sin.\phi \;Cos.\phi) \;Sin.\, \phi \delta\phi}{(h - k \;Cos.\, \phi)^4} \;\ldots\; (D)$$

zullen hebben bezig te houden, daar, deze gevonden zijnde, de tweede bepaald wordt, door ϕ in ϕ' te veranderen.

Om tot deze integraal te geraken, maken wij gebruik van de algemeene herleidingsformule

$$\int X \delta Y = XY - \int Y \delta X,$$

en nemen in dezelve

$$X = \phi - Sin.\,\phi\ Cos.\,\phi \quad \text{en} \quad \partial Y = \frac{Sin.\,\phi\,\partial\phi}{(h - k\ Cos.\,\phi)^4},$$

en dan vinden wij, door de eerste te differentieren en de tweede te integreren,

$$\partial X = 2\ Sin^2.\phi\,\partial\phi \quad \text{en} \quad Y = -\frac{1}{3k}\cdot\frac{1}{(h - k\ Cos.\,\phi)^3}$$

hetgeen in onze herleidingsformule gesubstitueerd geeft

$$u = -\frac{1}{3k}\cdot\frac{\phi - Sin.\,\phi\ Cos.\,\phi}{(h - k\ Cos.\phi)^3} + \frac{2}{3k}\int\frac{Sin^2.\,\phi\,\partial\phi}{(h - k\,Cos.\phi)^3} \;..\;(D')$$

Vergelijken wij deze laatste integraal nogmaals met onze herleidingsformule, en nemen wij hiertoe

$$X = Sin.\,\phi. \quad \text{en} \quad \partial Y = \frac{Sin.\,\phi\,\partial\phi}{(h - k\ Cos.\,\phi)^3},$$

dan vinden wij, de eerste differentierende, en de tweede integrerende,

$$\partial X = Cos.\,\phi\,\partial\phi \quad \text{en} \quad Y = -\frac{1}{2k}\cdot\frac{1}{(h - k\ Cos.\,\phi)^2},$$

waardoor wij dan verkrijgen

$$\int\frac{Sin^2\,\phi\,\partial\phi}{(h - k\,Cos.\,\phi)^3} = -\frac{1}{2k}\cdot\frac{Sin.\,\phi}{(h - k\,Cos.\,\phi)^2} + \frac{1}{2k}\int\frac{Cos.\,\phi\,\partial\phi}{(h - k\,Cos.\,\phi)^2}.$$

zoodat (D′) hierdoor overgaat in

$$u = -\frac{1}{3k}\cdot\frac{\phi - Sin.\phi\,Cos\,\phi}{(h - k\,Cos.\,\phi)^3} - \frac{1}{3k^2}\cdot\frac{Sin.\phi}{(h - k\,Cos.\phi)^2} + \frac{1}{3k^2}\int\frac{Cos.\,\phi\,\partial\phi}{(h - k\,Cos\,\phi)^2}.$$

Nu is (I. R. SCHMIDT, *Diff. en Int. Rek.* § 255.)

$$\int\frac{Cos.\,\phi}{(h - k\,Cos.\phi)^2} = \frac{h}{h^2 - k^2}\cdot\frac{Sin.\phi}{h - k\,Cos.\,\phi} + \frac{k}{h^2 - k^2}\int\frac{\partial\phi}{h - k\,Cos.\,\phi},$$

waardoor de voorgaande integraal overgaat in

$$u = -\frac{1}{3k}\cdot\frac{\phi - Sin.\phi\,Cos.\phi}{(h - k\,Cos.\,\phi)^3} - \frac{1}{3k^2}\cdot\frac{Sin.\,\phi}{(h - k\,Cos.\phi)^2} + \frac{h}{3k^2(h^2 - k^2)}\,\frac{Sin.\phi}{h - k\,Cos\,\phi} +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ \frac{1}{3k\,(h^2 - k^2)}\int\frac{\partial\phi}{h - k\,Cos.\,\phi}\ \ldots\ldots\ldots\ (D'')$$

Eindelijk merken wij op, dat de laatste integraal, namelijk $\int\frac{\partial\phi}{h - k\ Cos.\,\phi}$, voor drie zeer verschillende vormen vatbaar is, naarmate h grooter, gelijk of kleiner dan k is. Want wij hebben (I. R. SCHMIDT, *Diff. en Int. Rek.* § 254.)

1°. *Voor*

1°. *Voor* $h > k$ *of* $h - k$ *positief*,

$$\int \frac{\partial\phi}{h - k\,Cos.\,\phi} = \frac{1}{\sqrt{(h^2 - k^2)}}\ Boog\ Cos.\ \frac{h\,Cos.\,\phi - k}{h - k\,Cos.\,\phi}.$$

2°. *Voor* $h = k$ of $h - k = 0$,

$$\int \frac{\partial\phi}{h - k\,Cos.\,\phi} = \frac{1}{h} \cdot \frac{Sin.\,\phi}{Cos.\,\phi - 1}.$$

3°. *Voor* $h < k$ *of* $h - k$ *negatief*,

$$\int \frac{\partial\phi}{h - k\,Cos\,\phi} = \frac{1}{\sqrt{(k^2 - h^2)}}\,Nep.\,Log.\,\frac{h\,Cos.\,\phi - k + Sin.\,\phi\sqrt{(k^2 - h^2)}}{h - k\,Cos.\,\phi}.$$

Men zal bijgevolg voor elk bijzonder geval eerst h en k moeten berekend hebben, ten einde hieruit te kunnen opmaken, welke der drie bovenstaande formulen men voor $\int \frac{\partial\phi}{h - k\,Cos.\,\phi}$ gebruiken moet; en dit bepaald hebbende, zal men dezelve in (D'') moeten substitueren, ten einde de waarde van u te verkrijgen, waardoor dan het eerste gedeelte der waarde van I bepaald is.

Ten einde het tweede gedeelte van I te verkrijgen, zal men in de waarde van u alleen ϕ, h en k in ϕ', h' en k' te veranderen hebben, uitgezonderd in den laatsten term of $\int \frac{\partial\phi'}{h' - k'\,Cos.\,\phi'}$; want men zal wederom uit het teeken van $h' - k'$ moeten beoordeelen, welke der drie laatst opgegevene waarden men voor deze integraal moet bezigen.

Wij vinden het niet onbelangrijk te doen zien, hoe $h - k$ van de oorspronkelijke gegevens afhangt, ten einde onmiddellijk te kunnen beoordeelen, welke der drie formulen men gebruiken moet; schrijven wij dan voor h en k derzelver waarden uit (3), zoo vinden wij

$$h - k = r^2\,\frac{m'^2}{a'^2} - \left(\frac{r^2 m^2}{a^2} + 2r\,\frac{mn}{a} + n^2\right)$$

$$= \frac{r^2 m'^2}{a'^2} - \left(\frac{rm}{a} + n\right)^2$$

$$= \left(\frac{rm'}{a'} + \frac{rm}{a} + n\right)\left(\frac{rm'}{a'} - \frac{rm}{a} - n\right),$$

waaruit, omdat bij onze gegevens de eerste factor altijd positief is, blijkt, dat $h - k$ hetzelfde teeken zal hebben als de twee-

de

de factor, welke tweede factor, door voor m, m' en n derzelver waarden te schrijven, overgaat in

$$\frac{r(a\,Sin.\,\alpha - a'\,Sin.\,\alpha') - aa'\,Sin.(\alpha+\alpha')}{aa'\,Sin.\,\alpha\,Sin.\,\alpha'\,Sin.\,\delta}.$$

Zoodat $h - k$ hetzelfde teeken zal hebben, als de teller van deze breuk. Nu is $a\ Sin.\ \alpha = CS$ en $a'\ Sin.\ \alpha' = C'S'$, en dus $a\ Sin.\ \alpha - a'\ Sin.\ \alpha' = CS - C'S'$; terwijl $aa' \times Sin.(\alpha+\alpha') = 2$ *driehk.* CFC′ is. De teller van de laatste breuk is dus niet anders dan *regth.* AF × (CS — C′S′) — 2 *driehk.* CFC′, zoodat het van het teeken dezer uitdrukking zal afhangen, welke der drie formulen men voor het eerste gedeelte van I zal moeten bezigen. Men kan op dezelfde wijze onderzoeken, hoe de waarde van $h' - k'$ van de oorspronkelijke gegevens afhangt; doch wij zullen ons hiermede niet verder inlaten, omdat deze laatste beschouwing stilzwijgend onderstelt, dat de beide kegels hunnen top boven het grondvlak hebben, terwijl het berekenen der waarde van h en k, in alle mogelijke gevallen, de keuze der integralen bepaalt.

Er blijft dan na dit alles niet meer over, dan de grenzen te bepalen, tusschen welke de integraalformulen moeten worden genomen. Hiertoe merken wij op, dat op het oogenblik, waarin de kegelvlakken elkander verlaten, de twee cirkels PD en P′D′ elkander aanraken, zoodat alsdan ϕ en ϕ' beide gelijk o worden. Nemende alzoo dit punt voor het aanvangspunt der telling aan, dan moeten de twee stukken van I, dat is u en u', zoodanig genomen worden, dat de eerste voor $\phi = 0$ en de tweede voor $\phi' = 0$ verdwijnt. Voor de andere grens van het ligchaam bedekken de twee cirkels PD en P′D′ elkander volkomen; doch de waarden, die wij alsdan aan ϕ en ϕ' moeten toekennen, worden gemakkelijk afgeleid uit de vergelijkingen

$$x = \frac{e - f\,Cos.\,\phi}{h - k\,Cos.\,\phi} \quad \text{en} \quad x = \frac{-e - f\,Cos.\,\phi'}{h' - k'\,Cos.\,\phi'};$$

want daar op dit oogenblik van bedekking $x = 0$ is, zoo geeft dit $Cos.\,\phi = \frac{e}{f}$ en $Cos.\,\phi' = -\frac{e}{f}$, zoodat men in de reeds verbeterde integralen deze waarden voor ϕ zal moeten substitueren, om de waarde van I te verkrijgen.

LXXXVII.

LXXXVII. VOORSTEL.

Door F. J. STAMKART.

Onderstel, dat men uit eenig punt een ligchaam zoodanig wil werpen, dat het een ander gegeven punt treft, en wel met zulk eene aanvankelijke snelheid, dat men met dezelve onder 45° eene gegevene horizontale worpsverheid zou hebben bereikt. Onderstel verder, dat men, door het een of ander beletsel, dit punt niet regtstreeks kan treffen, doch dat men zulks door middel van terugkaatsing tegen eenen verticalen cirkelvormigen cilinder wil verrigten, welke in stand en grootte gegeven is, onderstel eindelijk, dat het ligchaam, niet volmaakt veerkrachtig zijnde, bij den schok een n-de gedeelte van de kracht, die hetzelve regthoekig tegen eenig vlak uitoefent, verliest, dan vraagt men naar de rigting, onder welke men het ligchaam moet werpen?

OPLOSSING. *Door* F. J. STAMKART.

Zij in *Fig.* 65, LN een gedeelte van het grondvlak des cilinders, A het punt, waaruit geworpen wordt, B de projectie van het punt, dat getroffen moet worden, AM de projectie van den boog, die voor den schok, en MB de projectie van den boog, die na den schok doorloopen wordt, zoodat M de projectie van het stootpunt is. Daar nu de stelling der punten A en B ten opzigte van den cilinder gegeven is, zoo zijn AC $= b$, BC $= c$, LC $=$ MC $= r$ en hoek C bekend, en wij stellen verder voor de onbekende hoeken CAM $= \alpha$, AMK $= \beta$, BMI $= \delta$ en ACM $= \phi$, zijnde KM de projectie of horizontale doorgang van het vlak, dat de cilinder in het stootpunt raakt.

Omdat dan KI het rakende vlak van het stootpunt voorstelt, zoo is het onverschillig, of wij het voortgeworpen ligchaam beschouwen als tegen het verticale cilindervlak, dan wel tegen dit platte rakende vlak te hebben geschokt. Ontbinden wij dan de snelheid, die het ligchaam op het oogenblik van aanraking heeft, in verticale en horizontale rigting, dan wordt de eerste volstrekt niet door den schok veranderd, en blijft bovendien in dezelfde rigting voortduren; doch de tweede snelheid, die gelijk aan derzelver horizontale projectie DM is, wederom ontbindende, in de rigting van het rakend vlak en loodregt op hetzelve, wordt de schok alleen door de laatste FM voortgebragt, terwijl de

eer-

eerſte EM wederom niets met den ſchok te maken heeft, maar na den ſchok onveranderd blijft voortgaan. Indien nu het ligchaam volmaakt veerkrachtig was, dan zou de ſnelheid FM na den ſchok in MF overgaan; doch daar dezelve, ingevolge de voorwaarde, van de opgaaf, $\frac{1}{n}$ verminderd is, zoo is, na den ſchok, MG $=$ $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ FM $= \frac{n-1}{n}$ FM de ſnelheid loodregt op het vlak en MI $=$ ME de horizontale ſnelheid, en wij hebben alzoo

$$Tang.\,\delta = \frac{HI}{MI} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{FM}{ME} = \frac{n-1}{n} . Tang.\,\beta,$$

of, wanneer wij $\frac{n-1}{n} = m$ ſtellen,

$$Tang.\,\delta = m . Tang.\,\beta.$$

Hierdoor kunnen wij nu op de volgende wijze den hoek ϕ bepalen. In de driehoeken AMC en BMC heeft men, door de bekende trigonometriſche formulen,

$$Tang.AMC = \frac{AC \times Sin.ACM}{MC - AC \times Cos.ACM};\ Tang.BMC = \frac{BC \times Sin.BCM}{MC - BC \times Cos.BCM}$$

dat is, uit hoofde van $Tang.\ AMC = Tang.\,(90^\circ + \beta) = -Cot.\,\beta$ en $Tang.\ BMC = Tang.\,(90^\circ + \delta) = -Cot.\,\delta$,

$$-Cot.\,\beta = \frac{b\,Sin.\,\phi}{r - b\,Cos.\,\phi} \text{ en } -Cot.\,\delta = \frac{c\,Sin.\,(C-\phi)}{r - c\,Cos.\,(C-\phi)},$$

of $Tang.\,\beta = \frac{b\,Cos.\,\phi - r}{b\,Sin.\,\phi}$ en $Tang.\,\delta = \frac{c\,Cos.\,(C-\phi) - r}{c\,Sin.\,(C-\phi)}$,

waaruit, omdat $Tang.\,\delta = m\,Tang.\,\beta$ is,

$$\frac{c\,Cos.\,(C-\phi) - r}{c\,Sin.\,(C-\phi)} = m . \frac{b\,Cos.\,\phi - r}{b\,Sin.\,\phi},$$

of $cb\,Sin.\phi\,Cos.\,(C-\phi) - rb\,Sin.\,\phi = mbc\,Cos.\phi\,Sin.\,(C-\phi) - crm\,Sin.\,(C-\phi)$,

dat is, wanneer wij alles ontwikkelen en naar denzelfden kant brengen,

$$mbc\,Sin.\,C\,Cos^2.\,\phi - (m+1)\,bc\,Cos.\,C\,Sin.\,\phi\,Cos.\,\phi - bc\,Sin.\,C\,Sin^2.\,\phi \ldots$$
$$\ldots - mrc\,Sin.\,C\,Cos.\,\phi + r\,(b + mc\,Cos.\,C)\,Sin.\,\phi = 0,$$

of, alles door $Cos^2.\,\phi$ deelende,

$$mbc\,Sin.\,C - (m+1)\,bc\,Cos.\,C\,Tang.\,\phi - bc\,Sin.\,C\,Tang^2\,\phi \ldots$$
$$\ldots - mrc\,Sin.\,C . Sec.\,\phi + r\,(b + mc\,Cos.\,C)\,Tang.\,\phi\,Sec.\,\phi = 0,$$

of,

of, wanneer wij $\sqrt{(1 + Tang^2.\ \phi)}$ in plaats van $Sec.\ \phi$ schrijven en kortheidshalve stellen

$$mc\ Sin\ C = A,\ mc\ Cos.C + b = B,\ bc\ Sin.C = E,\ (m+1)\ bc\ Cos.C = D,$$

$$Ab - D\ Tang.\phi - E\ Tang^2.\phi = r\,(A - B\ Tang.\phi)\ \sqrt{(1 + Tang^2.\ \phi)}.$$

Deze vergelijking quadraterende, en volgens de afdalende magten van $Tang.\ \phi$ rangschikkende, verkrijgen wij

$$(r^2B^2 - E^2)\,Tang^4\phi - 2(DE + r^2AB)\,Tang^3\phi + (r^2A^2 + r^2B^2 + 2bAE - D^2) \times$$
$$\ldots Tang^2.\phi - 2A\,(r^2B - bD)\ Tang.\phi + (r^2 - b^2)\,A^2 = 0,$$

uit welke vergelijking ϕ kan worden berekend, zoodat wij nu dezen hoek in het vervolg als eene bekende grootheid in rekening zullen brengen. (*)

Hieruit vinden wij dan nu terstond den hoek α, want wij hebben voor denzelven

$$Tang.\ \alpha = \frac{r\ Sin.\ \phi}{b - r\ Cos.\ \phi},$$

waardoor het vlak bepaald is, waarin de worp geschieden moet, zoodat er alleen overblijft den elevatie-hoek te vinden, dat is de rigting, welke de worp boven deszelfs projectie AM moet worden gegeven.

De hoek ϕ gevonden zijnde, zijn ook de hoeken β en δ bekend, want hiervoor hebben wij

$$Tang.\ \beta = \frac{b\ Cos.\phi - r}{b\ Sin.\ \phi} \quad \text{en} \quad Tang.\ \delta = m\ Tang.\ \beta,$$

waardoor wij dan verder vinden

$$AM = \frac{b\ Sin.\ \phi}{Cos.\ \beta} \quad \text{en} \quad BM = \frac{c\ Sin.\ (C - \phi)}{Cos.\ \delta}.$$

Voorts hebben wij, omdat $HM = \dfrac{HI}{Sin.\ \delta} = HI\ Cosec.\ \delta$ is,

HMB =

(*) Ofschoon deze vergelijking vier bestaanbare waarden voor $Tang.\ \phi$ kan geven, is er slechts eene van dezelve, die aan het gevraagde in den eigenlijken zin voldoet, omdat een van de overige wortels, niet BM, maar derzelver verlengde door het punt B doet gaan, terwijl de twee andere het vraagstuk oplossen, in de onderstelling, dat het ligchaam tegen den hollen wand van den cilinder geworpen wordt. Men zie hierover *Verz. van Voorst. Deel* I No. XXI.

$$HM^2 = HI^2 (1 + Cot^2. \delta) = m^2 FM^2 \left(1 + \frac{1}{Tang^2. \delta}\right)$$

$$= m^2 FM^2 \left(1 + \frac{1}{m^2 Tang^2. \beta}\right) = m^2 DM^2 Sin^2. \beta \left(1 + \frac{1}{m^2} \cdot \frac{Cos^2. \beta}{Sin^2 \beta}\right)$$

$$= DM^2 (m^2 Sin^2. \beta + Cos^2. \beta)$$

zoodat $$\frac{HM}{DM} = \sqrt{(m^2 Sin^2. \beta + Cos^2. \beta)} = q,$$

waardoor de betrekking van de horizontale snelheden vóór en na den schok bepaald is.

Wordt een ligchaam onder eenen hoek λ met den horizont en eene aanvankelijke snelheid s voortgeworpen, *Fig.* 66, dan zou hetzelve, indien de zwaartekracht niet aanwezig was, en er geen tegenstand der lucht in aanmerking genomen wordt, in den tijd t door de regtlijnige ruimte AC $= st$ loopen, en alzoo in horizontale rigting den weg AB $= st\ Cos.\ \lambda$ en in verticale rigting den weg BC $= st\ Sin.\ \lambda$, met eenparige beweging hebben afgelegd. Daar nu de zwaartekracht aan het ligchaam alleen eene dalende beweging mededeelt, zonder de horizontale beweging in eenigen deele aan te doen, zoo zal het zware ligchaam, na den tijd t, nog wel de ruimte AB $= st\ Cos.\ \lambda$ hebben afgelegd; maar de hoogte, die hetzelve boven het horizontale vlak heeft, zal nu wezen BD $= h = st\ Sin.\ \lambda - gt^2$ zijnde, g de versnelling der zwaartekracht, of de weg, waardoor een ligchaam in de eerste seconde vrij valt, en welke, voor onze breedte, gelijk 4,906 ellen is.

Wil men nu den hoek λ zoodanig bepalen, dat het ligchaam, met eene snelheid s geworpen, wanneer het op eenen horizontalen afstand AB $= f$ gekomen is, tevens eene gegevene hoogte BD $= h$ zal bereikt hebben, dan heeft men hiertoe, door het bovenstaande, de vergelijkingen

$$st\ Cos.\ \lambda = f \quad \text{en} \quad st\ Sin.\ \lambda - gt^2 = h,$$

of wanneer wij t uit de eerste in de tweede overbrengen

$$h = f\ Tang.\ \lambda - g \cdot \frac{f^2}{s^2\ Cos^2.\ \lambda},$$

dat is $$h = f\ Tang\ \lambda - g \cdot \frac{f^2}{s^2} (1 + Tang^2.\ \lambda) \ldots \ldots (1).$$

Is

Is echter, zoo als in ons geval, de ſnelheid zoodanig gegeven, dat men, onder 45°, eene bekende horizontale worpsverheid a bereikt, dan moet, voor $\alpha = 45°$ en $h = 0$, $f = a$ zijn. Dit geeft ons $a - \frac{2a^2g}{s^2} = 0$, of $2ag = s^2$, zoodat $s = \sqrt{2ag}$, waardoor onze vergelijking overgaat in

$$h = f\, Tang.\, \lambda - \frac{f^2}{2a} (1 + Tang^2.\, \lambda) \;\ldots\ldots (2)$$

en losſende hieruit $Tang.\, \lambda$ op, dan vindt men

$$Tang.\, \lambda = \frac{a \pm \sqrt{(a^2 - f^2 - 2ah)}}{f} \;\ldots\ldots (3)$$

Stellen wij dan, om het gezegde op ons vraagſtuk toe te passen, dat de gevraagde elevatiehoek, onder welken boven de lijn AM geworpen moet worden, gelijk λ is, en laat de ſnelheid zijn $s = 2\sqrt{ag}$. Stellende alsdan AM $= f$, dan zal de hoogte van het ſtootpunt wezen

$$h = f\, Tang.\, \lambda - g\frac{f^2}{s^2} (1 + Tang^2.\, \lambda) \;\ldots (A)$$

Op het oogenblik der botſing is de verticale ſnelheid niet meer gelijk $s\, Sin.\, \alpha$; want het ligchaam heeft nu, door den val, de ſnelheid $2gt$ verkregen, zoodat de overblijvende verticale ſnelheid is $s\, Sin.\, \alpha - 2gt$, of daar $t = \frac{f}{s\, Cos.\, \alpha}$ is, $s\, Sin\, \alpha - \frac{2gf}{s\, Cos.\, \alpha}$, en deze verticale ſnelheid verandert nu geenszins na den ſtoot, doch de horizontale ſnelheid wordt na den ſtoot $q\, s\, Cos.\, \lambda$, waaruit volgt, dat de volſtrekte ſnelheid na den ſtoot zal zijn

$$s' = \sqrt{\left\{\left(s\, Sin.\, \alpha - \frac{2gf}{s\, Cos.\, \alpha}\right)^2 + q^2 s^2 Cos^2.\, \lambda\right\}},$$

terwijl de rigting der beweging nu zal worden uitgedrukt door

$$Tang.\, \lambda' = \frac{s\, Sin.\, \lambda - \frac{2gf}{s\, Cos\, \lambda}}{q\, s\, Cos.\, \lambda} = \frac{1}{q} Tang.\, \lambda - \frac{2gf}{q\, s^2\, Cos^2.\, \lambda};$$

ſtellen wij dus MB $= f'$, dan volgt uit (1), dat het aantal lengte-eenheden, waarop het ligchaam zich hooger dan het ſtootpunt bevindt, wanneer hetzelve boven het punt B gekomen is, zal zijn

$$h' = f'\, Tang.\, \lambda' - g\frac{f'^2}{s'^2} (1 + Tang^2.\, \lambda'),$$

 of,

of, wanneer wij voor λ' en s' derzelver waarden schrijven,

$$h'=f'\left(\frac{1}{q}Tang.\lambda-\frac{2gf}{qs^2Cos^2.\lambda}\right)-\frac{gf'^2\left\{1+\left(\frac{1}{q}Tang.\lambda-\frac{2gf}{qs^2Cos^2.\lambda}\right)^2\right\}}{\left(s.Sin.\alpha-\frac{2gf}{s\,Cos.\alpha}\right)^2+q^2s^2Cos^2.\alpha}$$

$$=f'\left(\frac{1}{q}\,Tang.\,\lambda-\frac{2gf}{q\,s^2\,Cos^2\,\lambda}\right)-\frac{g\,f'^2}{q^2\,s^2\,Cos^2.\,\lambda},$$

dat is $h'=\frac{1}{q}\,f'\,Tang.\lambda-\frac{g}{s^2Cos^2.\lambda}\left(\frac{2ff'}{q}+\frac{f'^2}{q^2}\right)$.

Daar wij nu in (A) gevonden hebben

$$h=f\,Tang.\,\lambda-\frac{g}{s^2Cos^2.\lambda}\,f^2,$$

en $h+h'$ gelijk de gegevene hoogte van het te bereiken punt moet zijn, zoo hebben wij

$$H=(f+\frac{1}{q}\,f')\,Tang.\,\lambda-g\,\frac{(f+\frac{1}{q}\,f')^2}{s^2\,Cos^2.\lambda},$$

of, daar $s^2=2\,ag$ en dus $\frac{g}{s^2}=\frac{1}{2\,a}$ is,

$$H=(f+\frac{1}{q}f')\,Tang.\lambda-\frac{(f+\frac{1}{q}f')^2}{2a}(1+Tang^2.\lambda),$$

en deze vergelijking met (2) nergens anders in verschillende, dan dat f in $(f+\frac{1}{q}f')$ veranderd is, zoo volgt hieruit, dat wij, ten einde λ te vinden in de vergelijking (3), voor f zullen moeten schrijven $AM+\frac{1}{q}\,BM$ en voor h de gegevene hoogte H.

Uit dit alles volgt dan, dat het gevraagde door het volgende stelsel van vergelijkingen zal worden opgelost,

$m=\frac{n-1}{n}$..(1), $mc\,Sin.\,C=A$ (2), $bc\,Sin.\,C=E$ (3),

$mc\,Cos.\,C+b=B$... (4) $(m+1)\,bc\,Cos.\,C=D$... (5),

$$Tang^4.\phi-\frac{2(DE+r^2AB)}{rB^2-E^2}Tang^3.\phi+\frac{r^2(A^2+B^2)+2(AE-D^2)}{rB^2-E^2}Tang^2.\phi$$

$$\ldots-\frac{2A(r^2B-bD)}{rB^2-E^2}Tang.\phi+\frac{(r^2-b^2)A^2}{rB^2-E^2}=0\;...\;(6),$$

Tang.

$Tang\ \beta = \frac{b\,Cos.\phi - r}{b\,Sin.\phi} \ldots (7)$, $Tang.\ \delta = m\,Tang.\beta \ldots (8)$,

$f = \frac{b\,Sin.\phi}{Cos.\beta} \ldots (9)$, $f' = \frac{c\,Sin.(C-\phi)}{Cos.\delta} \ldots (10)$,

$q = \sqrt{(m\,Sin^2.\beta + Cos^2\beta)} \ldots (11)$, $Tang.\,\alpha = \frac{r\,Sin.\phi}{b - r\,Cos\,\phi} \ldots (12)$,

$$Tang.\ \lambda = \frac{a \pm \sqrt{(a^2 - (f + \frac{1}{q}f')^2 - 2aH)}}{f + \frac{1}{q}f'} \ldots (13).$$

LXXXVIII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Van eenen driehoek ABC, *Fig.* 67., *is gegeven de lijn* BD, *die uit het hoekpunt* B *naar het midden* D *van de overstaande zijde* AC *loopt, benevens de loodlijnen, welke uit het punt* D *op de zijden* AB *en* BC *vallen. Men vraagt dien driehoek te berekenen en te construeren?*

OPGELOST *door* J. B. VOLMER VAN BORN, J. BASSAN, M. B. JUNG, A. B. DE BOCK, JUN., en J. JONKHEERT.

OPLOSSING *van* J. B. VOLMER VAN BORN.

De meetkunstige constructie van den gevraagden driehoek is allergemakkelijkst. Daar namelijk BD gegeven is, beschrijven wij op dezelve eenen cirkel en maken de koorden DE en DF gelijk de gegevene loodlijnen; wanneer dan BE en BF getrokken worden, zijn dit de rigtingen van twee der zijden, en er blijft alleen over, om door D de lijn AC zoodanig te trekken, dat AD = DC worde. Hiertoe deelen wij BE midden door in G, trekken GH evenwijdig aan BF en trekken de lijn EHI; alsdan is EG : GB = EH : HI, en daar EG = GB is, zoo is EH = HI. Wanneer dus door D de lijn AC evenwijdig met EI getrokken wordt, zal AD = DC en dus ABC de begeerde driehoek zijn.

Stellen wij, ten einde den driehoek te berekenen, BD = a, DE = b en DF = b', dan is

$$Sin.\ EBD = \frac{ED}{BD} = \frac{b}{a} \text{ en } Sin.\ FBD = \frac{FD}{BD} = \frac{b'}{a},$$

zijden AB en BC″ even zoo groot als die van de voorgaande; doch de derde zijde wordt uitgedrukt door AC″ $= \frac{ac\sqrt{2}}{2c - a\sqrt{2}} - \sqrt{(4b^2 - c^2)}$.

XC. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Wanneer uit twee der hoekpunten van eenen driehoek lijnen getrokken worden, tot het midden van de overstaande zijden, en men deze deellijnen kent, benevens den derden hoek van den driehoek, dan vraagt men dezen driehoek te bepalen?

OPGELOST *door* A. B. DE BOCK, JUN., J. BASSAN en J. JONKHEERT.

OPLOSSING *van* A. B. DE BOCK, JUN.

Stellen wij, *Fig.* 69, BD $= a$, CE $= b$, BAC $= \alpha$, AD $=$ DC $= x$ en AE $=$ EB $= y$, dan hebben wij

$$Cos.\ \alpha = \frac{x^2 + 4y^2 - a^2}{4xy} \quad \text{en} \quad Cos.\ \alpha = \frac{y^2 + 4x^2 - b^2}{4xy};$$

deze twee waarden van $Cos.\ \alpha$ aan elkander gelijk stellende, verkrijgen wij

$$x^2 + 4y^2 - a^2 = y^2 + 4x^2 - b^2,$$

of

$$3x^2 - 3y^2 = b^2 - a^2,$$

zoodat

$$x^2 - y^2 = \tfrac{1}{3}(b^2 - a^2) \quad \ldots \ldots (1).$$

Nemende daarentegen de som der twee eerste vergelijkingen, dan verkrijgen wij

$$5x^2 + 5y^2 - a^2 - b^2 = 8xy\ Cos.\ \alpha,$$

of

$$x^2 + y^2 = \tfrac{8}{5}xy\ Cos.\ \alpha + (a^2 + b^2) \quad \ldots (2);$$

maar in (1) vonden wij

$$x^2 - y^2 = \tfrac{1}{3}(b^2 - a^2),$$

en wij verkrijgen dus, door de halve som en het halve verschil dezer vergelijkingen te nemen,

$$x^2 = \tfrac{4}{5}xy\ Cos.\ \alpha + \tfrac{1}{5}a^2 + \tfrac{2}{5}b^2 \quad \ldots (3),$$

en

$$y^2 = \tfrac{4}{5}xy\ Cos.\ \alpha + \tfrac{2}{5}a^2 + \tfrac{1}{5}b^2 \quad \ldots (4),$$

welke, te zamen vermenigvuldigd, geven

$$x^2y^2 = \tfrac{16}{25}x^2y^2\ Cos^2.\ \alpha + \tfrac{4}{5}xy(a^2+b^2)\ Cos.\ \alpha + \tfrac{1}{9}(a^2+2b^2)(2a^2+b^2),$$

dat is,

$$x^2y^2(1 - \tfrac{16}{25}Cos^2.\alpha) - \tfrac{4}{5}xy(a^2+b^2)\ Cos.\ \alpha - \tfrac{1}{9}(a^2+2b^2)(2a^2+b^2) = 0;$$

of

$$x^2y^2 - \frac{20(a^2+b^2)\ Cos.\ \alpha}{25 - 16\ Cos^2\ \alpha}xy - \frac{25(a^2+2b^2)(2a^2+b^2)}{9(25 - 16\ Cos^2.\ \alpha)} = 0,$$

waar-

waaruit,

$$xy=\frac{10(a^2+b^2)Cos.\alpha}{25-16\,Cos^2.\alpha}\pm\sqrt{\left\{\frac{100(a^2+b^2)^2Cos^2.\alpha}{(25-16\,Cos^2.\alpha)^2}+\frac{25(a^2+2b^2)(2a^2+b^2)}{9(25-16\,Cos^2.\alpha)}\right\}}.$$

Hierdoor xy gevonden hebbende, vinden wij uit (3) en (4), voor de twee zijden AC en AB,

$$AC=2x=2\sqrt{\left\{\tfrac{4}{5}\,xy\,Cos.\,\alpha+\tfrac{1}{5}(a^2+2b^2)\right\}},$$

en $$AB=2y=2\sqrt{\left\{\tfrac{4}{5}\,xy\,Cos.\,\alpha+\tfrac{1}{5}(2a^2+b^2)\right\}};$$

terwijl de derde zijde alsdan wordt gevonden door de vergelijking $$BC=2\sqrt{\left\{x^2+y^2-2\,xy\,Cos.\,\alpha\right\}}.$$

XCI. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Van eenen driehoek is een der hoeken bekend, benevens de twee lijnen, die de twee andere hoeken midden door deelen. Men vraagt dezen driehoek te bepalen?

OPLOSSING. *Door* J. BASSAN.

Zij ABC, *Fig.* 70, de gevraagde driehoek, waarin C de gegeven hoek is, en stellen wij ACB $=\alpha$, BD $=a$, AE $=b$ en CAE $=$ EAB $=\phi$, dan is ABC $=180^\circ-(\alpha+2\phi)$, dus ABD $=$ DBC $=90^\circ-(\tfrac{1}{2}\alpha+\phi)$ en AEC $=180^\circ-(\alpha+\phi)$.

Nu is in driehoek BDC, BD : DC $=$ *Sin.* C : *Sin.* DBC

of $$a : DC = Sin.\,\alpha : Cos.\,(\tfrac{1}{2}\alpha+\phi),$$

zoodat $$DC=a\times\frac{Cos.\,(\tfrac{1}{2}\alpha+\phi)}{Sin.\,\alpha}.$$

Verder is in driehoek ADB, BD : AD $=$ *Sin.* BAD : *Sin.* ABD

of $$a : AD = Sin.\,2\phi : Cos.\,(\tfrac{1}{2}\alpha+\phi),$$

en dus $$AD=a\times\frac{Cos.\,(\tfrac{1}{2}\alpha+\phi)}{Sin.\,2\phi};$$

zoodat $$AC=AD+CD=a\times Cos.\,(\tfrac{1}{2}\alpha+\phi)\left(\frac{1}{Sin.\,2\phi}+\frac{1}{Sin.\,\alpha}\right).$$

Eindelijk is in driehoek AEC, AE : AC $=$ *Sin.* ACE : *Sin.* AEC

of $$b : AC = Sin.\,\alpha : Sin.\,(\alpha+\phi),$$

waaruit $$AC=b\times\frac{Sin.\,(\alpha+\phi)}{Sin.\,\alpha}.$$

Stellen wij dus de twee gevondene waarden voor AC aan elkander gelijk, dan komt er, ter bepaling van ϕ,

$$a\,Cos.(\tfrac{1}{2}a+\phi)\left(\frac{1}{Sin.2\phi}+\frac{1}{Sin.a}\right)=\mp b\times\frac{Sin.(a+\phi)}{Sin.a},$$

of $$\frac{Cos.(\tfrac{1}{2}a+\phi)(Sin.a+2\,Sin.\phi\,Cos.\phi)}{Sin.\phi\,Cos.\phi\,Sin.(a+\phi)}=\frac{2b}{a};$$

dit ontwikkelende, en onder boven door $Cos^2.\phi$ deelende; komt er

$$\frac{(Cos.\tfrac{1}{2}a-Sin.\tfrac{1}{2}a.Tang.\phi)\{Sin.a(1+Tang^2\phi)+2\,Tang.\phi\}}{Tang.\phi(Sin.a+Cos.a\,Tang.\phi)}=\frac{2b}{a},$$

en wanneer wij in teller en noemer de aangewezene vermenigvuldigingen verrigten,

$$\frac{\left\{\begin{array}{l}2\,Sin.\tfrac{1}{2}a\,Cos^2.\tfrac{1}{2}a+2\,Cos^3.\tfrac{1}{2}a\,Tang.\phi\\-2\,Sin^3.\tfrac{1}{2}a\,Tang^2.\phi-2\,Sin^2.\tfrac{1}{2}a\,Cos.\tfrac{1}{2}a\,Tang^3.\phi\end{array}\right\}}{Sin.a\,Tang.\phi+Cos.a\,Tang^2.\phi}=\frac{2b}{a}$$

welke met het product der noemers vermenigvuldigd, en volgens de magten van $Tang.\phi$ gerangschikt, geeft,

$$Tang^3\phi+\frac{a\,Sin^3\tfrac{1}{2}a+b\,Cos\,a}{a\,Sin^2.\tfrac{1}{2}a\,Cos\,\tfrac{1}{2}a}Tang^2\phi-\frac{a\,Cos^3\tfrac{1}{2}a-b\,Sin\,a}{a\,Sin^2.\tfrac{1}{2}a\,Cos.\tfrac{1}{2}a}Tang\phi-Cot\tfrac{1}{2}a=0.$$

Uit deze vergelijking ϕ gevonden hebbende, is alles bekend; want alsdan hebben wij, zoo als boven bewezen is,

$$CD=a\frac{Cos.(\tfrac{1}{2}a+\phi)}{Sin.a},\quad AD=a\frac{Cos.(\tfrac{1}{2}a+\phi)}{Sin.2\phi},$$

waardoor in elk der driehoeken ADB en CDB twee zijden met eenen hoek bekend zijn, en dus al het overige door de gewone regels gevonden kan worden.

XCII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Van eenen driehoek ABC, *Fig.* 71, *is gegeven de lijn* DB, *welke den hoek* B *midden door deelt, de lijn* DE, *die uit* D *loodregt op* AB *valt en de lijn* DF, *welke de zijde* BC *midden door deelt. Men vraagt dezen driehoek te bepalen?*

OPGELOST *door* J. BASSAN, M. B. JUNG, A. B. DE BOCK, JUN., en J. JONKHEERT.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

De constructie van den voorgestelden driehoek is allergemakkelijkst. Laat namelijk op eene willekeurige lijn AB de loodlijn ED gesteld worden van gegevene grootte, en uit D, met de gegevene lengte DB, een cirkelboog beschreven worden, dan

wordt

wordt hierdoor het hoekpunt B bekend. Wordt verder de hoek DBC = DBA gemaakt, dan verkrijgt men de rigting van de zijde BC. Beschrijft men voorts uit D, met de gegevene waarde DF, eenen cirkelboog, dan verkrijgt men het punt F, en dus, FC = BF makende, het hoekpunt C, waardoor dan, na CD getrokken te hebben, het hoekpunt A gevonden en dus de geheele driehoek geconstrueerd is.

Hieruit ziet men nog, dat er twee verschillende driehoeken zijn, die aan de vraag voldoen; want de cirkelboog, uit D met DF als straal beschreven, snijdt BC nog in een tweede punt F′, en wanneer alzoo F′C′ = BF′ genomen en C′DA′ getrokken wordt, verkrijgt men een' tweeden driehoek A′BC′, die aan de vraag beantwoordt.

Ten einde de zijden van den driehoek door berekening uit de gegevens af te leiden, stellen wij $BD = a$, $DE = b$, $DF = c$, $DFB = \phi$ en $BFD = \psi$, en dan hebben wij vooreerst $BE = \sqrt{(a^2 - b^2)}$, en

$Sin.\ ABD = Sin.\ DBC = \frac{b}{a}$. Verder is in driehoek DBF,

$$a : c = Sin.\ \phi : \frac{b}{a} \quad \text{dus} \quad Sin.\ \phi = \frac{b}{c},$$

zoodat $Sin.\ \psi = Sin.\ (\phi + DBF) = \frac{b}{ac}\left\{\sqrt{(a^2 - b^2)} \pm \sqrt{(c^2 - b^2)}\right\}$,

waarin het bovenste teeken op het punt F en het benedenste op het punt F′ betrekking heeft.

Hierdoor hebben wij dan, in dezen zelfden driehoek,

$$c : BF = \frac{b}{a} : Sin.\ \psi \quad \text{dus} \quad BF = \frac{ca\ Sin.\ \psi}{b},$$

zoodat $\quad BC = 2\,BF = 2\left\{\sqrt{(a^2 - b^2)} \mp \sqrt{(c^2 - b^2)}\right\}$,

waarin dan nu het bovenste teeken de waarde van BC′ doet kennen.

Om het stuk DC van de zijde AC te vinden, hebben wij

$$DC^2 = DB^2 + BC^2 - 2\,DB \times BC\ Cos.\ DBC,$$

of $DC^2 = a^2 + 4\left\{a^2 + c^2 - 2b^2 \mp 2\sqrt{(a^2 - b^2)(c^2 - b^2)}\right\}$ ....

$$-4a\left\{\sqrt{(a^2 - b^2)} \mp \sqrt{(c^2 - b^2)}\right\} \times \frac{1}{a}\sqrt{(a^2 - b^2)},$$

hetgeen gemakkelijk herleid wordt tot

$$DC^2 = a^2 + 4(c^2 - b^2) \mp 4\sqrt{(a^2 - b^2)(c^2 - b^2)},$$

zoodat $DC = \sqrt{\{a^2 + 4(s^2 - b^2) \mp 4\sqrt{(a^2 - b^2)(s^2 - b^2)}\}}$, waarin het benedenste teeken nu wederom de waarde van DC' doet kennen.

Uit de drie zijden van den driehoek DBC kan men nu den hoek BDC en dus ook ADB berekenen, als wanneer, in driehoek ADB, de zijde BD met de twee aanliggende hoeken bekend is, waardoor AB en AD gemakkelijk berekend kunnen worden. Nog gemakkelijker is het echter AB en AD op de volgende wijze te vinden.

Stellen wij BC en CD, als bekend zijnde, gelijk m en n, maar AB en AD, als onbekend, gelijk x en y, dan hebben wij, omdat BD den hoek B midden door deelt,

$$x : m = y : n \quad \text{of} \quad y = \frac{n}{m} x.$$

Verder hebben wij $Cos.\, ADB = \frac{y^2 + a^2 - x^2}{2ay}$ en $Cos.\, BDC = \frac{n^2 + a^2 - m^2}{2an}$, en daar $Cos.\, ADB = - Cos.\, BDC$ moet zijn,

$$\frac{y^2 + a^2 - x^2}{y} = \frac{m^2 - a^2 - n^2}{n},$$

of $\quad n(y^2 + a^2 - x^2) = (m^2 - a^2 - n^2)y,$

dus $\quad nx^2 + ym^2 = (a^2 + ny)(n + y);$

of $\quad nx \times x + ym \times m = (a^2 + ny)(n + y),$

en daar $nx = ym$ is,

$$ymx + nxm = (a^2 + ny)(n + y),$$

dat is $\quad mx(y + n) = (a^2 + ny)(n + y),$

of $\quad mx = a^2 + ny,$

en hierin voor y derzelver waarde schrijvende,

$$mx = a^2 + \frac{n^2}{m} x,$$

zoodat $\quad (m^2 - n^2)x = a^2 m,$

en $\quad x = \frac{a^2 m}{m^2 - n^2},$

waardoor $\quad y = \frac{a^2 n}{m^2 - n^2}.$

Bren-

Brengende alzoo hierin de gevondene waarden van m en n, dat is, van BC en CD over, dan komt er, eindelijk

$$m^2 - n^2 = 3a^2 - 4b^2 \mp 4\sqrt{(a^2-b^2)(c^2-b^2)}$$

is, $$AB = 2a^2 \times \frac{\sqrt{(a^2-b^2)} \mp \sqrt{(c^2-b^2)}}{3a^2-4b^2 \mp 4\sqrt{(a^2-b^2)(c^2-b^2)}},$$

en $$AD = a^2 \times \frac{\sqrt{\{a^2+4(c^2-b^2) \mp 4\sqrt{(a^2-b^2)(c^2-b^2)}\}}}{3a^2-4b^2 \mp 4\sqrt{(a^2-b^2)(c^2-b^2)}}.$$

XCIII. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Drie getallen te vinden van de volgende eigenschappen. De som der quadraten van het grootste en kleinste is gelijk aan het dubbel product van het grootste en middelste getal. Het product der getallen min de som van het grootste en tweemaal het kleinste getal is gelijk het vierkant van driemaal het kleinste getal. Deelt men eindelijk het product van beide grootste getallen door den pronik van het kleinste, dan is dit quotient gelijk aan het quotient van het grootste door het kleinste getal?

OPGELOST door G. BRANDSTEDER, J. BASSAN, M. B. JUNG, A. B. DE BOCK, JUN., en J. JONKBERT.

OPLOSSING van G. BRANDSTEDER.

Stel het kleinste getal x, het middelste y en het grootste z, dan geeft het vraagstuk ons de volgende vergelijkingen

$$x^2 + z^2 = 2yz \quad \ldots\ldots\ldots (1),$$

$$xyz - z - 2x = 9x^2 \quad \ldots\ldots (2),$$

$$\frac{yz}{x^2+x} = \frac{z}{x} \quad \ldots\ldots\ldots (3).$$

Uit (3) wordt, door z deelende en met $x(x+1)$ vermenigvuldigende, terstond gevonden

$$y = x + 1 \quad \ldots\ldots\ldots (4),$$

en substituerende dit in (2), dan komt er

$$xz(x+1) = 9x^2 + 2x + z,$$

of $$z(x^2 + x - 1) = 9x^2 + 2x,$$

waaruit $$z = \frac{x(9x+2)}{x^2+x-1} \quad \ldots\ldots\ldots (5).$$

Bren-

Brengende alzoo de waarden van y en z uit (4) en (5) in (1) over, dan verkrijgen wij

$$x^2 + \frac{x^2(9x+2)^2}{(x^2+x-1)^2} = 2(x+1) \cdot \frac{x(9x+2)}{x^2+x-1},$$

of aan beide zijden door x deelende en met $(x^2+x-1)^2$ vermenigvuldigende,

$$x(x^2+x-1)^2 + x(9x+2)^2 = 2(x+1)(9x+2)(x^2+x-1),$$

hetwelk, ontwikkeld en volgens de magten van x gerangschikt, geeft

$$x^5 - 16x^4 + 40x^3 + 26x^2 + 23x + 4 = 4 = 0,$$

waaruit de eenigste meetbare wortel is $x = 4$. Nemende dan $x = 4$, zoo wordt $y = 5$ en $z = 8$.

XCIV. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Vier personen A, B, C *en* D *hebben elk een aantal guldens. Indien men het aantal guldens van* B *plus* 2 *tot de tweede magt verheft, en daarbij het quadraat van die van* C *voegt, dan is de som gelijk aan die der tweede magten van* A *en* D. *De som der guldens van* B *en* C *is gelijk aan die van* A *en* D. *Het product van* A *en* D *bij hunne som geteld, is gelijk aan het vermenigvuldigde van* B *en* C. *Eindelijk is de som der guldens van* B, C *en* D *plus één een pronik, welks wortel het aantal guldens van* A *minus* 1 *is. Vrage hoeveel guldens elk in het bijzonder heeft?*

OPGELOST *door* J. BASSAN, A. B. DE BOCK, JUN., J. JONKHERT, J. B. VOLMER VAN BORN en G. BRANDSTEDER.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Stel het getal guldens, dat A, B, C en D bezit, achtervolgens x, y, z en u, dan zijn de vergelijkingen

$$(y+2)^2 + z^2 = x^2 + u^2 \quad \ldots \quad (1),$$

$$y + z = x + u \quad \ldots \quad (2),$$

$$xu + x + u = yz \quad \ldots \quad (3),$$

$$y + z + u + 1 = (x-1)^2 + (x-1) \quad \ldots \quad (4).$$

De vergelijking (1) ontwikkelende, heeft men

$$y^2 + 4y + 4 + z^2 = x^2 + u^2,$$

dit van het vierkant van (2) aftrekkende, rest er

$$2yz - 4y - 4 = 2xu,$$

en

en dit van het dubbel van (3) aftrekkende, blijft er

$$4y + 4 = 2x + 2u,$$

of $$x + u = 2y + 2 \;\ldots\ldots\ldots\; (5).$$

Uit de vergelijking (4) heeft men

$$y + z + u + 1 = x^2 - x,$$

of $$x + y + z + u = x^2 - 1,$$

en daar $x + u = y + z$ is,

$$2(x + u) = 2(y + z) = x^2 - 1 \;\ldots\; (6),$$

waaruit $$2u = x^2 - 2x - 1,$$

of $$u = \tfrac{1}{2}(x^2 - 2x - 1) \;\ldots\ldots\; (7),$$

hetwelk in (5) overgebragt, geeft

$$\tfrac{1}{2}(x^2 - 1) = 2y + 2,$$

waaruit $$y = \frac{x^2 - 5}{4} \;\ldots\ldots\ldots\; (8),$$

zoodat wij, door middel van (6), verkrijgen

$$z = \tfrac{1}{2}(x^2 - 1) - y = \tfrac{1}{2}(x^2 - 1) - \tfrac{1}{4}(x^2 - 5) = \tfrac{1}{4}(x^2 + 3).\; (9).$$

Brengende dus de waarden van u, y en z, uit (7), (8) en (9) in (3) over, dan komt er, ter bepaling van x,

$$\tfrac{1}{2}x(x^2 - 2x - 1) + x + \tfrac{1}{2}(x^2 - 2x - 1) = \tfrac{1}{4}(x^2 - 5) \times \tfrac{1}{4}(x^2 + 3),$$

of $$\tfrac{1}{2}(x^3 - x^2 - x - 1) = \tfrac{1}{16}(x^4 - 2x^2 - 15),$$

of $$8(x^3 - x^2 - x - 1) = x^4 - 2x^2 - 15,$$

dat is $$8(x^3 - x^2 - x + 1) = x^4 - 2x^2 + 1,$$

of $$8\{x^2(x - 1) - (x - 1)\} = (x^2 - 1)^2,$$

dat is $$8(x - 1)\{x^2 - 1\} = (x^2 - 1)(x - 1)(x + 1),$$

dus $$(x^2 - 1)(x - 1)(x - 7) = 0,$$

dat is $$(x - 1)^2(x + 1)(x - 7) = 0.$$

Deze vergelijking heeft klaarblijkelijk twee wortels gelijk 1, eenen wortel gelijk -1, en eenen gelijk 7. Daar nu stilzwijgend ondersteld is, dat elk der personen een positief aantal guldens bezit, zoo vervalt $x = -1$. Eveneens vervalt $x = 1$, om dat dezelve y negatief maakt. Wij nemen alzoo $x = 7$, en dan is $y = \frac{1}{4}(x^2 - 5) = 11$, $z = \frac{1}{4}(x^2 + 3) = 13$ en $u = \frac{1}{2}(x^2 - 2x - 1) = 17$.

XCV. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Vier getallen te vinden, welke de volgende eigenschappen bezitten. 1°. *Het quadraat van het kleinste getal is gelijk de som der*

drie

drie overige getallen. 2°. *Het derde getal is een kubus, welks wortel het quotiënt is van het grootste getal, gedeeld door het kleinste.* 3°. *De som der beide middelste is gelijk aan den trigonaal van het kleinste getal.* 4°. *Het dubbel product van het eerste en derde getal is gelijk aan het vermenigvuldigde van het tweede getal plus* 1 *en het vierde getal?*

Opgelost *door* G. Brandsteder, J. Bastan, A. B. de Bock, Jun., en J. Jonkhert.

Oplossing *van* G. Brandsteder.

Stellen wij de getallen achtervolgens x, y, z^3 en u, dan geeft het vraagstuk ons de volgende vergelijkingen

$$x^2 = y + z^3 + u \quad \ldots \ldots (1),$$

$$z = \frac{u}{x} \quad \ldots \ldots (2),$$

$$y + z^3 = \frac{x(x+1)}{2} \quad \ldots \ldots (3),$$

$$2xz^3 = (y+1)u \quad \ldots \ldots (4).$$

Brengen wij de waarde van $y + z^3$ uit (3) in (1) over, dan komt er

$$x^2 = \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x + u,$$

waaruit

$$u = \tfrac{1}{2}(x^2 - x) \quad \ldots \ldots (5),$$

en brengende deze waarde in (2) over, dan komt er

$$z = \tfrac{1}{2}(x - 1) \quad \ldots \ldots (6),$$

welke waarde in (3) gesubstitueerd, geeft

$$y + \tfrac{1}{8}(x-1)^3 = \tfrac{1}{2}(x^2 + x),$$

of

$$y = \tfrac{1}{2}x(x+1) - \tfrac{1}{8}(x-1)^3 \quad \ldots (7).$$

Substitueeren wij dus de waarden van u, z en y, in (5), (6) en (7) gevonden, in de vergelijking (4), dan komt er, ter bepaling van x,

$$2x \times \tfrac{1}{8}(x-1)^3 = (\tfrac{1}{2}x(x+1) - \tfrac{1}{8}(x-1)^3 + 1) \times \tfrac{1}{2}(x^2 - x) \,.(8),$$

of, alles door $x(x-1)$ deelende,

$$\tfrac{1}{4}(x-1)^2 = \tfrac{1}{16}(4x(x+1) - (x-1)^3 + 8),$$

dat is

$$4(x-1)^2 = 4x(x+1) - (x-1)^3 + 8),$$

welke, ontwikkeld en gerangschikt, geeft

$$x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = 0.$$

Deze vergelijking heeft twee wortels gelijk -1 en een' wortel gelijk 5.

Ne-

Nemende $x = -1$, dan worden de getallen $x = -1$, $y = 1$, $z^3 = -1$ en $u = 1$.

Nemende $x = 5$, dan zijn de getallen $x = 5$, $y = 7$, $z^3 = 8$ en $u = 10$.

Er bestaan nog twee antwoorden op dit vraagstuk; want daar wij de vergelijking (8) door $x(x-1)$ gedeeld hebben, zoo wordt ook aan dezelve voldaan door $x = 0$ en $x = 1$.

Nemende dan $x = 0$, zoo worden de getallen $x = 0$, $y = \frac{1}{8}$, $z^3 = -\frac{1}{8}$ en $u = 0$.

Nemende eindelijk $x = 1$, dan verkrijgen wij voor de gevraagde getallen $x = 1$, $y = 1$, $z^3 = 0$ en $u = 0$.

XCVI. VOORSTEL.

Door S. KLIJNSMA.

Door een gegeven punt, binnen eenen gegevenen cirkel, eene lijn te trekken, zoodanig, dat de stukken, waarin deze koorde door het gegeven punt gedeeld wordt, tot elkander in gegevene reden staan?

OPGELOST *door* S. KLIJNSMA, L. J. ULMAN, J. BASSAN, M. B. JUNG en A. B. DE BOCK, JUN.

OPLOSSING *van* S. KLIJNSMA.

Zij C, *Fig.* 72, het gegeven punt, dan is de straal FD $= r$ en CF $= a$ bekend. Stellen wij nu CA $= x$ en CB $= y$, dan is, uit de bekende eigenschap van den cirkel,

$$AC \times CB = DC \times CE,$$

of $$xy = (r-a)(r+a) = r^2 - a^2.$$

Verder is, door den eisch van het vraagstuk,

$$x : y = m : n \quad \text{of} \quad \frac{x}{y} = \frac{m}{n},$$

welke, met de voorgaande vermenigvuldigd, geeft

$$x^2 = \frac{m}{n}(r^2 - a^2),$$

zoodat $$x = \sqrt{\frac{m}{n}(r^2 - a^2)},$$

en dus $$y = \sqrt{\frac{n}{m}(r^2 - a^2)},$$

waar-

waaruit nog, voor de geheele koorde, gevonden wordt

$$x + y = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) \sqrt{mn\,(r^2 - a^2)},$$

of
$$x + y = (m + n)\,\frac{\sqrt{(r^2 - a^2)}}{\sqrt{mn}}.$$

De uitdrukking $x = m.\dfrac{\sqrt{(r^2 - a^2)}}{\sqrt{mn}}$ geeft ons aanleiding tot de volgende Constructie.

Maak CG = n en CH = m, en beschrijf op GH eenen halven cirkel, dan is, CI loodregt op DE stellende, CL = $\sqrt{mn}$ en CI = $\sqrt{(r^2 - a^2)}$. Trekkende dus LH en IK evenwijdig met LH, dan zal CK = x zijn, en de gevraagde koorde zal dus gevonden worden, door CA = CK te maken.

XCVII. Voorstel.

Door S. Klijnsma.

Door een punt C, *Fig*, 73, *gelegen in de lijn, welke de middelpunten van twee gegevene cirkels vereenigt, eene lijn te trekken, die deze beide cirkels in* D *en* E *zoodanig ontmoet, dat de stukken* CD *en* CE *tot elkander in gegevene reden staan?*

Oplossing. *Door* S. Klijnsma.

Zij AB de lijn, welke de middelpunten vereenigt, en stellen wij, daar het punt C gegeven is, AC = a, CB = a', AD = r en BE = r', CD = x en CE = x', dan is

$$Cos.\, \mu = \frac{a^2 + x^2 - r^2}{2ax} = \frac{a'^2 + x'^2 - r'^2}{2a'x'} \quad \ldots (1).$$

Verder is, door den aard van het vraagstuk,

$$CD : CE = x : x' = m : n \quad \ldots (2).$$

Uit de eerste is

$$a'x'(a^2 + x^2 - r^2) = ax(a'^2 + x'^2 - r'^2),$$

en uit de tweede
$$x' = \frac{n}{m}\,x,$$

welke, in de voorgaande overgebragt, geeft

$$a' \times \frac{n}{m}\,x\,(a^2 + x^2 - r^2) = ax\left(a'^2 + \frac{n^2}{m^2}\,x^2 - r'^2\right),$$

of, door x deelende,

$$a'mn\,(a^2 + x^2 - r^2) = a\,(m^2 a'^2 + n^2 x^2 - m^2 r'^2),$$

of $a'a^2 mn - a'mn\,r^2 + a'mn\,x^2 = aa'^2 m^2 + an^2 x^2 - am^2 r'^2$,

dus $n\,(an - a'm)\,x^2 = a'mn\,(a^2 - r^2) - am^2\,(a'^2 - r'^2)$,

waar-

waaruit $x^2 = \frac{m}{n} \cdot \frac{a'n(a^2 - r^2) - am(a'^2 - r'^2)}{an - a'm}$,

en dus $x = \frac{1}{n} \sqrt{\left\{ mn \times \frac{a'n(a^2 - r^2) - am(a'^2 - r'^2)}{an - a'm} \right\}}$,

zoodat $x' = \frac{1}{m} \sqrt{\left\{ mn \times \frac{a'n(a^2 - r^2) - am(a'^2 - r'^2)}{an - a'm} \right\}}$.

Hierdoor dan x of x' berekend hebbende, zal men uit C, met deze waarde als ſtraal, een' cirkelboog moeten beſchrijven, die dan het punt E of D zal doen kennen.

XCVIII. VOORSTEL.

Door S. Klijnsma.

Van een trapezium zijn de hoeken aan de bazis bekend, benevens de inhoud en de ſom der zijden; men vraagt, hoe, door middel van deze gegevens, de zijden van het trapezium kunnen worden berekend?

Opgelost *door* A. B. de Bock Jun., J. Jonkheet, S. Klijnsma en J. Bassan.

Oplossing *van* A. B. de Bock Jun.

Zij ABCD, *Fig.* 74, het trapezium, en ſtellen wij den inhoud gelijk a^2, de ſom der zijden s, en de hoeken D en C gelijk α en β. Indien wij dan de hoogte AE = BF = x ſtellen, zoo is

$$AD = \frac{x}{Sin.\,\alpha},\ DE = x\,Cot.\,\alpha,\ BC = \frac{x}{Sin.\,\beta},\ FC = x\,Cot.\,\beta.$$

De ſom dezer lijnen is alzoo

$$AD + DE + BC + FC = x\left\{\frac{1}{Sin.\,\alpha} + Cot.\,\alpha + \frac{1}{Sin.\,\beta} + Cot.\,\beta\right\},$$

en deze uitdrukking van den omtrek s aftrekkende, blijft er, voor het dubbel van AB,

$$2\,AB = s - x\left\{\frac{1}{Sin.\,\alpha} + Cot.\,\alpha + \frac{1}{Sin.\,\beta} + Cot.\,\beta\right\},$$

zoodat $AB = \tfrac{1}{2}s - \tfrac{1}{2}x\left\{\frac{1 + Cos.\,\alpha}{Sin.\,\alpha} + \frac{1 + Cos.\,\beta}{Sin.\,\beta}\right\}$.

Verder is DC = AB + DE + FC, en dit geeft ons

$$DC = \tfrac{1}{2}s - \tfrac{1}{2}x\left\{\frac{1 - Cos.\,\alpha}{Sin.\,\alpha} + \frac{1 - Cos.\,\beta}{Sin.\,\beta}\right\},$$

waardoor wij vinden

$$\tfrac{1}{2}(AB+DC)=\tfrac{1}{2}s-\tfrac{1}{2}x\left\{\frac{1}{Sin.\,\alpha}+\frac{1}{Sin.\,\beta}\right\};$$

deze uitdrukking met x vermenigvuldigende, verkrijgen wij den inhoud van het trapezium, en wij hebben alzoo

$$\tfrac{1}{2}x\left(s-x\,\frac{Sin.\,\alpha+Sin.\,\beta}{Sin.\,\alpha\;Sin.\,\beta}\right)=a^2,$$

of $\quad s\,x\,Sin.\,\alpha\,Sin.\,\beta-x^2(Sin.\,\alpha+Sin.\,\beta)=2\,a^2\,Sin.\,\alpha\,Sin.\,\beta,$

zoodat $\quad x^2-\dfrac{Sin.\,\alpha\,Sin.\,\beta}{Sin.\,\alpha+Sin.\,\beta}.sx+\dfrac{Sin.\,\alpha\,Sin.\,\beta}{Sin.\,\alpha+Sin.\,\beta}.2\,a^2=0;$

waaruit $\quad x=\tfrac{1}{2}.\dfrac{Sin.\,\alpha\,.\,Sin.\,\beta}{Sin.\,\alpha+Sin.\,\beta}\left\{s\pm\sqrt{\left(s^2-\dfrac{Sin.\,\alpha+Sin.\,\beta}{Sin.\,\alpha\,.\,Sin.\,\beta}\times 8a^2\right)}\right\},$

waardoor $\quad AD=\tfrac{1}{2}.\dfrac{Sin.\,\beta}{Sin.\,\alpha+Sin.\,\beta}\left\{s\pm\sqrt{\left(s^2-\dfrac{Sin.\,\alpha+Sin.\,\beta}{Sin.\,\alpha\,.\,Sin.\,\beta}.8a^2\right)}\right\},$

en $\quad BC=\tfrac{1}{2}\dfrac{Sin.\,\alpha}{Sin.\,\alpha+Sin.\,\beta}\left\{s\pm\sqrt{\left(s^2-\dfrac{Sin.\,\alpha+Sin.\,\beta}{Sin.\,\alpha\,.\,Sin.\,\beta}.8a^2\right)}\right\};$

terwijl wij hierdoor verder vinden

$$AB=\tfrac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{Sin.(\alpha+\beta)}{Sin\,\alpha+Sin\,\beta}\right)s\mp\left(1+\frac{Sin.(\alpha+\beta)}{Sin\,\alpha+Sin\,\beta}\right)\sqrt{\left(s^2-\frac{Sin\,\alpha+Sin\,\beta}{Sin.\,\alpha\,Sin.\,\beta}.8a^2\right)}\right\},$$

en

$$CD=\tfrac{1}{2}\left\{\left(1+\frac{Sin.(\alpha+\beta)}{Sin\,\alpha+Sin\,\beta}\right)s\mp\left(1-\frac{Sin.(\alpha+\beta)}{Sin\,\alpha+Sin\,\beta}\right)\sqrt{\left(s^2-\frac{Sin\,\alpha+Sin\,\beta}{Sin.\,\alpha\,Sin.\,\beta}.8a^2\right)}\right\};$$

welke twee laatste ook aldus kunnen worden geschreven

$$AB=\frac{Sin.\tfrac{1}{2}\alpha.Sin.\tfrac{1}{2}\beta}{Cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)}\left\{s\mp(Cot\tfrac{1}{2}\alpha Cot\tfrac{1}{2}\beta)\sqrt{\left(s^2-\frac{Sin\,\alpha+Sin\,\beta}{Sin\,\alpha\,.\,Sin\,\beta}.8a^2\right)}\right\},$$

en $\quad CD=\dfrac{Cos\tfrac{1}{2}\alpha.Cos\tfrac{1}{2}\beta}{Cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)}\left\{s\mp(Tang\tfrac{1}{2}\alpha Tang\tfrac{1}{2}\beta)\sqrt{\left(s^2-\dfrac{Sin\,\alpha+Sin\,\beta}{Sin.\,\alpha.\,Sin.\,\beta}.8a^2\right)}\right\}.$

XCIX. VOORSTEL.

Door S. KLIJNSMA.

Van een trapezium is gegeven de afstand der evenwijdige zijden, benevens eene dezer zijden en de aanliggende hoeken; men vraagt deszelfs inhoud te vinden?

OPGELOST *door* S. KLIJNSMA, J. B. VOLMER VAN BORN, A. B. DE BOCK JUN., J. BASSÁN, J. JONKHEER en H. B. JUNG.

OPLOSSING *van* S. KLIJNSMA.

Zij ABCD, *Fig.* 74, het trapezium, waarin gegeven is: AE = BF

= BF = h; CD = a en de hoeken D en C gelijk α en β; dan is DE = h Cot. α en CF = h Cot. β, waaruit, omdat AB = DC — (DE + CF) is, gevonden wordt

$$B = a - h\,(Cot.\,\alpha + Cot.\,\beta) = a - h.\frac{Sin.\,(\alpha+\beta)}{Sin.\,\alpha\,.\,Sin\,\beta},$$

en daar de inhoud van het trapezium gelijk $\frac{1}{2}$ AE (AB + DC) is, zoo vinden wij, voor den gevraagden inhoud,

$$I = \tfrac{1}{2}h\left(2a - h\,\frac{Sin.\,(\alpha+\beta)}{Sin.\,\alpha\,.\,Sin.\,\beta}\right).$$

AANMERKINGEN. 1°. Wij hebben in de figuur ondersteld, dat DC = a de grootste der twee evenwijdige zijden is; doch men behoeft voor het tegenovergestelde geval geene bijzondere formule te zoeken, daar dit grooter of kleiner zijn alleen van de waarden der gegevene hoeken α en β afhangt; zijnde het klaar, dat CD de grootste of kleinste der twee evenwijdige zijden zal wezen, naarmate $\alpha + \beta$ kleiner of grooter dan 180° is.

2°. Was DC benevens de hoeken A en B gegeven, dan wordt de oplossing hierdoor niet moeijelijker; want dan is α = 180° — A en β = 180° — B, dus $\alpha + \beta$ = 360° — (A + B), waardoor de formule voor den inhoud overgaat in

$$I = \tfrac{1}{2}h\left(2a + h\,\frac{Sin.\,(A+B)}{Sin.\,A\,.\,Sin.\,B}\right).$$

C. VOORSTEL.

Door S. KLIJNSMA.

Van een trapezium zijn de evenwijdige zijden, benevens de diagonalen, gegeven; men vraagt deszelfs overige zijden, benevens de hoeken te vinden?

OPGELOST *door* J. JONKHEERT, S. KLIJNSMA, J. B. VOLKER VAN BORN, A. B. DE BOCK JUN., M. B. JUNG en J. BASSAN.

OPLOSSING *van* J. JONKHEERT.

Stellen wij, *Fig.* 75, BC = a, AD = b, BD = c, en AC = c'. Trekken wij BE en CF loodregt op AD en stellen wij AE = x en FD = x', dan is DE = $b - x$ en AF = $b - x'$, en hierdoor vinden wij voor BE en CF deze waarden

$$BE^2 = c^2 - (b - x)^2 \text{ en } CF^2 = c'^2 - (b - x')^2,$$

en

en daar deze waarden aan elkander gelijk moeten zijn, zoo hebben wij

$$c^2 - (b - x)^2 = c'^2 - (b - x')^2 \quad \ldots\ldots (1);$$

terwijl wij, uit hoofde van AE + FD = AD — BC, nog hebben

$$x + x' = b - a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

zoodat wij uit deze twee vergelijkingen x en x' moeten bepalen.

De eerste vergelijking ontwikkelende, vinden wij

$$c^2 - b^2 + 2bx - x^2 = c'^2 - b^2 + 2bx' - x'^2,$$

of $$(x^2 - x'^2) - 2b(x - x') = c^2 - c'^2,$$

dus $$(x + x')(x - x') - 2b(x - x') = c^2 - c'^2,$$

en hierin voor $x + x'$ derzelver waarde $b - a$ schrijvende,

$$(b - a)(x - x') - 2b(x - x') = c^2 - c'^2,$$

dat is $$(a + b)(x - x') = c'^2 - c^2,$$

waaruit $$x - x' = \frac{c'^2 - c^2}{a + b},$$

en daar $$x + x' = b - a,$$

is, zoo hebben wij

$$x = \frac{1}{2}\left\{b - a + \frac{c'^2 - c^2}{b + a}\right\} \text{ en } x' = \frac{1}{2}\left\{(b - a) - \frac{c'^2 - c^2}{b + a}\right\},$$

of $$x = \frac{(b^2 - a^2) + (c'^2 - c^2)}{2(b + a)} \text{ en } x' = \frac{(b^2 - a^2) - (c'^2 - c^2)}{2(b + a)}.$$

Hieruit worden nu gemakkelijk de waarden van de zijden AB en CD gevonden; want voor de eerste hebben wij

$$AB^2 = AE^2 + BE^2 = x^2 + c^2 - (b - x)^2 = c^2 - b^2 + 2bx,$$

en schrijvende voor x de gevondene waarde

$$AB^2 = c^2 - b^2 + \frac{b(b^2 - a^2) + b(c'^2 - c^2)}{b + a},$$

of $$AB^2 = \frac{(a + b)(c^2 - b^2) + b(b^2 - a^2) + b(c'^2 - c^2)}{a + b},$$

welke uitdrukking gemakkelijk herleid wordt tot

$$AB^2 = \frac{ac^2 + bc'^2}{a + b} - ab,$$

zoodat $$AB = \sqrt{\left\{\frac{ac^2 + bc'^2}{a + b} - ab\right\}};$$

terwijl wij, op dezelfde wijze handelende, vinden

$$CD = \sqrt{\left\{\frac{ac'^2 + bc^2}{a + b} - ab\right\}}.$$

De

De hoeken van het trapezium worden nu mede gemakkelijk bepaald; want wij hebben

$$Cos.\ A = \frac{AE}{AB} = \frac{x}{AB} \text{ en } Cos.\ D = \frac{DF}{CD} = \frac{x'}{CD},$$

en hierin de gevondene waarden overbrengende,

$$Cos.\ A = \frac{(b^2 - a^2) + (c'^2 - c^2)}{2\sqrt{(a+b)(ac^2 + bc'^2 - ab(a+b))}},$$

en $$Cos.\ D = \frac{(b^2 - a^2) - (c'^2 - c^2)}{2\sqrt{(a+b)(ac'^2 + bc^2 - ab(a+b))}};$$

terwijl $Cos.\ B = -Cos.\ A$ en $Cos.\ C = -Cos.\ D$ is.

1. Aanmerking. Tellen wij de waarden van AB^2 en CD^2 bij elkander op, dan vinden wij

$$AB^2 + CD^2 = c^2 + c'^2 - 2ab,$$

of $$2ab = c^2 + c'^2 - (AB^2 + CD^2),$$

dat is, *in elk trapezium is het dubbel product van de twee evenwijdige zijden gelijk de som der vierkanten van de diagonalen, verminderd met de som der vierkanten van de zijden, welke niet evenwijdig loopen.*

2. Aanmerking. Daar $BE^2 = c^2 - (b - x)^2$ is, vindt men nog na herleiding

$$BE = \frac{\sqrt{\{(c+c')^2 - (a+b)^2\}\{(a+b)^2 - (c'-c)^2\}}}{2(a+b)},$$

en bijgevolg voor den inhoud van het trapezium

$$I = \tfrac{1}{4}\sqrt{\{(c+c')^2 - (a+b)^2\}\{(a+b)^2 - (c'-c)^2\}}.$$

CI. Voorstel.

Door U. Huguenin.

Wanneer men den omtrek eens cirkels, waarvan de straal gelijk r is, in n gelijke deelen verdeelt, en uit deze deelpunten lijnen trekt naar een punt, binnen of buiten den omtrek, dat op eenen afstand a van het middelpunt staat, dan zal de som der vierkanten van al de getrokkene lijnen gelijk zijn aan $n(r^2 + a^2)$. *Men vraagt deze stelling te betoogen?*

Opgelost door L. R. Schmidt, J. Bassan, L. J. Ulman, J. W. Martini en J. Jonkhert.

Oplossing van L. R. Schmidt.

De opgegevene stelling gaat niet alleen door, wanneer de n ge-

gegevene punten den omtrek in gelijke deelen verdeelen, maar heeft bovendien in zeer veel andere gevallen plaats. Hiervan kan men zich op de volgende wijze overtuigen.

Zij A, *Fig.* 76, het gegeven punt, en laten P, P_1, P_2, *enz.* tot P_{n-1}, n willekeurige punten in den omtrek zijn, waarvan de stralen MP, MP_1, MP_2, *enz.* met AM hoeken maken, die wij, altijd denzelfden weg omrekenende, door ϕ, ϕ_1, ϕ_2, *enz.* tot ϕ_{n-1} zullen voorstellen. Stellen wij nu de lijnen PA, P_1A, P_2A, *enz.* achtervolgens gelijk m, m_1, m_2, *enz.*, dan hebben wij, door de bekende eigenschap der driehoeken,

$$m^2 = a^2 + r^2 - 2ar\ Cos.\ \phi,$$
$$m_1^2 = a^2 + r^2 - 2ar\ Cos.\ \phi_1,$$
$$m_2^2 = a^2 + r^2 - 2ar\ Cos.\ \phi_2,$$
$$enz. \qquad enz.$$
$$m_{n-1}^2 = a^2 + r^2 - 2ar\ Cos.\ \phi_{n-1}\ (*)$$

stellen wij alzoo kortheidshalve

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 + enz. \ldots\ldots m_{n-1}^2 = \Sigma(m^2),$$

en $Cos.\phi + Cos.\phi_1 + Cos.\phi_2 + enz. \ldots + Cos.\phi_{n-1} = \Sigma(Cos.\phi)$

dan verkrijgen wij, door de som der gevondene vergelijkingen te nemen,

$$\Sigma(m^2) = n(a^2 + r^2) - 2ar\Sigma(Cos.\phi),$$

waaruit dan blijkt, dat de opgegevene stelling in al die gevallen plaats zal hebben, waarin

$$\Sigma(Cos.\ \phi) = 0,$$

is, omdat onze vergelijking alleen bij deze onderstelling kan overgaan in

$$\Sigma(m^2) = n(a^2 + r^2).$$

Wij

(*) Zoodra een der stralen, bij voorbeeld PM_3, beneden de lijn AM ligt, word de hoek ϕ_3 grooter dan twee regte hoeken. In dit geval heeft men eigenlijk $m_3^2 = a^2 + r^2 - 2ar\ Cos.$ AMP_3; maar omdat $AMP_3 = 360° - \phi_3$ is, zoo is $Cos.$ $AMP_3 = Cos.\ \phi_3$ en hieruit volgt dan toch

$$m_3^2 = a^2 + r^2 - 2ar\ Cos.\ \phi_3,$$

waaruit dan blijkt, dat de hier opgegevene vergelijkingen voor alle punten P in den omtrek doorgaan, indien men slechts behoorlijk op de teekens van $Cos.\ \phi$ acht geeft.

Wij leeren alzoo hieruit het volgende. *De som van de vierkanten der lijnen, welke uit een willekeurig aantal punten des omtreks van eenen cirkel tot eenig punt in het vlak van dien cirkel getrokken worden, zal gelijk zijn aan de som der vierkanten van den straal en den afstand van het aangenomen punt tot het middelpunt, vermenigvuldigd met het aantal der punten in den omtrek aangenomen, wel te verstaan, wanneer de som van de cosinussen der hoeken, welke de stralen der aangenomene punten, altijd denzelfden weg om rekenende, met de lijn maken, die het middelpunt met het gegeven punt vereenigt, gelijk nul is.*

Dat zulks nu plaats heeft in gevalle de aangenomene punten den omtrek in n gelijke deelen verdeelen, is zeer gemakkelijk te betoogen; want alsdan zijn de hoeken, die de stralen dezer punten achtervolgens met elkander maken, alle gelijk $\frac{2\pi}{n}$, en de achtervolgende hoeken ϕ zijn alzoo in dit geval ϕ, $\phi + \frac{2\pi}{n}$, $\phi + 2.\frac{2\pi}{n}$, *enz.* tot $\phi + (n-1).\frac{2\pi}{n}$, waardoor

$$\Sigma(Cos\phi) = Cos\phi + Cos(\phi + \frac{2\pi}{n}) + Cos(\phi + 2.\frac{2\pi}{n}) + enz. + Cos(\phi + (n-1)\frac{2\pi}{n});$$

daar wij nu in Voorstel LXXII vonden

$$Cos.\, x + Cos.\,(x+y) + Cos.\,(x+2y) + enz. \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + Cos.\,(x+(n-1)y) = \frac{Sin.\,\frac{1}{2}ny}{Sin.\,\frac{1}{2}y}\, Cos.\,(x+\tfrac{1}{2}(n-1)y),$$

zoo verkrijgen wij, door $x = \phi$ en $y = \frac{2\pi}{n}$ te stellen,

$$\Sigma(Cos.\phi) = \frac{Sin\ 180°}{Sin\ 90°}.Cos.(\phi + \frac{n-1}{n}\pi) = \frac{0}{1}.Cos.(\phi + \frac{n-1}{n}\pi) = 0,$$

waardoor dan de stelling, in de opgaaf vermeld, volkomen bewezen is.

AANMERKINGEN. Trekken wij door het middelpunt M eene lijn XY loodregt op de lijn AM, die het gegeven punt M met het middelpunt vereenigt, en stellen wij de loodlijnen, welke uit de punten P op XY vallen, achtervolgens gelijk p, p_1, p_2, *enz.*, dan hebben wij klaarblijkelijk $p = r\ Cos.\ \phi$, $p_1 = r\ Cos.\ \phi_1$, *enz.* en dus

$$\Sigma(p) = r\ \Sigma(Cos.\ \phi),$$

en hieruit volgt, dat $\Sigma (p) = 0$ zal zijn; wanneer $\Sigma (Cos. \phi) = 0$ is, en omgekeerd. *De opgegevene stelling zal alzoo in al die gevallen doorgaan, waarin de som der lijnen p gelijk nul is, dat is, waarin de som der loodlijnen, welke ter linkerzijde van* XY *gelegen zijn, gelijk is aan de som der loodlijnen, die ter regterzijde op* XY *vallen.*

Is eindelijk $\Sigma (p) = 0$, en stellen wij in al de punten P gelijke masfa's M geplaatst, dan is ook $M \times \Sigma (p) = 0$, of

$$Mp + Mp_1 + Mp_2 + enz. \ldots + Mp_{n-1} = 0,$$

dat is, dan is de som der momenten dezer gelijke masfa's ten opzigte van de as XY gelijk nul, en het gemeenschappelijk zwaartepunt van deze gelijke masfa's is alzoo in de as XY gelegen, waaruit dan nog volgt, dat de voorwaarde, welke er moet bestaan, opdat onze stelling voor eenige punten P in den omtrek zal doorgaan, deze is, *dat het zwaartepunt van gelijke masfa's, in deze punten geplaatst, in de lijn* XY *moet vallen, die door het middelpunt loodregt getrokken wordt op de lijn, welke het gegevene punt* A *met het middelpunt vereenigt.*

Het is uit dit alles klaar, dat wanneer het punt A, benevens een willekeurig aantal punten P, naar welgevallen in den omtrek genomen, gegeven is, men altijd nog een punt in den omtrek zal kunnen vinden, dat, met al de overige te zamen genomen, aan de vereischten van het vraagstuk voldoet, en dat dit zelfs zeer gemakkelijk zal zijn, omdat men dit punt slechts op zulk eenen afstand van XY zal moeten plaatsen, dat $\Sigma (p) = 0$ wordt; was alzoo voor de gegevene punten $\Sigma (p) = \pm b$, dan zou het gevraagde punt op eenen afstand $\mp b$ van XY moeten genomen worden. Men lette echter wel op, dat wanneer b grooter dan r mogt zijn, zulks niet mogelijk zou wezen; doch in zulk geval zal men twee of meer punten kunnen nemen, die met de gegevene aan onze stelling beantwoorden, zijnde dit alles zoo duidelijk in te zien, dat het niet noodig zal wezen, zulks nader te ontwikkelen.

Verkiest men de punten in den omtrek zoodanig te nemen, dat het zwaartepunt van gelijke masfa's, in deze punten geplaatst, juist in het middelpunt van den cirkel komt te vallen, dan moet men gelijktijdig hebben

$$\Sigma (Cos. \phi) = 0 \quad \text{en} \quad \Sigma (Sin. \phi) = 0,$$

zoo-

zoodat men alsdan, n punten in den omtrek begeerende, er $n-2$ naar welgevallen zal kunnen aannemen, daar men dan, ter bepaling van de twee overige, zal nederkomen op de vergelijkingen

$$Sin.\ \phi + Sin.\ \phi' = A \quad \text{en} \quad Cos.\ \phi + Cos.\ \phi' = B,$$

welke vergelijkingen onder andere op de volgende wijze kunnen worden opgelost. Brengende beide vergelijkingen in het vierkant, en nemende derzelver som, dan verkrijgt men $2 + 2\,Cos.\,(\phi' - \phi) = A^2 + B^2$, waardoor

$$Cos.\ (\phi' - \phi) = \tfrac{1}{2}\,(A^2 + B^2) - 1,$$

zoodat hierdoor $\phi' - \phi$ en dus ook $\frac{1}{2}(\phi' - \phi)$ bekend wordt. Schrijvende verder onze vergelijkingen onder den vorm

$$2\,Sin.\tfrac{1}{2}(\phi'+\phi)\,Cos.\tfrac{1}{2}(\phi'-\phi)=A,\ 2\,Cos.\tfrac{1}{2}(\phi'+\phi)\,Cos.\tfrac{1}{2}(\phi'-\phi)=B,$$

dan geeft derzelver quotient

$$Tang.\ \tfrac{1}{2}\,(\phi' + \phi) = \frac{A}{B},$$

zoodat hierdoor ook $\frac{1}{2}\,(\phi' + \phi)$ bekend wordt. Men ziet hieruit echter, dat $\frac{1}{2}\,(A^2 + B^2)$ niet grooter dan 2 mag zijn.

CII. VOORSTEL.

Door J. W. MARTINI.

Door een gegeven punt, in het oppervlak van eenen regten cirkelvormigen kegel, een plat vlak te brengen, loodregt op den asfen-driehoek, die door het gegevene punt gaat, en het kegelvlak volgens eene ellips van gegevenen inhoud doorsnijdt?

OPGELOST *door* A. B. DE BOCK JUN. en J. W. MARTINI.

OPLOSSING *van* A. B. DE BOCK JUN.

Laat ABC, *Fig.* 77, de asfen-driehoek zijn, die door het gegeven punt E van het oppervlak gaat, en zij EFDG het gevraagde elliptische vlak; indien wij dan AE $= c$, $\angle A = \beta$ en $\angle DEC = \phi$ stellen, dan is (I. R. SCHMIDT, *Beginselen der hoogere Meetkunst*, § 52) de halve groote as en de parameter van deze ellips

$$DH = a = \frac{c\,Sin.\,\beta}{2\,Sin.\,(\phi - \beta)} \quad \text{en} \quad p = 2\,c\,Sin\ \phi\,Tang.\tfrac{1}{2}\beta,$$

en dus (*Idem.* § 57) de halve kleine as

$$GH = b = \sqrt{\tfrac{1}{2}pa} = c\,\sqrt{\frac{Sin\ \phi\,Tang\ \tfrac{1}{2}\beta\,Sin.\,\beta}{2\,Sin.\,(\phi - \beta)}}.$$

Daar verder de inhoud van de ellips (L. R. SCHMIDT, *Diff. en Int. Rek.* § 269. 3e *voorb.*) gelijk is aan $ab\pi$, zoo hebben wij

$$Inh.\ DEFG = \frac{\pi c^2 Sin\,\beta}{2\ Sin.(\phi-\beta)} \sqrt{\frac{Sin.\phi\ Sin^2.\frac{1}{2}\beta}{Sin.(\phi-\beta)}},$$

en daar deze inhoud gelijk A gegeven is, zoo hebben wij de vergelijking

$$\frac{\pi c^2 Sin.\beta}{2\ Sin.(\phi-\beta)} \sqrt{\frac{Sin.\phi\ Sin^2.\frac{1}{2}\beta}{Sin.(\phi-\beta)}} = A,$$

of quadraterende en herleidende

$$\frac{Sin.\phi}{Sin^3.(\phi-\beta)} = \frac{4A^2}{\pi^2 c^4\ Sin^2.\beta\ Sin^2.\frac{1}{2}\beta} \quad . \ . \ . \ (a).$$

Ten einde tot de oplossing dezer vergelijking te geraken, schrijven wij dezelve aldus

$$\frac{1}{Sin^2.\phi}.\left\{\frac{Sin.\beta\ Sin.\phi}{Sin.(\phi-\beta)}\right\}^3 = \frac{8A^2\ Cot.\frac{1}{2}\beta}{\pi^2 c^4},$$

dat is
$$\frac{1+Cot^2.\phi}{(Cot.\beta-Cot.\phi)^3} = \frac{8A^2\ Cot.\frac{1}{2}\beta}{\pi^2 c^4},$$

of, kortheidshalve $\frac{\pi^2 c^4}{8A^2\ Cot.\frac{1}{2}\beta} = B$ stellende,

$$(Cot.\beta - Cot.\phi)^3 = B(1+Cot^2.\phi),$$

hetgeen ontwikkeld en herleid zijnde, geeft

$$Cot^3.\phi + (B-3\,Cot.\beta)Cot^2.\phi + 3\,Cot^2.\beta\ Cot.\phi + B - Cot^3.\beta = 0.$$

Uit welke vergelijking nu $Cot.\phi$ en dus ook ϕ bij benadering kan gevonden worden. Men lette hierbij echter op, dat de gevondene waarde van ϕ grooter dan β moet zijn, daar anders de kromme geene ellips zou wezen.

Men kan de waarde van ϕ ook bij benadering vinden, door het tweede lid van de vergelijking (a) kortheidshalve gelijk C te stellen, en dan aan beide zijden de logarithmen te nemen, als wanneer wij verkrijgen

$$Log.\ Sin.\phi - 3\,Log.\ Sin.(\phi-\beta) = Log.\ C,$$

welke, wanneer men de benadering ver wil voortzetten, in de meeste gevallen veel gemakkelijker te benaderen is, dan de eerstgevondene vergelijking.

CIII. VOORSTEL.

Door A. E. TROMP.

Gegeven zijnde een regt prisma, dat uit eene gelijkslachtige stof be-

bestaat, en eenen driehoek tot grondvlak heeft, dan vraagt men in het algemeen de standen aan te geven, waarin dit ligchaam op eene vloeistof zal drijven; hierbij onderstellende, dat de evenwijdige ribben van het ligchaam horizontaal en dus evenwijdig aan den waterspiegel loopen?

OPLOSSING. *Door* A. E. TROMP.

Het is uit de beginselen der waterweegkunst bekend, dat een ligchaam nimmer op eenige vloeistof drijvende in evenwigt kan zijn, indien niet de twee volgende eigenschappen plaats hebben.

Vooreerst *moet deszelfs gewigt even groot wezen, als dat van de vloeistof, door het ingedompelde deel verplaatst*, opdat er alzoo evenwigt zou bestaan tusschen de nederwaartswerkende zwaartekracht des ligchaams en het opwaartspersend vermogen van de vloeistof.

Ten andere, *moet de lijn, die door de zwaartepunten gaat, van het geheele ligchaam en van het ingedompelde deel, als gelijkslachtig beschouwd, vertikaal wezen;* want hierdoor alleen kan voorgekomen worden, dat bovengenoemde en in tegengestelde rigting werkende krachten het ligchaam eene draaijende beweging mededeelen.

De oplossing van het voorgestelde vraagstuk komt derhalve hierop neder, om van het prisma zodanige gedeelten af te snijden, dat aan de twee gemelde voorwaarden voldaan wordt; dat dit op vele verschillende wijze zal kunnen gebeuren, blijkt dadelijk, wanneer men onder het oog houdt, dat zulks niet alleen van de afmetingen van het ligchaam, alsmede van deszelfs soortelijk gewigt, maar ook van dat der vloeistof, waarop het drijft, zal afhangen.

Omdat wij het ligchaam, als overal van dezelfde digtheid, en bovendien de evenwijdige ribben horizontaal onderstellen (*), doet

(*) Ons vraagstuk is slechts een bijzonder geval van het algemeene, waarin men aanneemt, dat de ribben van het prisma eenen willekeurigen stand hebben, met betrekking tot het horizontale vlak. De oplossing wordt alsdan veel ingewikkelder, omdat het vinden van den inhoud, alsmede van het zwaartepunt des ingedompelden deels, alsdan veel lastiger wordt, en deze twee zaken maken toch het voornaamste gedeelte van

doet de hoogte van het prisma of de lengte der evenwijdige ribben niets tot de verschillende standen voor het drijvend evenwigt; gevolgelijk heeft dan ook de lengte van deze ribben geenen invloed op de oplossing van ons vraagstuk, en wij kunnen ons daarom tot het driehoekig grond- of bovenvlak alleen bepalen.

Laat dan ABC, *Fig.* 78, het grond- of bovenvlak van het gegeven prisma zijn, en zij YZ de oppervlakte der vloeistof; er kunnen alsdan, de evenwijdige ribben altijd horizontaal onderstellende, slechts twee voorname of hoofdgevallen bestaan; te weten: het is mogelijk, dat er een of dat er twee hoekpunten van den driehoek zijn ingedompeld. (*) Wij zullen met het eerste geval als het eenvoudigste beginnen, omdat in hetzelve een driehoek, en in het laatste geval een vierhoek onder water komt.

1°. *Geval.* Zoo als het in de figuur is voorgesteld, is de driehoek DCE het gedeelte van het vlak, dat in de vloeistof gedompeld is. Indien wij nu de zijden van dezen driehoek, dat is de lijnen CD en CE, kunnen bepalen, en in bekende functiën van de gegevene afmetingen des ligchaams en de soortelijke gewigten van dit ligchaam en van de vloeistof kunnen uitdrukken, dan zullen ook de standen bepaald zijn, en het aantal derzelve zal afhangen van de bestaanbare wortels der eindvergelijking, waartoe de oplossing van het vraagstuk voert. Wij stellen dan, ter bereiking van dit oogmerk, DC $= x$, EC $= y$, AC $= b$, BC $= a$ en AB $= c$. Wij noemen verder g en g' de soortelijke gewigten van het ligchaam en de vloeistof, alsmede γ het gewigt van eene cubieke eenheid zuiver gedistilleerd water, waarvan het soortelijk gewigt 1 is, en dan zal, zoo als wij reeds hebben opgemerkt, g' grooter dan g moeten zijn.

Dee-

van de oplossing uit. Het is ook om deze reden, dat, zelfs in het bijzonder geval, hetwelk wij ons ter beschouwing voorstellen, de oplossing zeer lastig zou worden, wanneer het grondvlak van het prisma meer zijden had of minder regelmatig was.

(*) Het geval, waarin de drie hoekpunten ingedompeld zijn, komt natuurlijk niet in aanmerking, omdat alsdan het ligchaam niet meer op de vloeistof drijft. Ons vraagstuk vordert dan ook, dat het soortelijk gewigt van de vloeistof grooter moet zijn dan dat van het ligchaam.

Deelen wij de zijden AB en DE der driehoeken ABC en DCE in F en G midden door en trekken wij FC en GC; wanneer wij dan FI = ⅓ FC en GH = ⅓ GC nemen, zijn I en H de zwaartepunten van den geheelen en den ingedompelden driehoek. Laat ons aannemen, dat de hoeken ACF en BCF bekend zijn en door α en β voorgesteld worden.

De lijn HI, die de zwaartepunten H en I vereenigt, moet, wanneer het ligchaam drijvend in evenwigt zal zijn, loodregt op DE staan; en omgekeerd, zoo dit plaats heeft en bovendien de door den driehoek DCE verplaatste hoeveelheid vloeistof, evenveel weegt als het gewigt van den geheelen driehoek ACB, zal er evenwigt bestaan. Het is op deze, uit de twee hoofdeigenschappen der drijvende ligchamen afgeleide waarheid, dat ons onderzoek moet gegrond wezen, en dezelve zal ons dus den weg aanwijzen, dien wij moeten inslaan, om tot de eigenlijke oplossing te geraken en de algemeene standsbepaling te beoordeelen.

Wanneer men de punten F en G vereenigt, dan is FG evenwijdig met HI, omdat, volgens de constructie der zwaartepunten, FI = ⅓ FC en GH = ⅓ GC is. Het is dus voldoende, indien wij kunnen aantoonen, wat er zal moeten plaats hebben, opdat GF loodregt op DE zal staan. Onderstellen wij dan, dat dit wezenlijk plaats heeft, en zien wij welke bijzonderheid of eigenschap hieruit voortvloeit, die ons van nut kan wezen.

Omdat DG = GE is en GF = GF, zoo zal ook, DF en FE trekkende, en in de onderstelling, dat FG loodregt op DE staat, DF = FE moeten zijn. Wanneer derhalve omgekeerd DF = FE is, zal FG en dus ook HI loodregt op DE staan.

In de driehoeken DCF en FCE is nu

$$DF^2 = DC^2 + CF^2 - 2\,DC \times CF \times Cos.\ DCF,$$

en

$$FE^2 = FC^2 + CE^2 - 2\,CF \times CE \times Cos.\ FCE,$$

en in deze vergelijkingen de gestelde of aangenomene waarden der lijnen en hoeken overbrengende,

$$DF^2 = x^2 + CF^2 - 2x\ Cos.\ \alpha \times FC,$$

en

$$FE^2 = y^2 + CF^2 - 2y\ Cos.\ \beta \times FC.$$

Om aan het gevraagde te voldoen, wordt dus, ingevolge het boven gezegde, vereischt, dat men hebbe

$$x^2 + CF^2 - 2x\ Cos.\ \alpha \times FC = y^2 + CF^2 - 2y\ Cos.\ \beta \times FC \ldots (1).$$

Dit

Dit is echter nog niet genoeg, om het ligchaam in rust te doen blijven, want hiertoe wordt, uit hoofde van de gelijkheid in gewigt der driehoeken ABC en DEC, die de soortelijke gewigten g en g' hebben, nog gevorderd, dat men hebbe

$$\textit{drieh.}\ ABC \times gy = \textit{drieh.}\ DEC \times g'y \ldots (2),$$

en wij zijn dus nu tot twee vergelijkingen gekomen, waaruit de onbekenden x en y moeten worden bepaald.

De vergelijking (1) herleidende, en in (2) voor de driehoeken ABC en EDC derzelver waarden $\frac{1}{2} ab\ Sin.\ ACB$ en $\frac{1}{2} xy\ Sin.\ ACB$ schrijvende, verkrijgen wij gemakkelijk

$$x^2 - y^2 = 2CF \times (x\ Cos.\ \alpha - y\ Cos.\ \beta) \ldots (3)$$

en

$$g'.xy = g.ab \ldots (4).$$

Door de bekende eigenschap, dat, $AF = FB$ zijnde, $CF^2 + AF^2 = \frac{1}{2} AC^2 + \frac{1}{2} BC^2$ en dus $CF^2 = \frac{1}{2}(a^2+b^2) - \frac{1}{4}c^2$ is, gaat (3) over in

$$x^2 - y^2 = (x\ Cos.\ \alpha - y\ Cos.\ \beta)\sqrt{\{2(a^2+b^2)-c^2\}} \ldots (I)$$

terwijl wij uit (4) vinden

$$x = \frac{g}{g'} \times \frac{ab}{y} \ldots (II)$$

en deze waarde van x in (I) overbrengende, komt er

$$\left(\frac{g}{g'}\right)^2 \times \frac{a^2b^2}{y^2} - y^2 = \left\{\frac{g}{g'} . \frac{ab}{y} Cos.\ \alpha - y\ Cos.\ \beta\right\}\sqrt{\{2(a^2+b^2)-c^2\}},$$

waaruit wij, na behoorlijke herleiding, vinden

$$y^4 - Cos.\ \beta\sqrt{(2a^2+2b^2-c^2)}.y^3 + \frac{g}{g'} ab\ Cos.\ \alpha\sqrt{(2a^2+2b^2-c^2)}.y$$
$$- \left(\frac{g}{g'}\right)^2 a^2b^2 = 0 \ldots (A)$$

en hieruit y gevonden zijnde, heeft men verder

$$x = \frac{g}{g'} .ab. \frac{1}{y} \ldots (B).$$

Wij zullen nu het tweede hoofdgeval onderzoeken, hetwelk met weinig moeite uit het eerste wordt afgeleid.

2°. *Geval*. Daar de zwaartepunten der figuren ACB, DCE en ADEF noodzakelijk in dezelfde regte lijn moeten liggen, zal de lijn, die door de zwaartepunten van ACB en ADEF gaat, loodregt op DE staan, zoodra IH of FG loodregt op DE is, en wij zullen alzoo in dit tweede geval nog moeten hebben

$$x^2 - y^2 = (x\ Cos.\ \alpha - y\ Cos.\ \beta)\sqrt{(2a^2+2b^2-c^2)} \ldots (I)'.$$

De

De vergelijking (II) ondergaat echter eenige verandering, want voor het geval, dat wij thans beschouwen, moeten wij hebben

$$driekh.\ ABC \times g\,y = vierh.\ ADEB \times g'y,$$

of $$driekh.\ ABC \times g\,y = (driekh.\ ABC - driekh.\ DEC)\,g'y,$$

dat is $$driekh.\ ABC \times (g' - g) = driekh.\ DEC \times g',$$

of wel $$ab\,(g' - g) = xy \times g',$$

dat is $$x = \frac{g' - g}{g'} \cdot \frac{ab}{y} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (II)'.$$

Het is opmerkelijk, dat deze waarde van x uit die van (II) afgeleid wordt, door het soortelijk gewigt van het ligchaam in het verschil tusschen de soortelijke gewigten van de vloeistof en het ligchaam te veranderen. Daar nu de vergelijking (I) volkomen onveranderd gebleven en bovendien onafhankelijk van de soortelijke gewigten is, zoo geeft deze opmerking ons terstond de volgende eindvergelijkingen

$$y^4 - Cos.\beta\sqrt{(2a^2+2b^2-c^2)}\,y^3 + \frac{g'-g}{g'}\,abCos.\alpha\sqrt{(2a^2+2b^2-c^2)}\,y \ldots$$

$$\ldots \ldots - \left(\frac{g'-g}{g'}\right)^2 a^2b^2 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (A)'$$

en $$x = \frac{g'-g}{g'} . ab . \frac{1}{y} \quad \ldots \ldots \quad (B)'.$$

Aanmerkingen. 1°. Beide de gevondene vergelijkingen (A) en (A') zijn van den vierden graad en kunnen dus vier bestaanbare wortels hebben. Welk teeken nu *Cos.* β en *Cos.* α mogen hebben, is het gemakkelijk in te zien, dat er, uit hoofde van het negatieve teeken, hetwelk voor den laatsten term staat, altijd ten minste twee achtervolgende termen van deze vergelijking hetzelfde teeken zullen hebben, en dat alzoo, ingevalle de wortels alle bestaanbaar zijn, deze vergelijkingen ten minste eenen negatieven wortel zullen hebben. Daar echter de negatieve wortels hier niet in aanmerking kunnen komen, blijkt hieruit, dat voor elk bijzonder geval nooit meer dan drie bruikbare wortels kunnen plaats vinden, en omdat dit zelfde doorgaat voor elk verschillend hoekpunt van het grondvlak, zullen er, bij de ondersteelde horizontale ligging der evenwijdige ribben, nimmer meer dan 18 verschillende standen plaats kunnen hebben, waarin het ligchaam in de vloeistof drijvende in evenwigt zal zijn.

2°. Men

2°. Men merke nog op, dat al de positieve wortels der vergelijkingen (A) en (A)' niet eens in aanmerking kunnen komen; want ons kunnen alleen die dienen, welke kleiner dan a zijn, en die tevens x kleiner dan b maken; door welke opmerking het aantal bruikbare antwoorden in de meeste gevallen zeer beperkt wordt.

3°. Neemt men het soortelijk gewigt der vloeistof als eenheid aan, dan is $g' = 1$, en de vergelijkingen veranderen, $\sqrt{(2a^2 + 2b^2 - c^2)} = d$ stellende, in de volgende

1°. Geval. $\begin{cases} y^4 - d\,Cos.\beta\, y^3 + g\,d\,ab\,Cos.\alpha\, y - (g\,ab)^2 = 0, \\ x = g \cdot \dfrac{ab}{y}. \end{cases}$

2°. Geval. $\begin{cases} y^4 - d\,Cos.\beta\, y^3 + (1-g)\,d\,ab\,Cos.\alpha\, y - (1-g)^2\, a^2b^2 = 0, \\ x = (1-g)\, \dfrac{ab}{y}. \end{cases}$

4°. Is de driehoek gelijkbeenig, dan is $a = b$ en $\alpha = \beta$, verder is alsdan $\frac{1}{2}c = a\,Sin.\alpha$ en dus $d = \sqrt{(4a^2 - c^2)} = 2a\,Cos.\alpha$, waardoor wij vinden

1°. Geval. $\begin{cases} y^4 - 2a\,Cos^2.\alpha\, y^3 + \dfrac{g}{g'}\, 2a^3\,Cos^2\alpha\, y - \dfrac{g^2}{g'^2}\, a^4 = 0, \\ x = \dfrac{g}{g'} \cdot \dfrac{a^2}{y}. \end{cases}$

2°. Geval. $\begin{cases} y^4 - 2a\,Cos^2.\alpha\, y^3 + \dfrac{g'-g}{g'} \cdot 2a^3\,Cos^2\alpha\, y - \left(\dfrac{g'-g}{g'}\right)^2 a^4 = 0, \\ x = \dfrac{g'-g}{g'} \cdot \dfrac{a^2}{y}. \end{cases}$

5°. Is eindelijk de driehoek gelijkzijdig, dan moeten wij in de formulen van het voorgaande geval $\alpha = 30$ en dus $Cos^2.\alpha = \frac{3}{4}$ stellen, waardoor wij verkrijgen

1°. Geval. $\begin{cases} y^4 - \frac{3}{2}\, a y^3 + \frac{3}{2}\, a^3 \cdot \dfrac{g}{g'}\, y - \dfrac{g^2}{g'^2} a^4 = 0 \;\ldots\; (A) \\ x = \dfrac{g}{g'} \cdot \dfrac{a^2}{y}. \end{cases}$

2°. Geval. $\begin{cases} y^4 - \frac{3}{2}\, a y^3 + \frac{3}{2}\, a^3 \cdot \dfrac{g'-g}{g'}\, y - \left(\dfrac{g'-g}{g'}\right)^2 a^4 = 0 \ldots (B) \\ x = \dfrac{g'-g}{g'} \cdot \dfrac{a^2}{y}. \end{cases}$

6°. Wan-

6°. Wanneer men voor eenen willekeurigen driehoek al de ſtanden van drijvend evenwigt dadelijk wilde bepalen, en de verſchillende waarden opgeven, welke de afmetingen van het vlak en de ſoortelijke gewigten behooren te hebben, opdat al deze ſtanden kunnen plaats hebben, dan zou men genoodzaakt zijn, om de vergelijkingen van den vierden graad (A) en (A)′ door de genoegzaam bekende regels van BUDAN of anderen op te losſen, en derzelver wortels te bepalen; terwijl dan de poſitieve beſtaanbare wortels dit aantal ſtanden zouden doen kennen. Daar verder de algemeene oplosſing der vergelijkingen van den vierden graad, tot die van den derden graad terug gebragt, volgens de leerwijze van CARDANUS moet worden behandeld, om de beſtaanbare gevallen van de onbeſtaanbare gevallen te onderſcheiden, en alzoo de betrekkingen te bepalen, welke er tusſchen de gegevens moeten beſtaan, om al de mogelijke ſtanden te verkrijgen, zullen wij, uit hoofde van de langwijligheid der berekeningen, die hiermede verknocht zijn, hierin niet dieper treden.

Ten einde echter een voorbeeld te geven, kiezen wij hiertoe het geval, waarin de driehoek gelijkzijdig is. Door de meerdere eenvoudigheid der formule zou de oplosſing, volgens het bovengezegde te werk gaande, hier reeds veel gemakkelijker dan voor het algemeene geval worden; dan een kunstgreep bekort dezelve in ons geval nog aanmerkelijk. De gebruikelijke handelwijze tot het vinden der tweede magtsfactors van eene hoogere magtsvergelijking, doet ons namelijk ontwaren, dat het eerſte lid der vergelijkingen (A) en (B), in de voorgaande aanmerking opgegeven, kan ontbonden worden in de factoren

$$\left(y^2-\frac{g}{g'}a^2\right)\left(y^2-\frac{3}{2}ay+\frac{g}{g'}a^2\right)=0 \quad \ldots\ldots \quad (A),$$

en

$$\left(y^2-\frac{g'-g}{g'}a^2\right)\left(y^2-\frac{3}{2}ay+\frac{g'-g}{g}a^2\right)=0 \quad . \quad (B)$$

zoodat wij dan nu, in elk dezer gevallen, de waarden van y door middel der oplosſing van twee vierkantsvergelijkingen vinden. Volgens de gewone regels verkrijgen wij alzoo

voor

voor het 1e Geval $\left\{\begin{array}{l} y=\pm a\sqrt{\frac{g}{g'}} \\ y=\frac{1}{4}a\left\{3\pm\sqrt{(9-16\frac{g}{g'})}\right\}, \end{array}\right.$

voor het 2e Geval $\left\{\begin{array}{l} y=\pm a\sqrt{\frac{g'-g}{g'}} \\ y=\frac{1}{4}a\left\{3\pm\sqrt{(9-16\frac{g'-g}{g'})}\right\}, \end{array}\right.$

doch daar, volgens den aard van het vraagſtuk, de negatieve wortels van zelve vervallen, zoo behouden wij alleen

1e Geval $\left\{\begin{array}{l} y=a\sqrt{\frac{g}{g'}} \\ y'=\frac{1}{4}a\left\{3+\sqrt{(9-16\frac{g}{g'})}\right\} \\ y''=\frac{1}{4}a\left\{3-\sqrt{(9-16\frac{g}{g'})}\right\}. \end{array}\right.$

2e Geval $\left\{\begin{array}{l} y'=a\sqrt{\frac{g'-g}{g'}} \\ y''=\frac{1}{4}a\left\{3+\sqrt{(9-16\frac{g'-g}{g'})}\right\}=\frac{1}{4}a\left\{3+\sqrt{(16\frac{g}{g'}-7)}\right\} \\ y'''=\frac{1}{4}a\left\{3-\sqrt{(9-16\frac{g'-g}{g'})}\right\}=\frac{1}{4}a\left\{3-\sqrt{(16\frac{g}{g'}-7)}\right\}. \end{array}\right.$

De beſchouwing der wortels van het eerſte geval doet ons beſpeuren, dat, welke ook de verhouding der ſoortelijke gewigten is, er altijd een bruikbare zal beſtaan, namelijk $y=a\sqrt{\frac{g}{g'}}$, waarmede overeenkomt $x=a\sqrt{\frac{g}{g'}}=y$, welke, omdat $g<g'$ is onderſteld, maar behooren kleiner dan a zijn.

Vermits $\frac{g}{g'}$ eene breuk en dus $\sqrt{(9-16\frac{g}{g'})}$ kleiner dan 3 is, zullen de overige waarden van y poſitief zijn, wel te verſtaan wanneer $\sqrt{(9-16\frac{g}{g'})}$ beſtaanbaar is, waartoe vereischt wordt,

dat

dat $9 > 16\frac{g}{g'}$ of $\frac{g}{g'} < \frac{9}{16}$ is. Deze voorwaarde vervuld zijnde, zijn de overeenkomstige waarden van x de volgende:

$$x' = \frac{g}{g'} \frac{4a}{3+\sqrt{(9-\frac{16g}{g'})}} = \frac{1}{4}a\left\{3-\sqrt{(9-16\frac{g}{g'})}\right\},$$

en $$x'' = \frac{g}{g'} \frac{4a}{3-\sqrt{(9-\frac{16g}{g'})}} = \frac{1}{4}a\left\{3+\sqrt{(9-16\frac{g}{g'})}\right\},$$

zoodat deze waarden van x met die van y alleen verwisseld zijn; want wij hebben $x' = y''$ en $x'' = y'$, hetgeen ook uit den aard der zaak gemakkelijk was op te maken.

Zullen deze waarden bruikbaar wezen, dan moet de grootste bovendien kleiner dan a zijn, en dit geeft ons $\frac{1}{4}\left\{3+\sqrt{(9-16\frac{g}{g'})}\right\} < 1$ of $\sqrt{(9-16\frac{g}{g'})} < 1$, dat is $9-16\frac{g}{g'} < 1$, waaruit volgt $\frac{g}{g'} > \frac{1}{2}$; en daar wij boven vonden $\frac{g}{g'} < \frac{9}{16}$, zoo volgt hieruit, dat deze twee antwoorden geen plaats kunnen hebben, ten zij $\frac{g}{g'}$ tusschen de grenzen $\frac{8}{16}$ en $\frac{9}{16}$ genomen worde. Voor de kleinste limiet is $x' = y'' = \frac{1}{2}a$ en $x'' = y' = a$, en voor de grootste limiet is $x' = y'' = x'' = y' = \frac{3}{4}a$, zoodat dit geval met het eerste antwoord overeenkomt.

Voor het tweede geval is het eerste antwoord eveneens altijd mogelijk, omdat $g' > g$ en dus $\frac{g'-g}{g'}$ altijd kleiner dan de eenheid is. Tot dezen wortel behoort verder $x = a\sqrt{\frac{g'-g}{g'}}$, en dus is ook in dit geval $x = y$.

De twee overige zijn alleen bestaanbaar wanneer $16\frac{g}{g'} > 7$ of $\frac{g}{g'} > \frac{7}{16}$ is, en de twee waarden van y, die hieruit ontstaan, zijn

 bei-

beide positief. De waarden van x, welke hiermede overeenstemmen, zijn

$$x' = \frac{g'-g}{g'} \cdot \frac{4a}{3+\sqrt{(16\frac{g}{g'}-7)}} = \tfrac{1}{4}a\left\{3-\sqrt{(\frac{16g}{g'}-7)}\right\},$$

en $$x'' = \frac{g'-g}{g'} \cdot \frac{4a}{3-\sqrt{(16\frac{g}{g'}-7)}} = \tfrac{1}{4}a\left\{3+\sqrt{(\frac{16g}{g'}-7)}\right\},$$

zoodat wederom $x' = y''$ en $x'' = y'$ is.

Daar de grootste der twee gevondene waarden kleiner dan a moet zijn, hebben wij $\frac{1}{4}\left\{3+\sqrt{(16\frac{g}{g'}-7)}\right\} < 1$, waaruit volgt $\frac{g}{g'} < \frac{1}{2}$, en bij gevolg zal, ten einde deze twee laatste antwoorden mogelijk te maken, $\frac{g}{g'}$ moeten genomen worden tusschen de grenzen $\frac{7}{16}$ en $\frac{8}{16}$.

Daar dan in het eerste geval het tweede en derde antwoord geen plaats kan hebben, ten zij $\frac{g}{g'}$ tusschen $\frac{8}{16}$ en $\frac{9}{16}$ genomen worde, en in het tweede geval tot het bestaan van dit tweede en derde antwoord wordt gevorderd, dat $\frac{g}{g'}$ tusschen $\frac{7}{16}$ en $\frac{8}{16}$ ligt, zoo volgt hieruit, dat wanneer het prisma een gelijkzijdigen driehoek tot grondvlak heeft, de betrekking der soortelijke gewigten van het prisma en de vloeistof nooit zoodanig kan worden genomen, dat alle mogelijke antwoorden bruikbaar worden, daar het klaar is, dat $\frac{g}{g'}$ tusschen $\frac{7}{16}$ en $\frac{8}{16}$ nemende, deze betrekking niet gelijktijdig tusschen $\frac{8}{16}$ en $\frac{9}{16}$ kan vallen, en omgekeerd.

Deze twee gevallen komen echter met elkander in aanraking, wanneer $\frac{g}{g'} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$ genomen wordt, en in dit geval bestaan er, ingevolge het vroeger gezegde, zes standen, waarin het prisma in evenwigt op de vloeistof kan liggen, welke echter drie aan drie volkomen met elkander overeenstemmen. De afscheiding

van

van het ingedompelde gedeelte en het uitstekende deel zal, namelijk, in dit geval plaats kunnen hebben, volgens eene der zes lijnen DE, D′E′, D″E″, AA′, BB′ of CC′, *Fig.* 79, zijnde CC′ loodregt op AB, en zoo voor de overige, terwijl $CD = CE = \frac{1}{4} CA \sqrt{2}$ is, en zoo ook met AD′, AE′, *enz.*

CIV. Voorstel.

Door A. E. Tromp.

Onderstel dat een regthoekig parallelopipedum, dat in al deszelfs deelen gelijkslachtig is, zoodanig op eene vloeistof drijft, dat twee der zijvlakken verticaal zijn, en dat zich twee of zes der hoekpunten in de vloeistof bevinden, terwijl de overige buiten dezelve uitsteken, dan vraagt men de standen te bepalen, in welken deze balk drijvende in evenwigt kan zijn?

Oplossing *van* A. E. Tromp.

Omdat twee der zijvlakken verticaal staan, loopen vier der ribben evenwijdig met het oppervlak van de vloeistof, zoodat wij het ligchaam ook hier als een prisma kunnen beschouwen, waarvan de evenwijdige ribben horizontaal loopen. Wij kunnen ons alzoo de aanmerkingen van het voorgaande vraagstuk ten nutte maken, ten gevolge van welke wij alleen dit verticale boven- of grondvlak hebben in aanmerking te nemen, en de lengte geheel buiten rekening kunnen laten.

In het eerste der twee voorgestelde gevallen is het ingedompelde deel van dezen regthoek een *driehoek*, en in het tweede geval is hetzelve een *vijfhoek*. Wij zullen met het minst zamengestelde geval beginnen, en dus in de eerste plaats de standen trachten te bepalen, ingevalle het ingedompelde deel een driehoek is. (*)

1°. *Geval.* Laat ABCD, *Fig.* 80, het grond- of bovenvlak van het gegeven parallelopipedum, en YZ de spiegel van de vloeistof zijn. Wij stellen de lengte der lijnen EB en BF, welke wij zoeken, gelijk x en y, en noemen de zijden AB en BC van den regthoek b en a.

Het

(*) Zie over het geval, waarin vier der hoekpunten ingedompeld zijn, Voorstel LXXVII van dit Deel.

Het doorsnijdingspunt G der lijnen MO en NP, uit het midden M en N der zijden AB en BC loodregt op dezelve getrokken, is het zwaartepunt van den regthoek. Het zwaartepunt van den ingedompelden driehoek EBF wordt gevonden, door uit B tot het midden van EF de lijn BH te trekken, en verder $BK = \frac{2}{3} BH$ te nemen, zijnde alsdan K het begeerde zwaartepunt. De punten G en K vereenigende, zal er alzoo, volgens het gezegde in het voorgaande vraagstuk, tot het drijvend evenwigt vooreerst gevorderd worden, dat KG de lijn YZ of EF loodregt doorsnijdt, en de hoeken ELG en GLF zullen bij gevolg regt moeten wezen.

Heeft dit plaats, dan moet, EG en GF trekkende,

$$GE^2 = EL^2 + LG^2 \text{ en } GF^2 = LF^2 + LG^2$$

zijn. Deze vergelijkingen van elkander aftrekkende, verkrijgt men $EG^2 - GF^2 = EL^2 - LF^2 = (EL + LF)(EL - LF) = EF(EL - LF)$, maar $EL = EH + HL$ en $LF = HF - HL = EH - HL$ zijnde, is $EL - LF = 2\,HL$, zoodat

$$GE^2 - GF^2 = 2\,EF \times HL.$$

Trekkende nu BI loodregt op EF, dan is, omdat $HK = \frac{1}{3} HB$ is, ook $HL = \frac{1}{3} HI = \frac{1}{3}\sqrt{(HB^2 - BI^2)}$, zoodat

$$GE^2 - GF^2 = \tfrac{2}{3} EF \sqrt{(HB^2 - BI^2)} \quad . \quad . \quad . \quad (A).$$

Nu is uit de figuur ten duidelijkste

$$GE^2 = EM^2 + MG^2 = (x - \tfrac{1}{2}b)^2 + \tfrac{1}{4}a^2,$$

en $$FG^2 = NF^2 + GN^2 = (\tfrac{1}{2}a - y)^2 + \tfrac{1}{4}b^2.$$

Daar verder EBF een regthoekige driehoek is, zoo hebben wij

$$EF = \sqrt{(x^2 + y^2)},$$

en $$BH = EH = HF = \tfrac{1}{2}\sqrt{(x^2 + y^2)}.$$

Omdat eindelijk BI loodregt op EF getrokken is, zoo is

$$BI = \frac{EB \times BF}{EF} = \frac{xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)}},$$

en wanneer wij deze gevondene waarden in (A) overbrengen, komt er

$$(x - \tfrac{1}{2}b)^2 - (\tfrac{1}{2}a - y)^2 + \tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}b^2 = \tfrac{2}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)} \times \sqrt{\left\{\tfrac{1}{4}(x^2 + y^2) - \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}\right\}}$$

of $$x^2 - bx - y^2 + ay = \tfrac{2}{3}\sqrt{\left\{\tfrac{1}{4}(x^2 + y^2)^2 - x^2 y^2\right\}},$$

dat is $$x^2 - bx - y^2 + ay = \tfrac{1}{3}\sqrt{\left\{x^4 - 2x^2 y^2 + y^4\right\}},$$

dus

dus $x^2 - bx - y^2 + ay = \frac{1}{3}(x^2 - y^2)$,

zoodat wij tot eerste vergelijking verkrijgen

$$\tfrac{2}{3}x^2 - \tfrac{2}{3}y^2 - bx + ay = 0 \quad \ldots\ldots \quad (I).$$

Stellen wij verder de soortelijke gewigten van het ligchaam en de vloeistof g en g', waarbij g' wederom grooter dan g moet zijn, dan is het gewigt van den regthoek $AB \times BC \times g\gamma$, en dat van den ingedompelden driehoek $\frac{1}{2}EB \times BF \times g'\gamma$, zoodat de tweede vergelijking voor het evenwigt wordt

$$\tfrac{1}{2}xy.g' = abg,$$

of

$$x = \frac{g}{g'} \times \frac{2ab}{y} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (II).$$

Brengen wij dus deze waarde van x in de vergelijking (I) over, zoo verkrijgen wij, ter bepaling van y,

$$\tfrac{2}{3}\left(\frac{g}{g'}\right)^2 \times \frac{4a^2b^2}{y^2} - \frac{g}{g'} \times \frac{2ab^2}{y} - \tfrac{2}{3}y^2 + ay = 0,$$

of met $\frac{3}{2}y^2$ vermenigvuldigende, en alles naar de magten van y rangschikkende,

$$y^4 - \tfrac{3}{2}ay^3 + 3 . \frac{g}{g'}ab^2y - \left(\frac{g}{g'}\right)^2 . 4a^2b^2 = 0 \quad \ldots \quad (A),$$

en hieruit y gevonden hebbende, is

$$x = \frac{g}{g'} \times \frac{2ab}{y} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (B).$$

2e. Geval. Op dezelfde wijze redenerende als voor het tweede geval van het voorgaande vraagstuk, zal men zeer gemakkelijk voor ons tegenwoordig geval, waarin het ingedompelde deel een vijfhoek is, de volgende vergelijkingen ter bepaling van x en y vinden, welke nu de gedeelten BE en BF voorstellen van de ribben, die boven de vloeistof uitsteken.

$$y^4 - \tfrac{3}{2}ay^3 + 3\frac{g'-g}{g'}ab^2y - \left(\frac{g'-g}{g'}\right)^2 . 4a^2b^2 = 0 \quad . \quad (A')$$

en

$$x = \frac{g'-g}{g'} \times \frac{2ab}{y} \text{ (*)} \quad \ldots\ldots \quad (B').$$

Men

(*) De hier gevondene eindvergelijkingen stemmen, voor zoo verre dit de aard der zaak toelaat, volkomen overeen met die, waartoe de verdienstelijke Wiskunstenaar J. Floryn, door eene, van onze oplossing

Men lette wederom op, dat alleen de positieve wortels der vergelijkingen (A) en (A)′ tot bruikbare antwoorden kunnen voeren, dat dezelve bovendien kleiner moeten zijn dan a, en x kleiner moeten maken dan b.

1e. GEVOLG. Onderstellen wij het soortelijk gewigt der vloeistof gelijk 1, dan verkrijgen wij

1e. *Geval.*
$$\begin{cases} y^4 - \frac{3}{2} a y^3 + 3 g a b^2 y - 4 g^2 a^2 b^2 = 0, \\ x = g \cdot \frac{2ab}{y}. \end{cases}$$

2e. *Geval.*
$$\begin{cases} y^4 - \frac{3}{2} a y^3 + 3(1-g) a b^2 y - 4(1-g)^2 a^2 b^2 = 0, \\ x = (1-g) \cdot \frac{2ab}{y}. \end{cases}$$

2e. GEVOLG. Nemen wij aan, dat het grond- en bovenvlak een quadraat is, dan is $a = b$, en wij vinden

1e. *Geval.*
$$\begin{cases} y^4 - \frac{3}{2} a y^3 + 3 \frac{g}{g'} a^3 y - \left(\frac{g}{g'}\right)^2 \cdot 4 a^4 = 0 \quad . \quad (A), \\ x = \frac{g}{g'} \times \frac{2a^2}{y}. \end{cases}$$

2e. *Geval.*
$$\begin{cases} y^4 - \frac{3}{2} a y^3 + 3 \frac{g'-g}{g'} a^3 y - \left(\frac{g'-g}{g'}\right)^2 \cdot 4 a^4 = 0 \; (A'), \\ x = \frac{g'-g}{g'} \times \frac{2a^2}{y}. \end{cases}$$

In dit bijzonder geval kan men het eerste lid van elke der vergelijkingen (A) en (A′) in twee factoren van den tweeden graad ontbinden, want men vindt

1e. Ge-

sing verschillende handelwijze, gekomen is, toen hij in zijne Verhandeling *over de verschillende wijzen, waarop onderscheidene vaste ligchamen, hoewel van dezelfde grootte en gedaante, op eene vloeistof drijven,* door zijn onderwerp genoopt werd om de standen te bepalen, waarin een parallelopipedum, dat een vierkant tot grondvlak heeft, op eene vloeistof zal drijven. Wij mogen niet ontkennen, dat zijne oplossing, door hem uit BOSSUT overgenomen, voor een gedeelte eenvoudiger is dan de hier opgegevene. Behalve hetgeen over dit vraagstuk wordt gezegd, is gemelde Verhandeling in deszelfs geheel belangrijk, als toegewijd aan een onderwerp, dat nog slechts zelden opzettelijk in onze taal is behandeld. Men vindt dezelve in de werken van het *Bataafsch Genootschap der Proefondervindelijke Wijsbegeerte te Rotterdam.*

1e. *Geval.*
$$\left\{\begin{aligned}&\left(y^2-\frac{2g}{g'}a^2\right)\left(y^2-\tfrac{3}{2}ay+\frac{2g}{g'}a^2\right)=0,\\&x=\frac{g}{g'}\times\frac{2a^2}{y}.\end{aligned}\right.$$

2e. *Geval.*
$$\left\{\begin{aligned}&\left(y^2-\frac{2(g'-g)}{g'}a^2\right)\left(y^2-\tfrac{3}{2}ay+\frac{2(g'-g)}{g'}a^2\right)=0,\\&x=\frac{g'-g}{g'}\times\frac{2a^2}{y}.\end{aligned}\right.$$

waaruit wij de volgende overeenkomstige waarden voor x en y verkrijgen:

1e. Geval.
$$\left\{\begin{aligned}&y=a\sqrt{\frac{2g}{g'}} && x=a\sqrt{\frac{2g}{g'}}\\&y'=\tfrac{1}{4}a\left\{3+\sqrt{\left(9-32\frac{g}{g'}\right)}\right\} && x'=\tfrac{1}{4}a\left\{3-\sqrt{\left(9-32\frac{g}{g'}\right)}\right\}\\&y''=\tfrac{1}{4}a\left\{3-\sqrt{\left(9-32\frac{g}{g'}\right)}\right\} && x''=\tfrac{1}{4}a\left\{3+\sqrt{\left(9-32\frac{g}{g'}\right)}\right\}\end{aligned}\right.$$

zoodat $y=x$, $y'=x''$ en $y''=x'$, zoo als uit den aard der zaak te verwachten was.

2e. Geval.
$$\left\{\begin{aligned}&y=a\sqrt{\frac{2(g'-g)}{g'}} && x=a\sqrt{\frac{2(g'-g)}{g'}}\\&y'=\tfrac{1}{4}a\left\{3+\sqrt{\left(9-32\frac{g'-g}{g'}\right)}\right\} && x'=\tfrac{1}{4}a\left\{3-\sqrt{\left(9-32.\frac{g'-g}{g'}\right)}\right\}\\&y''=\tfrac{1}{4}a\left\{3-\sqrt{\left(9-32.\frac{g'-g}{g'}\right)}\right\} && x''=\tfrac{1}{4}a\left\{3+\sqrt{\left(9-32.\frac{g'-g}{g'}\right)}\right\}\end{aligned}\right.$$

waarbij wederom $y=x$, $y'=x''$ en $y''=x'$ is. (*)

Het is klaar, dat al deze waarden, indien zij bestaanbaar zijn, tevens positief zijn; voor het eerste geval wordt bovendien tot de bestaanbaarheid der twee laatste antwoorden gevorderd, dat $32.\frac{g}{g'}<9$ en dus $\frac{g}{g'}<\frac{9}{32}$ is. Daar echter x en y hier kleiner dan a moeten wezen, heeft men nog $\frac{1}{4}\left\{3+\sqrt{\left(9-32\frac{g}{g'}\right)}\right\}<1$, waar-

(*) Het is opmerkelijk, dat deze formulen met die voor den gelijkzijdigen driehoek, in het voorgaande vraagstuk gevonden, nergens anders in verschillen, dan hierin, dat $\frac{g}{g'}$ en $\frac{g'-g}{g'}$ verdubbeld zijn.

sing van het voorgaande vraagstuk worden aangemerkt. Wordt namelijk BB′ = ½ AB en BB″ = ½ BC genomen, *Fig.* 82, trekt men B′B″ en worden verder de lijnen B′A′ en B″C′ evenwijdig met de lijn BK getrokken, die AC in K midden door deelt, dan is, ingevolge het voorgaande vraagstuk, A′B′B″C′ het parallelogram, waarvan de diagonalen evenwijdig met AB en BC loopen. Is nu ABC gelijkzijdig, dan staat BK loodregt op AC, en dus wordt A′B′B″C′ de regthoek, waarvan de diagonalen evenwijdig met AB en BC loopen. Daar verder A′B′ = ⅔ BK en BD = B′A′ is, zoo is ook BD = ⅔ BK. Het punt K is alzoo het zwaartepunt van den driehoek ABC, en daar dezelve gelijkzijdig is, valt dit punt, zoo als bekend is, in het middelpunt van den in- en omgeschrevenen cirkel.

Zie hier nog eene andere redenering, waardoor wij tot hetzelfde besluit geraken. Dat de lijn, die door B en D gaat, AC in K midden door deelt, is reeds in het voorgaande vraagstuk aangetoond; daar nu de driehoek ABC gelijkzijdig is, deelt dan ook BD den hoek ABC midden door. Daar verder A′B″ evenwijdig met AB loopt, is ook A′B″C een gelijkzijdige driehoek, en daar CD de zijde A′B″ midden door deelt, zoo deelt zij ook den hoek ACB midden door; omdat dan BD en CD de hoeken B en C van den driehoek ABC midden door deelen, zoo is D het middelpunt van den ingeschreven' cirkel.

CVII. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK, JUN.

Van eenen bolvormigen driehoek is gegeven de loodlijn, de bazis en de tophoek, men vraagt naar de onbekende zijden en hoeken?

OPGELOST *door* J. JONKHERT, A. B. DE BOCK, JUN. en J. BASSAN.

OPLOSSING *van* J. JONKHERT.

Laat gegeven zijn AD = a, BC = b en BAC = α, *Fig.* 83, en stellen wij DC = $\frac{1}{2}b + x$, dan is BD = $\frac{1}{2}b - x$. Verder hebben wij in de regthoekige driehoeken ADC en ADB

$$Tang.\,BAD = \frac{Tang.\,BD}{Sin.\,AD} = \frac{Tang.\,(\frac{1}{2}b - x)}{Sin.\,a},$$

$$Tang.\,CAD = \frac{Tang.\,CD}{Sin.\,AD} = \frac{Tang.\,(\frac{1}{2}b + x)}{Sin.\,a}.$$

Daar

Daar nu BAD + CAD = a is, hebben wij

$$\frac{Tang.BAD + Tang.CAD}{1 - Tang.BAD \times Tang.CAD} = Tang.a,$$

en brengende hierin de waarden van $Tang$ BAD en $Tang.$ CAD over, dan verkrijgen wij de vergelijking

$$\frac{\frac{Tang.(\frac{1}{2}b - x)}{Sin.a} + \frac{Tang.(\frac{1}{2}b + x)}{Sin.a}}{1 - \frac{Tang.(\frac{1}{2}b - x)\,Tang.(\frac{1}{2}b + x)}{Sin^2.a}} = Tang.a,$$

of $$\frac{Tang.(\frac{1}{2}b - x) + Tang.(\frac{1}{2}b + x)}{Sin^2.a - Tang.(\frac{1}{2}b - x)\,Tang.(\frac{1}{2}b + x)} = \frac{Tang.a}{Sin.a}.$$

Schrijven wij hierin voor $Tang.(\frac{1}{2}b - x)$ en $Tang.(\frac{1}{2}b + x)$ derzelver waarden, namelijk

$$Tang.(\tfrac{1}{2}b - x) = \frac{Tang.\frac{1}{2}b - Tang.x}{1 + Tang.\frac{1}{2}b\,Tang.x}$$

en $$Tang.(\tfrac{1}{2}b + x) = \frac{Tang.\frac{1}{2}b + Tang.x}{1 - Tang.\frac{1}{2}b\,Tang.x},$$

dan gaat onze vergelijking over in

$$\frac{\frac{Tang.\frac{1}{2}b - Tang.x}{1 + Tang.\frac{1}{2}b\,Tang.x} + \frac{Tang.\frac{1}{2}b + Tang.x}{1 - Tang.\frac{1}{2}b\,Tang.x}}{Sin^2.a - \frac{Tang^2.\frac{1}{2}b - Tang.^2 x}{1 - Tang^2.\frac{1}{2}b\,Tang^2.x}} = \frac{Tang.a}{Sin.a},$$

of, wanneer wij het eerste lid onder en boven met $1 - Tang^2.\frac{1}{2}b\,Tang^2.x$ vermenigvuldigen,

$$\frac{(T.\frac{1}{2}b - T.x)(1 - T.\frac{1}{2}bT.x) + (T.\frac{1}{2}b + T.x)(1 + T.\frac{1}{2}bT.x)}{Sin^2.a(1 - Tang^2.\frac{1}{2}b\,Tang^2.x) - (Tang^2.\frac{1}{2}b - Tang^2.x)} = \frac{Tang.a}{Sin.a},$$

of, wanneer wij de aangewezene vermenigvuldigingen verrigten,

$$\frac{2\,Tang.\frac{1}{2}b + 2\,Tang.\frac{1}{2}b\,Tang^2.x}{(Sin^2.a - Tang^2.\frac{1}{2}b) + (1 - Sin^2.a\,Tang^2.\frac{1}{2}b)\,Tang^2.x} = \frac{Tang.a}{Sin.a},$$

vermenigvuldigen wij nu met het product der noemers, dan komt er

$$2\,Tang.\tfrac{1}{2}b\,Sin.a + 2\,Tang.\tfrac{1}{2}b\,Sin.a\,Tang^2.x =$$
$$Tang.a(Sin^2.a - Tang^2.\tfrac{1}{2}b) + Tang.a(1 - Sin^2.a\,Tang^2.\tfrac{1}{2}b)\,Tang^2.x,$$

of, alles naar de magten van $Tang.x$ rangschikkende,

$$Tang^2.x\left\{2\,Tang.\tfrac{1}{2}b\,Sin.a + Tang.a(Sin^2.a\,Tang^2.\tfrac{1}{2}b - 1)\right\}$$
$$= Tang\,a\,(Sin^2.a - Tang^2.\tfrac{1}{2}b) - 2\,Tang.\tfrac{1}{2}b\,Sin.a,$$

en

en hieruit *Tang. x* oplosſende, vinden wij:

$$Tang.\,x = \sqrt{\frac{Tang.\,a\,(Sin^2.\,a - Tang^2.\,\tfrac{1}{2}b) - 2\,Tang.\,\tfrac{1}{2}b\,Sin.\,a}{2\,Tang.\,\tfrac{1}{2}b\,Sin.\,a + Tang.\,a\,(Sin^2.\,a\,Tang^2.\,\tfrac{1}{2}b - 1)}}.$$

Hierdoor x gevonden zijnde, worden de onbekende zijden en hoeken zeer gemakkelijk berekend; want voor de deelen der grondlijn heeft men

$$DC = \tfrac{1}{2}b + x \quad \text{en} \quad BD = \tfrac{1}{2}b - x;$$

de opſtaande zijden worden dan verder gevonden door de formulen

$$Cos.\,AC = Cos.\,a\,Cos.\,(\tfrac{1}{2}b + x),$$

en $$Cos.\,AB = Cos.\,a\,Cos.\,(\tfrac{1}{2}b - x).$$

Voor de deelen van den tophoek komt er

$$Tang.\,DAC = \frac{Tang.\,(\tfrac{1}{2}b + x)}{Sin.\,a},\quad Tang.\,DAB = \frac{Tang.\,(\tfrac{1}{2}b - x)}{Sin.\,a}.$$

Eindelijk worden de hoeken aan de bazis gevonden door de formulen

$$Tang.\,C = \frac{Tang.\,a}{Sin.\,(\tfrac{1}{2}b + x)},\quad Tang.\,B = \frac{Tang.\,a}{Sin.\,(\tfrac{1}{2}b - x)}.$$

CVIII. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK, JUN.

Men vraagt de formule $dy = \dfrac{(2 - x - x^2)\,\partial x}{1 + x^3}$ *te integreren?*

OPGELOST *door* A. B. DE BOCK, JUN. en J. BASSAN.

OPLOSSING *van* A. B. DE BOCK, JUN.

Wij kunnen het gebroken $\dfrac{2 - x - x^2}{1 + x^3}$ op de volgende wijze herleiden

$$\frac{2 - x - x^2}{1 + x^3} = \frac{(2 + x)(1 - x)}{1 + x^3} = \frac{\{1 + (1 + x)\}\,(1 - x)}{1 + x^3} =$$

$$= \frac{(1 + x)(1 - x)}{(1 + x)^3} + \frac{1 - x}{1 + x^3} = \frac{1 - x}{1 - x + x^2} + \frac{1 - x}{1 + x^3},$$

waardoor wij hebben

$$y = \int \frac{(2 - x - x^2)\,\partial x}{1 + x^3} = \int \frac{(1 - x)\,\partial x}{1 - x + x^2} + \int \frac{(1 - x)\,\partial x}{1 + x^3}\;.(A).$$

Nu is (I. R. SCHMIDT, *Dif. en Int. Rek.* § 179) ingevalle $a + bx + cx^2$ onbeſtaanbare factoren heeft,

$\int(A +$

$$\int\frac{(A+Bx)\partial x}{a+bx+cx^2}=\frac{B}{C}Log.\sqrt{\frac{a+bx+cx^2}{a}}+\ldots$$

$$\ldots\frac{2cA-bB}{c\sqrt{(4ac-b^2)}}Boog.Tang.\frac{x\sqrt{(4ac-b^2)}}{2a+bx}+C.$$

Stellen wij dus in deze formule $A=1$, $B=-1$, $a=1$, $b=-1$ en $c=1$, dan verkrijgen wij voor het eerste gedeelte van onze integraal

$$\int\frac{(1-x)\partial x}{1-x+x^2}=-Log.\sqrt{(1-x+x^2)}+\frac{1}{\sqrt{3}}Boog.Tang.\frac{x\sqrt{3}}{2-x}.(B).$$

Ten einde het 2e. gedeelte van onze integraal te vinden, hebben wij (I. R. SCHMIDT, *Int. Rek.* § 184) de algemeene formule

$$\int\frac{(x^{m-1}-x^{n+m-1})\partial x}{1+x^n}=-\frac{4}{n}Cos.\frac{m\pi}{n}Log.\sqrt{(1-2xCos.\frac{\pi}{n}+x^2)}$$

$$-\frac{4}{n}Cos.\frac{3m\pi}{n}Log.\sqrt{(1-2xCos.\frac{3\pi}{n}+x^2)}$$

$$-\frac{4}{n}Cos.\frac{5m\pi}{n}Log.\sqrt{(1-2xCos.\frac{5\pi}{n}+x^2)}$$

$-$ enz.

voortgaande volgens de onevene getallen kleiner dan n, en waarbij, ingevalle n oneven mogt zijn, nog gevoegd moet worden $\frac{2}{n}Log.(1+x)$ of $-\frac{2}{n}Log.(1+x)$, naarmate m oneven of even is.

Vergelijken wij nu onze laatste integraal, namelijk $\int\frac{(1-x)\partial x}{1+x^3}$, met deze algemeene formule, dan is $n=3$ en $m=1$, waardoor wij verkrijgen

$$\int\frac{(1-x)\partial x}{1+x^3}=-\tfrac{4}{3}Cos.\frac{\pi}{3}Log.\sqrt{(1-2xCos.\frac{\pi}{3}+x^2)}+\tfrac{2}{3}Log.(1+x),$$

of, omdat $Cos.\frac{\pi}{3}=Cos.60°=\frac{1}{2}$ is

$$\int\frac{(1-x)\partial x}{1+x^3}=-\tfrac{2}{3}Log.\sqrt{(1-x+x^2)}+\tfrac{2}{3}Log.(1+x)\ldots(C).$$

Bren-

Brengende dus (B) en (C) over in (A), zoo verkrijgen wij voor de gevraagde integraal

$$\int \frac{(2+x-x^2)\,\partial x}{1+x^3} = C - \tfrac{1}{3} Log\, \sqrt{(1-x+x^2)} + \tfrac{1}{3} Log.(1+x)$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{3}}\, Boog.\, Tang.\, \frac{x\sqrt{3}}{2-x}.$$

Door eindelijk de gevondene formule te differentieren, zal men zich kunnen overtuigen, dat er nergens eene fout is ingeslopen, want men komt alsdan op de opgegevene differentiaal-formule neder.

CIX. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK, JUN.

Men vraagt de formule $\partial y = x^{\frac{3}{5}}(2+3x^{-\frac{3}{4}})^{-\frac{13}{15}}\partial x$ *te integreren?*

OPGELOST *door* A. B. DE BOCK, JUN. en J. HASSAN.

OPLOSSING *van* A. B. DE BOCK, JUN.

Stellen wij $2+3x^{-\frac{3}{4}} = x^{-\frac{3}{4}} z^{15}$, dan is $x^{-\frac{3}{4}} = \frac{2}{z^{15}-3}$,

$2+3x^{-\frac{3}{4}} = \frac{2z^{15}}{z^{15}-3}$, $(2+3x^{-\frac{3}{4}})^{-\frac{13}{15}} = \frac{(z^{15}-3)^{\frac{13}{15}}}{2^{\frac{13}{15}} z^{13}}$, $x =$

$\left(\frac{2}{z^{15}-3}\right)^{-\frac{4}{3}} = \frac{(z^{15}-3)^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{4}{3}}}$, $\partial x = 20.2^{-\frac{4}{3}} z^{14}(z^{15}-3)^{\frac{1}{3}}\partial z$

en $z = (2x^{\frac{3}{4}}+3)^{\frac{1}{15}}$. Deze waarden substituerende, verkrijgen wij

$$\partial y = \frac{(z^{15}-3)^{\frac{4}{5}}}{2^{\frac{4}{5}}} \times \frac{(z^{15}-3)^{\frac{13}{15}}}{2^{\frac{13}{15}} z^{13}} \times 20.2^{-\frac{4}{3}} z^{14}(z^{15}-3)^{\frac{1}{3}}\partial z,$$

of $\quad \partial y = \frac{5}{2} z (z^{15}-3)^2 \partial z,$

zoodat $\quad y = \frac{5}{2}\int z(z^{30}-6z^{15}+9)\partial z,$

of $\quad y = \frac{5}{2}\int z^{31}\partial z - 15\int z^{16}\partial z + \frac{45}{2}\int z\partial z,$

dat is $\quad y = \frac{5}{64} z^{32} - \frac{15}{17} z^{17} + \frac{45}{4} z^2 + C.$

Schrijven wij alzoo voor z derzelver waarde, dan komt er,

$$y = \frac{5}{64}(2x^{\frac{3}{4}}+3)^{\frac{32}{15}} - \frac{15}{17}(2x^{\frac{3}{4}}+3)^{\frac{17}{15}} + \frac{45}{4}(2x^{\frac{3}{4}}+3)^{\frac{2}{15}} + C,$$

wel.

welke formule wij ook aldus kunnen schrijven:

$$y = \{\tfrac{5}{64}(2x^{\frac{3}{4}}+3)^2 - \tfrac{15}{17}(2x^{\frac{3}{4}}+3) + \tfrac{45}{4}\} \times \sqrt[15]{(2x^{\frac{3}{4}}+3)^2} + C,$$

of, dat hetzelfde is,

$$y = \{\tfrac{5}{13}x^{\frac{3}{2}} - \frac{15.15}{16.17} \times x^{\frac{3}{4}} + \frac{3.15\ 15.15}{4.16.17}\} \times \sqrt[15]{(2x^{\frac{3}{4}}+3)^2} + C.$$

CX. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK, JUN.

Den loop en de merkwaardigste eigenschappen te bepalen van de kromme, waarvan de polaire vergelijking is $z = a\,Tang^2.\,\phi$?

OPLOSSING. *Door* A. B. DE BOCK, JUN.

Zij P, *Fig.* 84, de pool en PO de oorsprong der hoeken, zoodat, OPD $=\phi$ stellende, PD $= z$ is, dan kan elk punt D der kromme op de volgende wijze geconstrueerd worden. Laat PQ $= a$ genomen en QR loodregt op PQ getrokken worden, indien dan OPK $=\phi$ is, zal QR $= a\,Tang.\,\phi$ zijn; neemt men dus PT $=$ QR en trekt TS evenwijdig met QR, dan is ST $=$ PT $\times$ *Tang.* $\phi =$ QR $\times$ *Tang.* $\phi = a\,Tang^2\,\phi$, en men zal dus PD $=$ TS moeten nemen, om het punt D van de kromme te verkrijgen. Op deze wijze zal men dan gemakkelijk den tak PX van de kromme kunnen bekomen, welke klaarblijkelijk door P gaat en tot in het oneindige voortloopt.

Het is gemakkelijk in te zien, dat de tweede *Tang.* PX' met de eerste gelijk en gelijkvormig is; want nemende OPD' $=\phi' = 180° - \phi$, dan is *Tang.* $\phi' =$ *Tang.* $(180° - \phi) = -$ *Tang.* ϕ, en dus *Tang*^{2}. $\phi' =$ *Tang*^{2} ϕ, waaruit volgt, dat wanneer PD en PD' gelijke hoeken met PY maken, welke door P loodregt op PO getrokken is, de polaire ordinaten PD' en PD even groot zullen zijn, waaruit dan de gelijk- en gelijkvormigheid der takken PX en PX' van zelve volgt.

Neemt men OPD'' $=$ OPD of stelt men $\phi'' = -\phi$, dan is *Tang.* $\phi'' = -$ *Tang.* ϕ en *Tang*^{2}. $\phi'' =$ *Tang*^{2}. ϕ, waaruit volgt PD'' $=$ PD, en hieruit blijkt, dat er beneden OO' twee takken PX'' en PX''' bestaan, welke met de twee reeds gevondene gelijk en gelijkvormig zijn, zoodat de kromme uit vier gelijke en gelijkvormige takken bestaat, die in de pool te zamen komen en aan de andere zijde tot in het oneindige voortloopen. Dit be-

grepen hebbende, zal het dan genoegzaam wezen, ons met den tak PX bezig te houden, dat is, geene andere waarden van ϕ aan te nemen, dan zulke, welke van $\phi = 0$ tot $\phi = 90°$ loopen.

Dat de takken door P gaan en tot in het oneindige voortloopen, blijkt niet alleen uit de constructie, maar ook uit de vergelijking $z = a\,Tang^2.\phi$, want stellende $\phi = 0$, dan is $z = 0$, en stellende $\phi = 90°$ dan is $z = \infty$. Hierin zullen wij echter nog duidelijker inzigt bekomen, door de waarden van DI $= x$ en DL $= y$ te berekenen, waarvoor wij verkrijgen

$$DI = x = a\,Tang^2.\phi \times Cos.\phi = \frac{a\,Sin^2.\phi}{Cos.\phi}$$

$$DL = y = a\,Tang^2.\phi \times Sin.\phi = \frac{a\,Sin^3.\phi}{Cos.\phi};$$

want stellende nu $\phi = 0$, dan is $x = 0$ en $y = 0$, en stellende $\phi = 90°$, dan wordt $x = \infty$ en $y = \infty$, zoodat de tak PX zich niet alleen van de as PO maar ook van de as PY op eenen oneindigen afstand verwijdert.

De gevondene waarden van x en y maken het zeer gemakkelijk, de vergelijking van onze kromme voor de regthoekige coördinaten asfen PO en PY te vinden; want uit dezelve is

$$\frac{y}{x} = Tang.\phi \quad \text{en} \quad x^2 + y^2 = a^2\,Tang^4.\phi,$$

waaruit ten duidelijkste volgt

$$\frac{y^4}{x^4} = \frac{x^2 + y^2}{a^2},$$

of

$$a^2 y^4 = x^6 + x^4 y^2,$$

zoodat onze krommè van den zesden graad is.

Losfen wij uit deze vergelijking y op, dan vinden wij

$$y^4 - \frac{x^4}{a^2} y^2 = \frac{x^6}{a^2},$$

dus

$$y^2 = \frac{x^4}{2a^2} \pm \sqrt{\left(\frac{x^8}{4a^4} + \frac{x^6}{a^2}\right)},$$

en

$$y = \pm\sqrt{\left\{\frac{x^4}{2a^2} \pm \sqrt{\frac{x^8 + 4a^2x^6}{4a^4}}\right\}},$$

daar het verder ten duidelijkste is in te zien, dat het teeken — onder het wortelteeken tot geene bestaanbare waarden van y kan voeren, zoo hebben wij alleen

$$y = \pm\sqrt{\left\{\frac{x^4}{2a^2} + \frac{x^2}{2a^2}\sqrt{(x^4 + 4a^2x^2)}\right\}},$$

dat

dat is $y = \pm \frac{x}{2a} \sqrt{\{2x^2 + 2x\sqrt{(x^2 + 4a^2)}\}}$,

door welke vergelijking al het vroeger gezegde volkomen bevestigd wordt; daar echter de vergelijking $z = a\, Tang^2.\, \phi$ veel gemakkelijker te behandelen is, zullen wij ons alleen met deze laatste bezig houden.

Ter bepaling van de raaklijn aan eenig punt van onze kromme, differentiëren wij de vergelijking $z = a\, Tang^2.\, \phi$, en vinden voor het eerste en tweede differentiaal quotiënt

$$\frac{\partial z}{\partial \phi} = 2a \cdot \frac{Sin.\, \phi}{Cos^3.\, \phi},$$

en

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2} = 2a \cdot \frac{1 + 2\, Sin^2\, \phi}{Cos^4.\, \phi}.$$

Stellende nu den hoek, welke de raaklijn met de polaire ordinaat maakt ψ, dan is (I. R. SCHMIDT, *Dif. Rek.* § 154) $Tang\, \psi = \frac{z\, \partial \phi}{\partial z}$, en daar in ons geval $z = a\, Tang^2.\, \phi = a \frac{Sin^2.\, \phi}{Cos^2.\, \phi}$ en $\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{Cos^3\, \phi}{2a\, Sin.\, \phi}$ is, zoo verkrijgen wij

$$Tang.\, \psi = \tfrac{1}{2}\, Sin.\, \phi\; Cos.\, \phi = \tfrac{1}{4}\, Sin.\, 2\phi,$$

waardoor dan de raaklijn voor elk punt van de kromme gemakkelijk door berekening kan bepaald worden.

Stelt men $\phi = 0$, dan is $Tang.\, \psi = 0$ en dus $\psi = 0$, dat is, de raaklijn valt alsdan op de polaire ordinaat; maar in dit geval valt de polaire ordinaat op PO, en hieruit volgt, dat elk der vier takken in P de as PO tot raaklijn heeft.

Stelt men $\phi = 90^\circ$, dan wordt $Tang.\, \psi = \tfrac{1}{4} Sin.\, 180^\circ = 0$, en dus valt ook in dit geval de raaklijn op de oneindige polaire ordinaat, en daar deze in dit geval loodregt op PO staat, zoo staat ook de raaklijn van het oneindig afgelegen punt X loodregt op PO, waaruit volgt, dat de takken meer en meer tot de evenwijdigheid aan OY naderen, doch dezelve niet bereiken, dan in de oneindig afgelegene punten, welke, zoo als wij reeds vroeger zagen, oneindig verre van OY verwijderd zijn. Het is hieruit klaar, dat de kromme geene regtlijnige asymptoten heeft, en wij zullen alzoo het verdere onderzoek ten opzigte der asymptoten achterwege laten.

Men kan uit de formule voor *Tang.* ψ. ook gemakkelijk eene constructie voor de raaklijn afleiden; wij hebben namelijk

$$Tang.\psi = \tfrac{1}{2} Sin.\phi\, Cos.\phi = \tfrac{1}{a} \frac{Sin^3.\phi}{Cos.\phi} \cdot \frac{Cos^2.\phi}{Sin^2.\phi} = \tfrac{1}{2} \frac{a Sin^3\phi}{Cos.\phi} : a\, Tang^2.\phi,$$

dat is $$Tang.\psi = \frac{\tfrac{1}{2} y}{x} = \frac{\tfrac{1}{2} DL}{DP},$$

waaruit deze eenvoudige constructie volgt. *Stel* PG $= \tfrac{1}{2}$ DL *loodregt op* DP *en trek* DG, *dan zal dezelve raaklijn aan het punt* D *van de kromme zijn.*

Om te onderzoeken, of de kromme voor buigpunten vatbaar is, moeten wij (I. R. Schmidt, *Dif. Rek.* § 158) stellen:

$$z \frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2} - 2\left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2 - z^2 = 0,$$

brengen wij nu hierin de waarden van $\frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2}$ en $\frac{\partial z}{\partial \phi}$ over, die wij boven gevonden hebben, dan komt er

$$a\, Tang^2.\phi . 2a \frac{1 + 2 Sin^2.\phi}{Cos^4.\phi} - 8a^2 \frac{Sin^4.\phi}{Cos^6.\phi} - a^2\, Tang^4.\phi = 0,$$

of, met $Cos^6.\phi$ vermenigvuldigende en door a^2 deelende,

$$2 Sin^2.\phi(1 + 2 Sin^2,\phi) - 8 Sin^2.\phi - Sin^4\phi(1 - Sin^2.\phi) = 0,$$

welke, door $Sin^2.\phi$ gedeeld en herleid, geeft

$$Sin^4\phi + 3 Sin^2.\phi - 6 = 0,$$

waaruit $$Sin.\phi = \pm\sqrt{(-\tfrac{3}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{33})}.$$

Neemt men nu, onder het wortelteeken, het teeken —, dan wordt $Sin.\phi$ onbestaanbaar; doch neemt men het teeken +, dan komt er nagenoeg $Sin.\phi = \pm\sqrt{1{,}37}$, en dus $Sin.\phi$ grooter dan 1, waardoor ϕ mede onbestaanbaar wordt, en hieruit volgt, dat onze kromme geene buigpunten heeft.

Men zou misschien kunnen denken, dat er een buigpunt bij P moet plaats hebben; doch men lette wel op, dat de tak XP bij het punt P geenszins in den tak PX''' maar in den tak PX' overgaat, hetgeen zoo wel uit onze opgegevene constructie als uit de vergelijking tusschen y en x blijkbaar is.

Voor de lengte van den kromtestraal heeft men (I. R. Schmidt, *Dif. Rek.* § 159) in het algemeen

$\gamma =$

$$\gamma = \frac{\left\{z^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{z^2 + 2\left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2 - z\,\frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2}},$$

brengen wij dan hierin de waarden van z, $\frac{\partial z}{\partial \phi}$ en $\frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2}$ over, dan wordt de teller

$$\left\{a^2\, Tang^4.\phi + 4\,a^2\,\frac{Sin^2.\phi}{Cos^6.\phi}\right\}^{\frac{3}{2}},$$

of, na behoorlijke herleiding,

$$\frac{a^3\, Sin^3.\phi}{Cos^9.\phi}\,(4 + Sin^2.\phi - Sin^4\,\phi)^{\frac{3}{2}};$$

daar wij nu bij het onderzoek wegens de buigpunten voor den noemer gevonden hebben

$$\frac{a^2\, Sin^2\,\phi}{Cos^6.\phi}(6 - 3\,Sin^2.\phi - Sin^4.\phi),$$

zoo wordt de formule voor den kromteſtraal

$$\gamma = a\,.\frac{Sin.\phi}{Cos^3.\phi}\,.\,\frac{(4 + Sin^2.\phi - Sin^4.\phi)^{\frac{3}{2}}}{6 - 3\,Sin^2.\phi - Sin^4\,\phi},$$

waaruit blijkt, dat de kromteſtraal van het punt P gelijk nul is.

Om eindelijk den inhoud van eenig ſtuk te bepalen, begrepen tusſchen den boog PD en de polaire ordinaat PD, hebben wij

$$\partial I = \tfrac{1}{2} z^2\,\partial\phi = \tfrac{1}{2} a^2\, Tang^4\,\phi\,\partial\phi,$$

en dus $$I = \tfrac{1}{2} a^2 \int Tang^4\,\phi\,\partial\phi = \tfrac{1}{2} a^2 \int \frac{Sin^4.\phi}{Cos^4.\phi}\,\partial\phi.$$

Nu hebben wij (I. R. SCHMIDT, *Int. Rek. pag.* 318 § 250)

$$\int \frac{\partial\phi\, Sin^m.\phi}{Cos^n.\phi} = \frac{1}{n-1}\,\frac{Sin.^{m+1}\phi}{Cos.^{n-1}\phi} - \frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{\partial\phi\, Sin^m.\phi}{Cos.^{n-2}\phi},$$

ſtellende alzoo $m = n = 4$, dan verkrijgen wij

$$\int \frac{\partial\phi\, Sin^4.\phi}{Cos^4.\phi} = \tfrac{1}{3}\,.\,\frac{Sin^5.\phi}{Cos^3.\phi} - \tfrac{2}{3}\int \frac{\partial\phi\, Sin^4.\phi}{Cos^2.\phi},$$

maar ſtellende $m = 4$ en $n = 2$, dan komt er

$$\int \frac{\partial\phi\, Sin^4.\phi}{Cos^2.\phi} = \frac{Sin^5.\phi}{Cos.\phi} - 4\int \partial\phi\, Sin^4.\phi,$$

zoodat wij, door de laatſte in de eerſte over te brengen, vinden

$$\int \frac{\partial \phi \, Sin^4. \phi}{Cos^4. \phi} = \tfrac{1}{3} . \frac{Sin^5. \phi}{Cos^3. \phi} - \tfrac{2}{3} . \frac{Sin^5. \phi}{Cos. \phi} + \tfrac{8}{3} \int \partial \phi \, Sin^4. \phi.$$

Eindelijk is (L. R. SCHMIDT, *Int. Rek.* § 245)

$$\int Sin^4. \phi \partial \phi = -\tfrac{1}{4} Sin^3. \phi \, Cos. \phi - \frac{1.3}{2.4} Sin. \phi \, Cos. \phi + \frac{1.3}{2.4} \phi,$$

zoodat wij vinden

$$I = \tfrac{1}{2} a^2 \left\{ \tfrac{1}{3} \frac{Sin^5. \phi}{Cos^3. \phi} - \tfrac{2}{3} \frac{Sin^5. \phi}{Cos. \phi} - \tfrac{2}{3} Sin^3. \phi Cos. \phi - Sin. \phi Cos. \phi + \phi + C \right\},$$

daar nu voor $\phi = 0$ ook $I = 0$ moet zijn, vinden wij $C = 0$, en bij gevolg

$$I = \tfrac{1}{6} a^2 \left\{ \frac{Sin^5. \phi}{Cos^3. \phi} - \frac{2 \, Sin^5. \phi}{Cos. \phi} - 2 \, Sin^3. \phi Cos. \phi - 3 Sin. \phi Cos. \phi + 3 \phi \right\},$$

of $I = \tfrac{1}{6} a^2 \left\{ 3 \phi - \tfrac{1}{2} Sin. 2 \phi \, (2 \, Sin^2. \phi + 3) - Cos. 2 \phi . \frac{Sin^5. \phi}{Cos^3. \phi} \right\}$.

CXI. VOORSTEL.

Door A. VAN DER SWAN.

Vindt eene arithmetische evenredigheid, waarin de som der termen is 32, de som van derzelver vierkanten 290, en het product der termen 3024?

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, A. VAN DER SWAN, J. BASSAN, A. B. DE BOCK, JUN. en J. JONKHEERT.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

Stel de vier termen $x-y$, $x-z$, $x+z$, $x+y$, waarvan de som der uiterste gelijk de som der middelste is, en welke alzoo aan de voorwaarde voldoen, dat de vier getallen eene rekenkunstige evenredigheid moeten uitmaken, dan is derzelver som $4x$, en daar deze som gelijk 32 moet wezen, zoo is $x = 8$.

De vier termen der evenredigheid zijn dus $8-y$, $8-z$, $8+z$ en $8+y$. Daar nu de som der vierkanten van deze termen 290 en derzelver product 3024 moet wezen, zoo hebben wij de vergelijkingen

$$(8-y)^2 + (8-z)^2 + (8+z)^2 + (8+y)^2 = 290,$$

en

$$(8-y)(8-z)(8+z)(8+y) = 3024,$$

of, dat hetzelfde is,

$$(2.64 + 2y^2) + (2.64 + 2z^2) = 290,$$

en

$$(64-y^2)(64-z^2) = 3024,$$

dat is, wanneer wij alles ontwikkelen

2 y²

$$2y^2+2z^2=34,$$

en $$y^2z^2-64(y^2+z^2)+1072=0.$$

Uit de eerste dezer vergelijkingen is

$$y^2+z^2=17,$$

en brengende dezelve over in de tweede, dan komt er

$$y^2z^2-64.17+1072=0,$$

of $$y^2z^2=16,$$

waaruit $$yz=4.$$

Vermeerderen en verminderen wij nu $y^2+z^2=17$ met $2yz=8$, dan komt er

$$(y+z)^2=25 \text{ en } (y-z)^2=9,$$

zoodat $$y+z=5 \text{ en } y-z=3,$$

waaruit gemakkelijk gevonden wordt

$$y=4 \text{ en } z=1,$$

zoodat de vier gevraagde getallen zijn

$$8-y=4,\ 8-z=7,\ 8+z=9 \text{ en } 8+y=12.$$

CXII. VOORSTEL,

Door S. KLYNSMA.

Een hoek gegeven zijnde met een punt in een van deszelfs beenen, begeert men een vierkant te beschrijven, waarvan het gegeven punt een der hoekpunten is, dat het been, waarin dit gegeven punt gelegen is, tot zijde heeft, en dat door het andere been in twee stukken gesneden wordt, die tot elkander in gegevene reden zijn?

Opgelost *door* I. R. SCHMIDT, A. B. DE BOCK en J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* I. R. SCHMIDT.

Laat ABC $=\alpha$, *Fig.* 85, de gegeven hoek en D het gegeven punt zijn, dat van B op eenen afstand BD $=a$ gelegen is. Stellen wij eindelijk DF $=x$ de zijde van het gevraagde vierkant, dan is DE $=a\,Tang.\,\alpha$ en FG $=(a+x)\,Tang.\,\alpha$; zoodat DE + FG $=(2a+x)\,Tang.\,\alpha$; vermenigvuldigende dit met $\frac{1}{2}$DF $=\frac{1}{2}x$, dan verkrijgen wij

$$Trapez.\ DEGF=\tfrac{1}{2}x(2a+x)\,Tang.\,\alpha.$$

Onderstellen wij nu, dat dit deel tot het andere deel in reden moet staan als p tot m, dan staat hetzelve tot den inhoud van het geheele vierkant als p tot $p+m$; wij kunnen dus ook deze

reden als gegeven beschouwen, en dezelve als p tot q stellen, als wanneer wij hebben

$$\tfrac{1}{2}x(2a+x)\,Tang.\,a : x^2 = p : q,$$

of
$$(2a+x)\,Tang.\,a : 2x = p : q,$$

dus
$$2aq\,Tang.\,a + qx\,Tang.\,a = 2px,$$

waaruit
$$x = \frac{2aq\,Tang.\,a}{2p - q\,Tang.\,a},$$

of, wanneer wij kortheidshalve $\frac{p}{q} = n$ stellen,

$$x = \frac{2a}{2n\,Cot.\,a - 1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A).$$

1e. Aanmerking. Zal het vraagstuk in allen deele overeenkomen met de omstandigheden, onder welke wij hetzelve in *Fig.* 85 hebben beschouwd, dat is, zal het vierkant ter regter zijde van DM liggen en door BA in twee trapeziums worden verdeeld, dan zal DF positief, en bovendien FG kleiner dan FH moeten wezen. Ten einde DF of x positief te verkrijgen, moet $2n\,Cot.\,a > 1$ zijn, en dit geeft ons

$$n > \tfrac{1}{2}\,Tang.\,a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Zal verder FG kleiner dan FH wezen, dan moeten wij hebben $(a+x)\,Tang.\,a < x$, of $a\,Tang.\,a < x(1 - Tang.\,a)$, dat is

$$a\,Tang.\,a < \frac{2a(1 - Tang.\,a)}{2n\,Cot.\,a - 1},$$

of
$$2n - Tang.\,a < 2(1 - Tang.\,a),$$

waaruit
$$n < 1 - \tfrac{1}{2}\,Tang.\,a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Het is klaar, dat deze grenzen tegen elkander strijden, zoo niet $1 - \tfrac{1}{2}\,Tang.\,a > \tfrac{1}{2}\,Tang.\,a$ is, waaruit volgt $Tang\,a < 1$, en uit dit alles blijkt dan, dat het vraagstuk niet in den voorschreven zin zal kunnen worden opgelost, ten zij vooreerst $a < 45°$ is, en bovendien n tusschen de grenzen $\tfrac{1}{2}\,Tang.\,a$ en $1 - \tfrac{1}{2}\,Tang.\,a$ genomen wordt.

Is $a = 45°$, dan is $\tfrac{1}{2}\,Tang.\,a = 1 - \tfrac{1}{2}\,Tang.\,a = \tfrac{1}{2}$; voor n kan dus in dit geval niet anders dan $\tfrac{1}{2}$ genomen worden, waardoor ondertusschen $x = \infty$ wordt, zoodat dit een oneigenlijk geval is. Dit zelfde zal altijd plaats hebben, wanneer men $n = \tfrac{1}{2}\,Tang.\,a$ neemt.

Is

Is $\alpha < 45°$ en men neemt n gelijk de grootste limiet, namelijk $n = 1 - \frac{1}{2}\,Tang.\,\alpha$, dan vindt men $x = \frac{a}{Cot.\,\alpha - 1}$, dus $a + x = \frac{a\,Cot.\,\alpha}{Cot.\,\alpha - 1}$ en $(a+x)\,Tang.\,\alpha = \frac{a}{Cot.\,\alpha - 1}$. In dit geval is alzoo $FH = FG$, dat is, het vierkant komt alsdan met het hoekpunt H in het been BA te liggen.

2e. Aanmerking. Neemt men n grooter dan de grootste limiet $1 - \frac{1}{2}\,Tang\,\alpha$, dan is onze oplossing niet meer regtstreeks bruikbaar; want daar alsdan FG grooter dan FH wordt, valt het punt H binnen de beenen van den hoek ABC, en het vierkant wordt alsdan, door het been BA, niet meer in twee regthoekige trapeziums, maar in eenen driehoek en eenen vijfhoek verdeeld, zoo als in *Fig.* 86 is voorgesteld. Onze oplossing blijft, wel is waar, dan nog altijd doorgaan; want ook hier zal nog, even als in het eerste geval, *Trap.* EDFG : *Vierk.* DFHI $= p : q$ zijn; doch hier is *Trap.* EDFG geen deel meer van het vierkant, en het is klaar, dat men zich in dit geval eigenlijk voorstelt, *om het vierkant* DFHI *zoodanig te bepalen, dat de vijfhoek* DEKHF *tot het vierkant in reden is als p tot q.* Zie hier hoe men aan deze vraag voldoen kan.

Stellen wij dan wederom $BD = a$, $\angle B = \alpha$, en $DF = x$, dan is $EI = x - a\,Tang.\,\alpha$ en $IK = EI \times Cot.\,\alpha = (x - a\,Tang.\,\alpha) \times Cot.\,\alpha$, zoodat

$$drieh.\,EIK = \tfrac{1}{2}(x - a\,Tang.\,\alpha)^2\,Cot.\,\alpha;$$

stellen wij nu, dat DEKHF tot het geheele vierkant in reden moet zijn als p tot q, dan is driehoek EIK tot dit vierkant in reden als $q - p$ tot q, en wij hebben alzoo

$$\tfrac{1}{2}(x - a\,Tang.\,\alpha)^2\,Cot.\,\alpha : x^2 = q - p : q,$$

of

$$(x - a\,Tang.\,\alpha)^2 = \frac{2(q-p)}{q}\,Tang.\,\alpha\,.\,x^2,$$

dus

$$x - a\,Tang.\,\alpha = x\sqrt{\frac{2(q-p)}{q}\,Tang.\,\alpha},$$

of, wanneer wij ook hier $\frac{p}{q} = n$ stellen,

$$x = \frac{a\,Tang.\,\alpha}{1 - \sqrt{2(1-n)\,Tan.\,\alpha}} \quad \ldots\ldots \quad (B).$$

 Zal

Zal x hier positief zijn, dan zal men moeten hebben $1 > \sqrt{2(1-n)\,Tang.\,\alpha}$ of $1 > 2\,Tang.\,\alpha - 2n\,Tang.\,\alpha$, waaruit $n > 1 - \frac{1}{2}Cot.\,\alpha$ of $Tang.\,\alpha < \frac{1}{2(1-n)}$.

Zal verder BA den vierhoek in eenen vijfhoek en eenen driehoek verdeelen, dan zal men moeten hebben $FG > FH$ of $(a+x) \times Tang.\,\alpha > x$, dat is $a\,Tang.\,\alpha > x(1 - Tang.\,\alpha)$; of voor x derzelver waarde schrijvende, $a\,Tang.\,\alpha\,(1 - \sqrt{2(1-n)\,Tang.\,\alpha}) > a\,Tang.\,\alpha\,(1 - Tang.\,\alpha)$, dat is $1 - \sqrt{2(1-n)\,Tang.\,\alpha} > 1 - Tang.\,\alpha$, zoodat $\sqrt{2(1-n)\,Tang.\,\alpha} < Tang.\,\alpha$, of $2(1-n) < Tang.\,\alpha$, waaruit $n > 1 - \frac{1}{2}Tang.\,\alpha$, even zoo als wij dit bij den aanvang van onze oplossing onderstelden.

Is dus α gegeven en men wil n zoodanig bepalen, dat de oplossing met *Fig.* 86 kan overeenkomen, dan zal men, daar n altijd kleiner dan 1 moet zijn, n moeten nemen tusschen 1 en de grootste der twee uitdrukkingen $1 - \frac{1}{2}Cot.\,\alpha$ en $1 - \frac{1}{2}Tang.\,\alpha$. Is, bij voorbeeld, $Tang.\,\alpha = 2$, dan is $1 - \frac{1}{2}Cot.\,\alpha = \frac{3}{4}$ en $1 - \frac{1}{2}Tang.\,\alpha = 0$, zoodat alsdan n tusschen 1 en $\frac{3}{4}$ moet worden genomen.

Is daarentegen n gegeven en men wil de limieten voor $Tang.\,\alpha$ bepalen, dan volgt uit $n > 1 - \frac{1}{2}Cot.\,\alpha$, $Tang.\,\alpha < \frac{1}{2(1-n)}$, en uit $n > 1 - \frac{1}{2}Tang.\,\alpha$, $Tang.\,\alpha > 2(1-n)$. Is dus $n = \frac{3}{4}$, dan zal $Tang.\,\alpha$ genomen moeten worden tusschen 2 en $\frac{1}{2}$.

Uit de twee limieten voor $Tang.\,\alpha$ volgt nog $\frac{1}{2(1-n)} > 2(1-n)$ of $1 > 4(1-n)^2$, waaruit $1 > 2 - 2n$, en dus $n > \frac{1}{2}$, zoodat in het laatst opgeloste geval n altijd grooter dan $\frac{1}{2}$ moet zijn.

3e. Aanmerking. Wordt in het geval van *Fig.* 85 de waarde van x, in (A) gevonden, negatief, dan moet men vooral opletten, dat beide zijden van het vierkant als negatief moeten worden beschouwd, zoodat dit vierkant alsdan de stelling van *Fig.* 87 zal aannemen; de oplossing is dan altijd oneigenlijk, en het is alsdan het verschil tusschen de driehoeken BFG en BED, welke tot het vierkant in de gegevene reden is, omdat ook in *Fig.* 85 het trapezium DEFG het verschil tusschen de driehoeken BFG en BED was.

4e. Aan-

4°. Aanmerking. Wilde men alzoo, dat het vierkant DFHI, *Fig.* 88, ter linkerzijde van DM, doch boven BC viel, dan zoude men hiertoe geene der formulen (A) of (B) kunnen bezigen, doch men zal alsdan, op dezelfde wijze als in het eerste geval, $BD=a$ en $FD=x$ stellende, vinden

$$\tfrac{1}{2}x(2a-x)\,Tang.\,\alpha : x^2 = p : q,$$

waaruit
$$x=\frac{2.a\,q\,Tang.\,\alpha}{2\,p+q\,Tang.\,\alpha}.$$

Zal dit geval op de in *Fig.* 88 voorgestelde wijze kunnen plaats hebben, dan zal $x < a$ en $x > a\,Tang.\,\alpha$ moeten zijn, en dit geeft vooreerst $a > a\,Tang.\,\alpha$, of $\alpha < 45°$. Verder zal men hieruit vinden, dat, $\alpha < 45°$ gegeven zijnde, n tusschen $\tfrac{1}{2}\,Tang.\,\alpha$ en $1-\tfrac{1}{2}\,Tang.\,\alpha$ moet genomen worden.

5e. Aanmerking. Verkiest men eindelijk, dat het vierkant, ter linkerhand van het punt D en boven BC gelegen zijnde, door BA in eenen driehoek en vijfhoek zal worden gedeeld, dan is, *Fig.* 89, $BD=a$ en $DF=x$ stellende, $HG=x-(a-x)\times Tang.\,\alpha = x(1+Tang.\,\alpha)-a\,Tang.\,\alpha$ en $HK=HG\,Cot.\,\alpha$, dus *drieh.* $HGK=\tfrac{1}{2}HG^2\,Cot.\,\alpha=\tfrac{1}{2}\{x(1+Tang.\,\alpha)-a\,Tang.\,\alpha\}^2\times Cot.\,\alpha$, zoodat wij, even als in de tweede aanmerking te werk gaande, vinden

$$\tfrac{1}{2}\{x(1+Tang.\,\alpha)-a\,Tang.\,\alpha\}^2\,Cot.\,\alpha : x^2 = q-p : q,$$

of
$$x(1+Tang.\,\alpha)-a\,Tang.\,\alpha = x\sqrt{\frac{2(q-p)}{q}\,Tang.\,\alpha},$$

waaruit
$$x=\frac{a\,Tang.\,\alpha}{1+Tang.\,\alpha-\sqrt{2(1-n)\,Tang.\,\alpha}}.$$

Wij laten eindelijk het onderzoek wegens de betrekkingen, die er tusschen de gegevens moeten bestaan, opdat dit geval zal kunnen plaats hebben, aan den lezer over, daar zulks, na al het bovenstaande begrepen te hebben, aan geene zwarigheden meer onderhevig kan zijn.

CXIII. VOORSTEL.

Door S. Klynsma.

De som der inhouden van al de regelmatige veelhoeken, van den driehoek tot den n-hoek, ingesloten, in eenen zelfden cirkel beschreven, is gelijk a^2 gegeven: men vraagt den straal van dezen cirkel te berekenen?

Op-

OPLOSSING. *Door* A. B. DE BOCK, JUN.

Stellen wij, dat in eenen cirkel van den straal s een veelhoek van n zijden beschreven is, dan is de middelpuntshoek $\frac{2\pi}{n}$, en bij gevolg de inhoud van elken middelpuntsdriehoek $\frac{1}{2}s^2 Sin\, \frac{2\pi}{n}$, zoodat de inhoud van dezen veelhoek zal worden uitgedrukt door $\frac{1}{2}n s^2 Sin.\frac{2\pi}{n}$.

Nemende nu in deze formule achtervolgens n gelijk 3, 4, 5, 6 *enz.* tot n, dan verkrijgen wij de inhouden der veelhoeken van 3, 4, *enz.* tot n zijden, in denzelfden cirkel, van den straal s, beschreven; daar nu de som van al deze inhouden gelijk a^2 moet zijn, zoo verkrijgen wij

$$\tfrac{3}{2}s^2 Sin.\tfrac{2}{3}\pi + \tfrac{4}{2}s^2 Sin.\tfrac{2}{4}\pi + \tfrac{5}{2}s^2 Sin.\tfrac{2}{5}\pi + enz. + \frac{n}{2}s^2 Sin.\frac{2}{n}\pi = a^2,$$

of $$s^2\left\{\tfrac{3}{2} Sin.\tfrac{2}{3}\pi + \tfrac{4}{2} Sin.\tfrac{2}{4}\pi + \tfrac{5}{2} Sin.\tfrac{2}{5}\pi + enz. + \frac{n}{2} Sin.\frac{2}{n}\pi\right\} = a^2,$$

dus $$s^2 = \frac{2a^2}{3\,Sin.\frac{2}{3}\pi + 4\,Sin.\frac{2}{4}\pi + 5\,Sin.\frac{2}{5}\pi + enz. + n\,Sin.\frac{2}{n}\pi},$$

en $$s = \frac{a}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}Sin.\frac{2}{3}\pi + \frac{4}{2}Sin.\frac{2}{4}\pi + \frac{5}{2}Sin.\frac{2}{5}\pi + enz. + \frac{n}{2}Sin.\frac{2}{n}\pi\right)}}.$$

CXIV. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK, JUN.

Van eenen bolvormigen driehoek is gegeven de betrekking, die deszelfs inhoud tot het oppervlak van den bol heeft, gelijk n, een der hoeken gelijk α, en de loodregte boog, die uit dit hoekpunt op de overstaande zijde valt, gelijk a. Men vraagt dezen driehoek te bepalen?

OPGELOST *door* I. R. SCHMIDT, A. B. DE BOCK, JUN. J. BASSAN en J. JONKHEERT.

OPLOSSING *van* I. R. SCHMIDT.

Het is uit de Meetkunst bekend, dat de betrekking van den inhoud I eens bolvormigen driehoeks tot het oppervlak O van den bol wordt uitgedrukt door

I

$$\frac{I}{O} = \frac{A+B+C-2R}{8R},$$

waarin A, B en C de hoeken van den driehoek zijn, en R een' regten hoek voorstelt. Nu is deze betrekking ondersteld gelijk n gegeven te zijn, en hierdoor heeft men

$$A+B+C = n \times 8R + 2R = (4n+1) \times 180^\circ,$$

en bij gevolg, daar A, *Fig.* 83, gelijk α gegeven is,

$$B+C = (4n+1) \times 180^\circ - \alpha,$$

welke waarde wij, om te bekorten, door β kunnen voorstellen.

Het opgegevene vraagstuk is dan nu terug gebragt tot het volgende. *Van eenen bolvormigen driehoek is gegeven de tophoek gelijk α, de som der hoeken aan de bazis gelijk β, en de loodregte boog, die op de bazis uit het overstaande hoekpunt valt, gelijk a: men vraagt de hoeken aan de bazis en de zijden te vinden?*

Om dit vraagstuk op te lossen, stellen wij $B = \frac{1}{2}\beta + \phi$, $C = \frac{1}{2}\beta - \phi$, $BAD = \frac{1}{2}\alpha + \psi$ en $CAD = \frac{1}{2}\alpha - \psi$, waardoor reeds aan de voorwaarden voldaan is, dat $B + C = \beta$ en $BAC = \alpha$ moet zijn. Verder is in de regthoekige driehoeken BAD en CAD

$$Cos.B = Cos.AD \times Sin.BAD,$$

en

$$Cos.C = Cos.AD \times Sin.CAD,$$

of de aangenomene waarden substituerende,

$$Cos.(\tfrac{1}{2}\beta + \psi) = Cos.a\, Sin.(\tfrac{1}{2}\alpha + \phi),$$

en

$$Cos.(\tfrac{1}{2}\beta - \psi) = Cos.a\, Sin.(\tfrac{1}{2}\alpha - \phi),$$

waarvan de som en het verschil geeft

$$Cos(\tfrac{1}{2}\beta + \psi) + Cos.(\tfrac{1}{2}\beta - \psi) = Cos\, a \{Sin.(\tfrac{1}{2}\alpha + \phi) + Sin.(\tfrac{1}{2}\alpha - \phi)\},$$

en

$$Cos.(\tfrac{1}{2}\beta + \psi) - Cos.(\tfrac{1}{2}\beta - \psi) = Cos.a \{Sin.(\tfrac{1}{2}\alpha + \phi) - Sin.(\tfrac{1}{2}\alpha - \phi)\},$$

hetgeen, ontwikkeld zijnde, geeft

$$\left.\begin{aligned} Cos.\tfrac{1}{2}\beta\, Cos.\psi &= Cos.a\, Sin.\tfrac{1}{2}\alpha\, Cos.\phi \\ \text{en} \quad -Sin.\tfrac{1}{2}\beta\, Sin.\psi &= Cos.a\, Cos.\tfrac{1}{2}\alpha\, Sin.\phi \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (A).$$

Onder de verschillende wijzen, op welke deze vergelijkingen kunnen worden opgelost, komt ons deze de eenvoudigste voor. Men schrijve dezelve onder den vorm

$$\frac{Cos.\psi}{Cos.\phi} = \frac{Cos.a\, Sin.\frac{1}{2}\alpha}{Cos.\frac{1}{2}\beta} \quad \text{en} \quad \frac{Sin.\psi}{Sin.\phi} = -\frac{Cos.a\, Cos.\frac{1}{2}\alpha}{Sin.\frac{1}{2}\beta} \quad . \; (B),$$

of

of $\frac{Cos^2.\psi}{Cos^2.\phi} = \frac{Cos^2.a\,Sin^2\,\frac{1}{2}a}{Cos^2.\frac{1}{2}\beta}$ en $\frac{Sin^2.\psi}{Sin^2.\phi} = \frac{Cos^2.a\,Cos^2\,\frac{1}{2}a}{Sin^2.\frac{1}{2}\beta}$.

Verminderen wij nu de eerste met 1 en trekken wij de tweede van 1 af; dan komt er

$$\frac{Cos^2.\psi - Cos^2.\phi}{Cos^2.\phi} = \frac{Cos^2.a\,Sin^2.\frac{1}{2}a - Cos^2.\frac{1}{2}\beta}{Cos^2.\frac{1}{2}\beta},$$

en
$$\frac{Sin^2.\phi - Sin^2.\psi}{Sin^2.\phi} = \frac{Sin^2.\frac{1}{2}\beta - Cos^2.a\,Cos^2.\frac{1}{2}a}{Sin^2.\frac{1}{2}\beta};$$

maar men weet uit de gonometrie, dat $Sin^2.\phi - Sin^2.\psi = Cos^2.\psi - Cos^2.\phi$ is; deelende dus de twee laatste vergelijkingen door elkander, dan verkrijgt men

$$Tang^2.\phi = Tang^2.\tfrac{1}{2}\beta \times \frac{Cos^2.a\,Sin^2.\frac{1}{2}a - Cos^2.\frac{1}{2}\beta}{Sin^2.\frac{1}{2}\beta - Cos^2.a\,Cos^2.\frac{1}{2}a},$$

en
$$Tang.\phi = Tang.\tfrac{1}{2}\beta \times \sqrt{\frac{Cos^2.a\,Sin^2.\frac{1}{2}a - Cos^2.\frac{1}{2}\beta}{Sin^2.\frac{1}{2}\beta - Cos^2.a\,Cos^2.\frac{1}{2}a}}.$$

Hierdoor is nu ook gemakkelijk de waarde van ψ te vinden; want deelende de vergelijkingen (B) door elkander, zoo vinden wij

$$Tang.\psi = -Tang.\phi \times \frac{Cot.\frac{1}{2}a}{Tang.\frac{1}{2}\beta},$$

en hierin de waarde van $Tang.\phi$ overbrengende, komt er

$$Tang.\psi = -Cot.\tfrac{1}{2}a\sqrt{\frac{Cos^2.a\,Sin^2.\frac{1}{2}a - Cos^2.\frac{1}{2}\beta}{Sin^2.\frac{1}{2}\beta - Cos^2.a\,Cos^2.\frac{1}{2}a}}.$$

Door deze formule ϕ en ψ gevonden hebbende, is $B = \frac{1}{2}\beta + \psi$ en $C = \frac{1}{2}\beta - \psi$ mede bekend, en de drie zijden kunnen dan verder, door de gewone regels, uit de drie bekende hoeken gevonden worden.

Aanmerking. Zie hier nog eene andere handelwijze, waardoor de vergelijkingen (A) gemakkelijk worden opgelost. Men vermenigvuldige de eerste met $2\,Cos.\frac{1}{2}a$ en de tweede met $2\,Sin.\frac{1}{2}a$, en verkrijgt, na beide in het vierkant verheven te hebben,

$$4\,Cos^2.\tfrac{1}{2}\beta\,Cos^2.\tfrac{1}{2}a\,Cos^2.\psi = Cos^2.a\,Sin^2.a\,Cos^2.\phi,$$

en
$$4\,Sin^2.\tfrac{1}{2}\beta\,Sin^2.\tfrac{1}{2}a\,Sin^2.\psi = Cos^2.a\,Sin^2.a\,Sin^2.\phi;$$

en nemende hiervan de som, dan verdwijnt ϕ, en er komt

$$4(Cos^2.\tfrac{1}{2}\beta\,Cos^2.\tfrac{1}{2}a\,Cos^2.\psi + Sin^2.\tfrac{1}{2}\beta\,Sin^2.\tfrac{1}{2}a\,Sin^2.\psi) = Cos^2.a\,Sin^2.a.$$

Ook deze vergelijking kan op verschillende wijzen worden opgelost.

lost. Schrijft men namelijk $1 - Sin^2.\phi$ in plaats van $Cos^2.\phi$ of $1 - Cos^2.\phi$ in plaats van $Sin^2.\phi$, dan zal men uit dezelve, of $Sin.\phi$ of $Cos.\phi$ kunnen vinden. Men kan echter ook den volgenden weg inslaan. Daar $Cos^2.\psi = \frac{1}{2}(1 + Cos.^2\psi)$ en $Sin^2.\psi = \frac{1}{2}(1 - Cos.^2\psi)$ is, gaat onze vergelijking over in

$$(Cos^2.\tfrac{1}{2}\beta Cos^2.\tfrac{1}{2}\alpha + Sin^2.\tfrac{1}{2}\beta Sin^2.\tfrac{1}{2}\alpha) + (Cos^2.\tfrac{1}{2}\beta Cos^2.\tfrac{1}{2}\alpha - Sin^2.\tfrac{1}{2}\beta Sin^2.\tfrac{1}{2}\alpha)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ Cos.2\psi = \tfrac{1}{2} Cos^2.\alpha\ Sin^2.\alpha.$$

Verder is, door dezelfde formulen,

$$Cos^2.\tfrac{1}{2}\beta Cos^2.\tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{4}(1 + Cos.\beta)(1 + Cos\ \alpha) = \tfrac{1}{4}(1 + Cos.\alpha + Cos.\beta + Cos.\alpha Cos.\beta),$$

$$Sin^2.\tfrac{1}{2}\beta Sin^2.\tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{4}(1 - Cos.\beta)(1 - Cos\ \alpha) = \tfrac{1}{4}(1 - Cos\ \alpha - Cos.\beta + Cos\ \alpha Cos.\beta),$$

waaruit door optelling en aftrekking volgt

$$Cos^2.\tfrac{1}{2}\beta Cos^2.\tfrac{1}{2}\alpha + Sin^2.\tfrac{1}{2}\beta Sin^2.\tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}(1 + Cos\ \alpha Cos\ \beta),$$

$$Cos^2.\tfrac{1}{2}\beta Cos^2.\tfrac{1}{2}\alpha - Sin^2.\tfrac{1}{2}\beta Sin^2.\tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}(Cos.\alpha + Cos.\beta),$$

en hierdoor gaat onze vergelijking over in

$$(1 + Cos.\alpha Cos.\beta) + (Cos.\alpha + Cos.\beta)\ Cos.2\psi = Cos^2.\alpha\ Sin^2.\alpha,$$

waaruit $Cos.2\psi = \dfrac{1 + Cos.\alpha Cos.\beta - Cos^2.\alpha Sin^2.\alpha}{Cos.\alpha + Cos.\beta}$,

en hierdoor wordt dan al het overige gemakkelijk gevonden.

CXV. VOORSTEL.

Door J. Bassan.

Er is eene opklimmende rekenkunstige reeks van 4 termen. Worden deze termen, een voor een, in zeker onbekend getal gedeeld, dan bezitten de quotienten de volgende eigenschappen. Het product der middelste staat tot het product der uiterste gelijk de tweede term van de reeks tot den derden. Addeert men de quotienten achtervolgens tot de overeenkomstige termen van de reeks, zoo zal de tweede som even groot zijn als de derde, en het quadraat van de helft van eene dezer gelijke sommen is gelijk aan het opgetelde van de eerste en de vierde som. Men vraagt de termen van deze reeks te bepalen?

Opgelost *door* J. Bassan, L. J. Ulman, A. B. de Bock, Jun. en J. Jonkheert.

Oplossing *van* J. Bassan.

Stel de reeks x, $x+y$, $x+2y$, $x+3y$ en het onbekende getal z, dan zijn de achtervolgende quotienten

$$\frac{z}{x},\ \frac{z}{x+y},\ \frac{z}{x+2y},\ \frac{z}{x+3y},$$

vol-

volgens de eerste voorwaarde is dus

$$\frac{z^2}{(x+y)(x+2y)} : \frac{z^2}{x(x+3y)} = x+y : x+2y,$$

of $$x(x+3y)(x+2y) = (x+y)^2(x+2y),$$

dat is, door $x+2y$ deelende,

$$x(x+3y) = (x+y)^2,$$

of $$x^2+3xy = x^2+2xy+y^2,$$

dat is $$xy = y^2,$$

zoodat $x=y$, waaruit volgt, dat de reeks ook aldus kan worden geschreven

$$x, \quad 2x, \quad 3x \quad \text{en} \quad 4x,$$

en de quotienten zijn alsdan

$$\frac{z}{x}, \quad \frac{z}{2x}, \quad \frac{z}{3x}, \quad \frac{z}{4x},$$

en deze bij de overeenkomstige termen optellende, komt er

$$x+\frac{z}{x}, \quad 2x+\frac{z}{2x}, \quad 3x+\frac{z}{3x}, \quad 4x+\frac{z}{4x}.$$

Daar nu de tweede en derde dezer sommen even groot moeten zijn, zoo is

$$2x+\frac{z}{2x} = 3x+\frac{z}{3x},$$

of $$12x^2+3z = 18x^2+2z,$$

dus $$z = 6x^2.$$

De vier sommen $x+\frac{z}{x}$, $2x+\frac{z}{2x}$, $3x+\frac{z}{3x}$ en $4x+\frac{z}{4x}$ gaan hierdoor over in

$$7x, \quad 5x, \quad 5x \quad \text{en} \quad 5\tfrac{1}{2}x,$$

zoodat wij door de laatste voorwaarde van het vraagstuk hebben

$$(\tfrac{5}{2}x)^2 = 7x+5\tfrac{1}{2}x,$$

dat is $$\tfrac{25}{4}x^2 = 12\tfrac{1}{2}x,$$

zoodat $\frac{25}{4}x = \frac{25}{2}$ of $x=2$. Hierdoor is dan ook $y=2$, en de reeks is 2, 4, 6, 8, terwijl het onbekende getal is $z=6x^2=24$.

CXVI. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Men vraagt drie getallen te vinden, zoodanig, dat de som der tweede magten een cubus, en de som der derde magten eene vierde magt is?

Op-

OPLOSSING. *Door* J. BASSAN.

Stellen wij de getallen x, px en qx, dan moeten wij $x^2+p^2x^2+q^2x^2$ tot eene derde magt en $x^3+p^3x^3+q^3x^3$ tot eene vierde magt maken. Stellen wij, ten einde aan de eerste voorwaarde te voldoen,

$$x^2(1+p^2+q^2)=r^3x^3,$$

dan vinden wij, door x^2 deelende,

$$x=\frac{1+p^2+q^2}{r^3},$$

en de drie getallen zullen alzoo, ten einde aan de eerste voorwaarde te voldoen, moeten worden uitgedrukt door

$$\frac{1+p^2+q^2}{r^3},\quad p\times\frac{1+p^2+q^2}{r^3}\quad\text{en}\quad q\times\frac{1+p^2+q^2}{r^3}.$$

De som der cuben van deze getallen is dan

$$\frac{(1+p^3+q^3)(1+p^2+q^2)^3}{r^9},$$

of, wat hetzelfde is,

$$\frac{(1+p^2+q^2)^3}{r^8}\times\frac{1+p^3+q^3}{r},$$

welke nu eene vierde magt moet zijn, waaraan klaarblijkelijk voldaan wordt, door te stellen:

$$\frac{1+p^3+q^3}{r}=s^4(1+p\ +q^2),$$

dat is, door te nemen

$$r=\frac{1+p^3+q^3}{s^4(1+p^2+q^2)}.$$

Hieruit volgt dan, dat aan beide de voorwaarden van het vraagstuk voldaan zal zijn, wanneer wij voor de gevraagde getallen stellen:

$$\frac{s^{12}(1+p^2+q^2)^4}{(1+p^3+q^3)^3},\quad\frac{p(1+p^2+q^2)^4s^{12}}{(1+p^3+q^3)^3},\quad\frac{q(1+p^2+q^2)^4s^{12}}{(1+p^3+q^3)^3},$$

en alsdan zal de som der vierkanten de derde magt worden van

$$\frac{(1+p^2+q^2)^3s^8}{(1+p^3+q^3)^2},$$

terwijl de som der derde magten de vierde magt zal zijn van

$$\frac{(1+p^2+q^2)^3s^9}{(1+p^3+q^3)^2}.$$

Voorbeeld. Nemende $s=1$, $p=2$ en $q=3$, dan zijn de getallen $\frac{2401}{2916}$, $\frac{2401}{1458}$, $\frac{2401}{972}$.

Neemt men, tot ander voorbeeld, $s=1$, $p=1$ en $q=1$, dan worden de drie getallen alle 3. De som der vierkanten is dan 3^2 en de som der cuben 3^4.

CXVII. Voorstel.

Door J. Bassan.

Eene rekenkunstige reeks van drie termen te vinden, zoodanig, dat de som der termen een quadraat en derzelver product een cubus zij?

Opgelost *door* J. Bassan *en* A. B. de Bock Jun.

Oplossing *van* J. Bassan.

Stel de reeks x, $x-y$ en $x-2y$, dan is het product der termen $x(x-y)(x-2y)$, of ontwikkeld

$$x^3-3x^2y+2xy^2 \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

Deze formule wordt klaarblijkelijk eene derde magt, wanneer $y=0$ is, want dan gaat dezelve over in x^3. Hierdoor wordt de reeks x, x, x en de som $3x$, welke klaarblijkelijk een quadraat is, wanneer $x=\frac{1}{3}n^2$ genomen wordt. Men zal dus vooreerst aan het gevraagde kunnen voldoen, door de drie getallen even groot en gelijk een derde van eenig willekeurig vierkant te nemen.

De formule (1) wordt ook een cubus, zoodra $3x^2y=2xy^2$ is, en hieruit volgt $3x=2y$ of $y=\frac{3}{2}x$; de reeks is alsdan x, $-\frac{1}{2}x$ en $-2x$, waarvan de som $-\frac{3}{2}x$ nu nog een quadraat moet zijn. Stelt men alzoo $-\frac{3}{2}x=\frac{x^2}{m^2}$, dan vindt men $x=-\frac{3}{2}m^2$, dus $y=-\frac{9}{4}m^2$, en de reeks is dus $-\frac{3}{2}m^2$, $+\frac{3}{4}m^2$, $+3m^2$.

Nemende tot voorbeeld $m=2$, dan zijn de termen van de reeks -6, $+3$ en $+12$, waarvan de som gelijk 9 of 3^2 en het product -216 of $(-6)^3$ is.

CXVIII. Voorstel.

Door J. Bassan.

Twee getallen te vinden, waarvan het verschil der quadraten een quadraat, en de som der quadraten een cubus is?

Opgelost *door* J. Bassan *en* A. B. de Bock Jun.

Op-

Oplossing van J. Balban.

Stel de getallen x en y, dan moet x^2-y^2 een quadraat en x^2+y^2 een cubus zijn. Stellen wij voor de eerste

$$x^2-y^2=n^2(x+y)^2,$$

dan is

$$x-y=n^2(x+y),$$

waaruit

$$y=x\times\frac{n^2-1}{n^2+1}.$$

Hierdoor gaat x^2+y^2 over in

$$x^2+x^2\times\frac{(n^2-1)^2}{(n^2+1)^2} \text{ of } x^2\times\frac{2(n^4+1)}{(n^2+1)^2},$$

en daar deze uitdrukking een cubus moet zijn, stellen wij dezelve gelijk m^3x^3, waardoor wij vinden

$$x=\frac{2(n^4+1)}{m^3(n^2+1)^2} \text{ en } y=\frac{2(n^4+1)(n^2-1)}{m^3(n^2+1)^3},$$

waarin nu voor m en n geheele of gebrokene getallen naar welgevallen kunnen genomen worden.

Nemende tot voorbeeld $n=2$ en $m=\frac{1}{5}$, dan komt er $x=170$ en $y=102$, en men heeft ook werkelijk $x^2-y^2=136^2$ en $x^2+y^2=34^3$.

CXIX. VOORSTEL.

Door S. Klynsma.

Onderstel dat twee cirkels elkander inwendig aanraken, dan vraagt men binnen de ruimte, welke tusschen derzelver omtrekken gelegen is, twee cirkels te construeren, die elkander en de twee gegevene cirkels aanraken, onder die bepaling, dat de som van derzelver stralen gelijk eene gegevene lijn moet zijn?

Oplossing. Door L. R. Schmidt.

Laat B, *Fig.* 90, het punt wezen, waarin de twee gegevene cirkels, die derzelver middelpunten in C en D hebben, elkander aanraken; terwijl P en Q de middelpunten van de gevraagde cirkels zijn, welke de grootste der twee gegevene cirkels in F en G, en de kleinste in H en I aanraken.

Stellen wij de stralen der gegevene cirkels CB $=r$ en DB $=s$, dan is CD $=r-s$, welke wij kortheidshalve zullen voorstellen door $r-s=m$. Stellen wij verder de stralen van de gevraagde cirkels PF $=$ PL $=$ PH $=x$ en QG $=$ QE $=$ QI $=y$, dan is

$CP = r - x$ en $CQ = r - y$, $DP = s + x$ en $DQ = s + y$, en daar $PQ = a$ gegeven is, hebben wij tot eerste vergelijking

$$x + y = a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Ten einde eene tweede vergelijking tusschen x en y te verkrijgen, trekken wij PP' en QQ' loodregt op AB, en stellen $CP' = u$, $CQ' = u'$, $PP' = v$ en $QQ' = v'$, zijnde het alsdan klaar, dat men hebben zal $PQ^2 = P'Q'^2 + (QQ' - PP')^2$, of

$$(v' - v)^2 = (x + y)^2 - (u - u')^2 \quad \ldots \quad (2),$$

zoodat er nog alleen overblijft, om u, u', v en v' in x, y en de gegevens uit te drukken.

Hiertoe hebben wij vooreerst *drieh.* $CPD = \frac{1}{2} PP' \times CD$ en dus $PP' = v = \frac{2 \times \textit{drieh}\ CPD}{r - s}$; maar het is bekend, dat de drie zijden van een' driehoek α, β en γ zijnde, de inhoud wordt uitgedrukt door

$$I = \tfrac{1}{4} \sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)};$$

daar nu in driehoek PDC de zijden gelijk zijn aan $r - x$, $s + x$ en $r - s$, zoo vinden wij, deze waarden in plaats van α, β en γ substitueerende, *drieh.* $CPD = \sqrt{rs(mx - x^2)}$, en hieruit volgt dus

$$v = \frac{2}{m} \sqrt{rs(mx - x^2)} \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

De zijden van den driehoek CQD gelijk zijnde aan $r - y$, $s + y$ en $r - s$, verschilt deze driehoek met den voorgaanden nergens anders in, dan dat x in y veranderd is, en men heeft dus eveneens

$$v' = \frac{2}{m} \sqrt{rs(my - y^2)} \quad \ldots\ldots \quad (4).$$

Ten einde u en u' in x en y uit te drukken, hebben wij, door de bekende eigenschap der driehoeken, uit den driehoek CPD

$$CP' = \frac{PD^2 - CP^2 - CD^2}{2 . CD},$$

of
$$u = \frac{(s+x)^2 - (r-x)^2 - (r-s)^2}{2m},$$

dat is
$$u = \frac{-r(r-s) + (r+s)x}{m},$$

en

en in aanmerking nemende, dat $r-s=m$ is,

$$u=-r+\frac{r+s}{m}x,$$

waaruit wij, door x in y te veranderen, afleiden

$$u'=-r+\frac{r+s}{m}y,$$

zoodat $$u-u'=\frac{r+s}{m}(x-y) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5).$$

Brengende nu (3), (4) en (5) over in (2), dat is in

$$y'^2+y^2-2y'y=(x+y)^2-(u-u')^2,$$

dan vindt men gemakkelijk

$$\frac{4rs}{m^2}\left\{m(x+y)-(x^2+y^2)\right\}-\frac{8rs}{m^2}\sqrt{xy(m-x)(m-y)} \; . \; .$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . =(x+y)^2-\frac{(r+s)^2}{m^2}(x-y)^2,$$

of, omdat, $x+y=a$ zijnde, $x^2+y^2=a^2-2xy$ en $(x-y)^2=a^2-4xy$ is,

$$\frac{4rs}{m^2}\left\{ma-(a^2-2xy)\right\}-\frac{8rs}{m^2}\sqrt{xy\,(m^2-am+xy)} \; . \; .$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . =a^2-\frac{(r+s)^2}{m^2}(a^2-4xy),$$

dat is, wanneer wij met m^2 vermenigvuldigen, alles naar de magten van xy rangschikken, en in aanmerking nemen, dat $m^2=(r-s)^2$ is,

$$4rsa(m-a)+8rsxy-8rs\sqrt{(x^2y^2+m(m-a)xy)}= \; . \; .$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . -4rsa^2+4(r+s)^2xy,$$

welke gemakkelijk herleid wordt tot

$$2rs\sqrt{(x^2y^2+m(m-a)xy)}=mrsa-(r^2+s^2)xy \; . \; (a),$$

waarvan het vierkant is

$$4r^2s^2x^2y^2+4r^2s^2(m-a)mxy=m^2r^2s^2a^2 \; . \; . \; .$$

$$. \; . \; . \; . -2mrsa(r^2+s^2)xy+(r^2+s^2)^2x^2y^2,$$

welke, altijd in het oog houdende, dat $m=r-s$ is, gemakkelijk herleid wordt tot

$$m^2(r+s)^2x^2y^2-2mrs\left\{2rs(m-a)+a(r^2+s^2)\right\}xy+m^2r^2s^2a^2=0,$$

dat is, door m deelende en verder herleidende, tot

$$m(r+s)^2x^2y^2-2rs(rsm+am^2)xy+mr^2s^2a^2=0,$$

 of

of $$x^2y^2 - \frac{2rs(2rs+am)}{(r+s)^2}xy + \frac{r^2s^2a^2}{(r+s)^2} = o,$$

uit welke vierkantsvergelijking, na behoorlijke herleiding, gevonden wordt

$$xy = \frac{rs}{(r+s)^2}\left\{2rs+am-2\sqrt{rs(rs+a(m-a))}\right\} \quad (\beta).$$

Deze gevondene waarde van $xy = b$ ftellende, hebben wij $x+y=a$ en $xy=b$, waaruit $x-y=\sqrt{(a^2-4b)}$ en bij gevolg $x=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{(a^2-4b)}$ en $y=\frac{1}{2}a-\sqrt{(a^2-4b)}$.

Wij hebben in de waarde van xy alleen het negatieve teeken voor het wortelteeken geplaatst, omdat de waarden van x en y en dus ook die van xy klaarblijkelijk gelijk o moeten worden, wanneer $a=o$ is. Hieraan voldoet nu dit benedenfte teeken, terwijl het tweede zou geven $xy=\frac{4r^2s^2}{(r+s)^2}$, welke tweede waarde van xy alzoo niet aan ons vraagftuk beantwoordt, en door het quadrateren van de vergelijking (α) is ingevoerd.

De waarden van x en y gevonden hebbende, zijn ook die van $r-x$, $r-y$, $s+x$ en $s+y$ bekend, waardoor dan de middelpunten P en Q gemakkelijk geconftrueerd kunnen worden.

Neemt men tot voorbeeld $r=2s$ en $a=s$, dan vindt men $xy=\frac{2}{9}s^2$, waaruit verder gevonden wordt $x=\frac{2}{3}s$ en $y=\frac{1}{3}s$, zoodat men in dit geval, *Fig.* 91, zal hebben CP$=\frac{4}{3}s$, DP$=\frac{5}{3}s$, CQ$=\frac{5}{3}s$ en DQ$=\frac{4}{3}s$, waaruit nog blijkt, dat in dit bijzonder geval de vierhoek CDPQ in eenen regthoek overgaat.

Aanmerking. De oplosfing van dit vraagftuk ftaat in verband met die van het Voorstel CCXLVIII, *Deel* II, van het *Wiskunstig Mengelwerk*; in welke oplosfing de Heer Bangma op eene allezins merkwaardige wijze tot de vergelijking

$$\sqrt{\left(\frac{rsm}{y}-rs\right)}-\sqrt{\left(\frac{rsm}{x}-rs\right)}=m$$

geraakt. Deze vergelijking met $x+y=a$ verbindende, komt men op dezelfde waarde van xy neder, welke wij in (β) gevonden hebben.

Wij kunnen eindelijk niet nalaten op te merken, dat de Heer Bangma in gemeld vraagftuk heeft aangewezen, dat de middelpun-

punten van al de cirkels, die tusschen de omtrekken van den gegevenen cirkel zoodanig getrokken kunnen worden, dat zij dezelve beide aanraken, in den omtrek van eene ellips gelegen zijn, die C en D tot brandpunten heeft, en waarin de uiteinden der groote as gelegen zijn, in het raakpunt B en in het punt R, dat AE midden door deelt. Zulks blijkt terstond hieruit, dat $CP+DP=CQ+DQ=r+s$ is.

CXX. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK JUN.

Van eene meetkunstige reeks, die uit een gegeven aantal termen bestaat, is de som van de a de magten der termen gelijk p, en de som van de b-de magten der termen gelijk q gegeven; men vraagt op welke wijze men door deze gegevens tot de termen van deze reeks kan geraken?

OPGELOST *door* A. B. DE BOCK JUN. *en* J. BASSAN.

OPLOSSING *van* A. B. DE BOCK, JUN.

Stellen wij de reeks x, xy, xy^2, *enz.* tot xy^{n-1}, dan is de som der a-de en de som der b-de magten

$$x^a(1+y^a+y^{2a}+enz. \ldots +y^{(n-1)a})=p,$$

en $$x^b(1+y^b+y^{2b}+enz. \ldots +y^{(n-1)b})=q,$$

of, door de bekende formule voor de som van eene meetkunstige reeks,

$$x^a\times\frac{1-y^{na}}{1-y^a}=p, \quad x^b\times\frac{1-y^{nb}}{1-y^b}=q \ : \ . \ . \ (A).$$

Brengende de eerste dezer vergelijkingen in de magt b en de tweede in de magt a, dan komt er

$$x^{ab}\times\frac{(1-y^{na})^b}{(1-y^a)^b}=p^b, \quad x^{ab}\times\frac{(1-y^{nb})^a}{(1-y^b)^a}=q^a,$$

waarvan het quotient is

$$\frac{(1-y^{na})^b}{(1-y^{nb})^a}\times\frac{(1-y^b)^a}{(1-y^a)^b}=\frac{p^b}{q^a};$$

of $q^a(1-y^{na})^b\times(1-y^b)^a=p^b(1-y^{nb})^a\times(1-y^a)^b=0.$

Wanneer nu a, b, p, q en n gegeven zijn, kan men uit deze vergelijking, welke klaarblijkelijk tot de magt $nab+ab$, of

$ab(n+1)$ opklimt, de waarde van y oplossen, en deze gevonden hebbende, vindt men x door eene der vergelijkingen (A).

AANMERKING. Onze eindvergelijking kan ook aldus geschreven worden

$$q^a \times \left(\frac{1-y^{na}}{1-y^a}\right)^b - p^b \times \left(\frac{1-y^{nb}}{1-y^b}\right)^a = 0.$$

Omdat nu in het algemeen $\frac{1-z^n}{1-z}$ eene geheele functie is, zoo vindt men, door $z=y^a$ of $z=y^b$ te stellen, dat $\frac{1-y^{na}}{1-y^a}$ en $\frac{1-y^{nb}}{1-y^b}$ mede geheele functiën zijn, en wel functiën van den graad $(n-1)a$ en $(n-1)b$; de functiën $\left(\frac{1-y^{na}}{1-y^a}\right)^b$ en $\left(\frac{1-y^{nb}}{1-y^b}\right)^a$ zijn dus beide van de magt $(n-1)ab$, en hieruit blijkt, dat de eindvergelijking *nooit hooger* dan tot de magt $(n-1)ab$ kan opklimmen.

VOORBEELD. Nemen wij $a=1$, $b=2$, $n=4$, $p=15$ en $q=85$, dan hebben wij

$$85\left(\frac{1-y^4}{1-y}\right)^2 - 15^2\left(\frac{1-y^8}{1-y^2}\right) = 0,$$

of, alles door $\frac{1-y^4}{1-y}$ deelende,

$$85\left(\frac{1-y^4}{1-y}\right) - 15^2\frac{1+y^4}{1+y} = 0,$$

dat is $$17(1+y+y^2+y^3)(1+y) - 45(1+y^4) = 0,$$
of $$y^4 - \tfrac{17}{14}y^3 - \tfrac{17}{14}y^2 - \tfrac{17}{14}y + 1 = 0,$$
tellende hierbij aan beide zijden $\frac{2809}{784}y^2$, dan komt er
$$(y^2 - \tfrac{17}{28}y + 1)^2 = (\tfrac{53}{28}y)^2,$$
waaruit $$y^2 - \tfrac{17}{28}y + 1 = \pm\tfrac{53}{28}y,$$
en wij hebben alzoo de twee volgende vierkantsvergelijkingen
$$y^2 - \tfrac{5}{2}y + 1 = 0,$$
en $$y^2 + \tfrac{9}{7}y + 1 = 0,$$
zoodat wij voor y de vier volgende waarden verkrijgen:
$$y=2,\ y=\tfrac{1}{2},\ y=-\tfrac{9}{14}+\tfrac{1}{14}\sqrt{-115},\ y=-\tfrac{9}{14}-\tfrac{1}{14}\sqrt{-115}.$$

De

De eerste waarde van $y=2$ geeft, daar $x=\frac{15(1-y)}{1-y^4}$ is, $x=1$, en dus is de reeks 1, 2, 4, 8.

De tweede waarde $y=\frac{1}{2}$ geeft $x=8$, en hierdoor wordt de reeks 8, 4, 2, 1.

De overige waarden van y geven tot onbestaanbare reeksen aanleiding.

CXXI. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE JUN.

Iemand heeft twee vaatjes wijn, die te zamen 60 stoopen houden en f 120,25 kosten. Het grootste is vol rijnschen wijn en kost f 39 meer dan het kleinste, dat vol franschen wijn is; maar zoo het grootste vat met franschen en het kleinste met rijnschen wijn gevuld ware, dan zouden beiden evenveel kosten. Men vraagt hoeveel stoopen ieder vaatje bevat, en hoeveel de stoop van iedere soort kost? (*)

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, J. BASSAN, H. G. WITLAGE JUN., A. B. DE BOCK JUN., J. JONKHERT *en* N. J. SINGELS.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

Vermits de som en het verschil der prijzen van de twee vaatjes gelijk *f* 120,25 en *f* 39 gegeven is, zoo vindt men, door de halve som en het halve verschil van deze getallen te nemen, voor den prijs van het vaatje rijnschen wijn *f* 79,625, en voor den prijs van het vaatje franschen wijn *f* 40,625.

Stellen wij dus, dat het eerste vaatje R en het tweede F stoopen bevat, dan kost de stoop rijnsche wijn $\frac{79,625}{R}$ en de stoop fransche wijn $\frac{40,625}{F}$ gulden.

Hieruit volgt dan, dat wanneer de vaatjes volgens de tweede voorwaarde gevuld waren, derzelver prijzen zouden zijn $\frac{R}{F}\times 40,625$ en $\frac{F}{R}\times 79,625$ guldens; maar deze prijzen moeten dezelfde wezen, en dus is

(*) P. J. PRINSEN, *Algebra*, pag. 81. N°. 37.

$\frac{R}{F}$

$$\frac{R}{F}\times 40,625=\frac{F}{R}\times 79,625,$$

of $$R^2 : F^2 = 79625 : 40625,$$

dat is, de laatste termen door $5\times5\times5\times13$ deelende,

$$R^2 : F^2 = 49 : 25,$$

of $$R : F = 7 : 5,$$

zoodat $$R+F:12=R:7=F:5.$$

Maar volgens de opgaaf is $R+F=60$ stoopen, en dus

$$R:7=F:5=60:12=5:1,$$

waaruit $R=35$ en $F=25$ stoopen, en de prijs van de stoop rijnschen en franschen wijn is dus

$$\frac{79,625}{35}=f\ 2,275 \quad \text{en} \quad \frac{40,625}{25}=f\ 1,625.$$

CXXII. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE JUN.

Iemand koopt tweeërlei goederen, en geeft voor iedere soort 192 gulden. Van de eerste soort is 72 pond meer dan van de andere, en het pond van de tweede soort kost 6 gulden meer dan het pond van de eerste. Hoeveel pond was er van iedere soort gekocht en tegen welken prijs? (*)

OPGELOST *door* H. G. WITLAGE JUN., L. J. ULMAN, A. B. DE BOCK JUN., J. BASSAN, J. JONKHERT *en* N. J. SINGELS.

OPLOSSING *van* H. G. WITLAGE JUN.

Stel dat het pond van de eerste soort kost $x-3$ gulden, dan kost het pond van de tweede soort $x+3$ gulden. Het aantal ponden van de eerste en van de tweede soort is dus $\frac{192}{x-3}$ en $\frac{192}{x+3}$; daar er nu van de eerste soort 72 pond meer dan van de tweede soort gekocht is, zoo is

$$\frac{192}{x-3}-\frac{192}{x+3}=72,$$

of, door 24 deelende en met x^2-9 vermenigvuldigende,

$$48=3(x^2-9),$$

of $$x^2-9=16.$$

Hier-

(*) P. J. PRINSEN, *Algebra*, *pag.* 76. N°. 17.

Hieruit is $x^2 = 25$ dus $x = 5$; het pond van de eerste soort kost dus $x - 3 = 2$, en het pond van de tweede soort $x + 3 = 8$ gulden; terwijl er $\frac{192}{2} = 96$ en $\frac{192}{8} = 24$ ponden van de eerste en tweede soort gekocht is.

CXXIII. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE JUN.

Uit twee plaatsen A *en* B *vertrokken, gelijktijdig en langs denzelfden weg, twee personen, die wij* A' *en* B' *zullen noemen, en kwamen elkander te gemoet. Ieder van dezelve liep voortdurend met eenparige snelheid. Elkander ontmoetende zeide* A': *ik heb tot heden toe 20 mijlen meer afgelegd dan gij, en in* $6\frac{2}{3}$ *dag zooveel mijlen gegaan als gij tot nog toe afgelegd hebt. Het zij zoo, antwoordde* B', *maar ik zal, wanneer ik dagelijks zoo veel mijlen blijf afleggen als ik tot hiertoe gedaan heb, na nog 15 dagen in* A *zijn. Men vraagt, hoeveel mijlen de plaatsen van elkander liggen, en hoeveel mijlen ieder gereisd had, toen zij elkander spraken?* (*)

OPGELOST *door* H. G. WITLAGE JUN., L. J. ULMAN, J. BASSAN, A. B. DE BOCK JUN., J. JONKHEERT *en* N. J. SINGELS.

OPLOSSING *van* H. G. WITLAGE JUN.

Stel dat, bij de ontmoeting, elk x dagen op reis is geweest, en dat A' alstoen y mijlen had afgelegd, dan loopt A' elken dag $\frac{y}{x}$ mijlen, en dus in 15 dagen $15 \times \frac{y}{x}$ mijlen; waaruit voor de lengte van den geheelen weg, of voor den afstand der twee plaatsen, volgt $y + 15 \times \frac{y}{x}$ mijlen.

Omdat B' in $6\frac{2}{3}$ dagen de weg van A', dat is, y mijlen heeft afgelegd, zoo loopt hij in elken dag $\frac{3}{20}y$ en dus in x dagen $\frac{3}{20}xy$ mijlen af. Dit is dan nu de geheele afgelegde weg van B', en daar dezelve, met dien van A' vereenigd, den geheelen afstand der twee plaatsen moet uitmaken, zoo is deze afstand $y + \frac{3}{20}xy$.

De twee uitdrukkingen, die wij voor dezen afstand vonden, aan elkander gelijk stellende, verkrijgen wij

$y+$

(*) P. J. PRINSEN, *Algebra*, *pag.* 82. N°. 40.

$$y + 15 \times \frac{y}{x} = y + \tfrac{3}{20} x y,$$

of $15y = \frac{3}{20} x^2 y$, dus $x^2 = 100$ en $x = 10$. De perſonen zijn dus 10 dagen onder weg geweest eer zij elkander ontmoetten.

Wij vonden voor de wegen, door B′ en A′ doorloopen, $\frac{3}{20} x y$ en y, of, daar $x = 10$ is, $\frac{3}{2} y$ en y; maar ingevolge de opgaaf moet de eerſte 20 mijlen langer dan de tweede zijn, en dus is $\frac{3}{2} y - y = 20$ of $\frac{1}{2} y = 20$ en dus $y = 40$.

De weg van A′ is dus 40 mijlen, en de weg van B′ is $\frac{3}{2} y = 60$ mijlen, zoodat de afſtand tusſchen de twee plaatſen 100 mijlen is.

Eindelijk is de weg, dien A′ elken dag doorliep, $\frac{y}{x} = 4$ mijlen, terwijl B′ elken dag $\frac{3}{20} y = 6$ mijlen doorloopen heeft.

CXXIV. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK JUN.

Van twee cirkels, welke elkander ſnijden, is gegeven de inhoud van het ſtuk, dat zij met elkander gemeen hebben, benevens de twee hoeken, gevormd door de ſtralen, die in elken der cirkels naar de ſnijpunten getrokken worden. Men vraagt hierdoor de ſtralen van de cirkels te bepalen?

OPGELOST *door* A. B. DE BOCK JUN., J. BASSAN, L. J. ULMAN *en* J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* A. B. DE BOCK JUN.

Laat A en B, *Fig.* 92, de middelpunten van de cirkels zijn, en ſtellen wij den inhoud van het ſtuk CEDF gelijk A, de hoeken CBD en CAD gelijk α en β, en de ſtralen BC $= x$ en AC $= y$. Men heeft alsdan, volgens de bekende formule, voor den inhoud van een cirkel-ſegment (LACROIX, *Beginſelen der Trigonometrie, blz.* 57, § 46)

$$\textit{Segment}\ \mathrm{CEDC} = \tfrac{1}{2} x^2 (\alpha - \mathrm{Sin}.\,\alpha),$$

$$\textit{Segment}\ \mathrm{CFDC} = \tfrac{1}{2} y^2 (\beta - \mathrm{Sin}.\,\beta),$$

hetgeen ons de volgende vergelijking geeft

$$x^2(\alpha - \mathrm{Sin}.\,\alpha) + y^2(\beta - \mathrm{Sin}.\,\beta) = 2\,\mathrm{A} \quad . \; : \; . \quad (1).$$

Verder is in de driehoeken CGB en CGA

$$\mathrm{CG} = \mathrm{CB} \times \mathrm{Sin}.\,\mathrm{CBG} = x\,\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}\alpha,$$

en

$$\mathrm{CG} = \mathrm{AC} \times \mathrm{Sin}.\,\mathrm{CAG} = y\,\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}\beta,$$

en

en deze waarden aan elkander gelijk ftellende,

$$x \, Sin. \tfrac{1}{2}\alpha = y \, Sin. \tfrac{1}{2}\beta \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Brengen wij de tweede in het vierkant, dan komt er

$$x^2 \, Sin^2. \tfrac{1}{2}\alpha = y^2 \, Sin^2. \tfrac{1}{2}\beta,$$

zoodat $x^2 = y^2 \frac{Sin^2. \frac{1}{2}\beta}{Sin^2. \frac{1}{2}\alpha}$ en $y^2 = x^2 \frac{Sin^2. \frac{1}{2}\alpha}{Sin^2. \frac{1}{2}\beta}$,

welke beurtelings in (1) overgebragt, geven

$$y^2 \left\{ \frac{Sin^2. \frac{1}{2}\beta}{Sin^2. \frac{1}{2}\alpha}(\alpha - Sin.\alpha) + (\beta - Sin.\beta) \right\} = 2\,A,$$

en $$x^2 \left\{ \frac{Sin^2. \frac{1}{2}\alpha}{Sin^2. \frac{1}{2}\beta}(\beta - Sin.\beta) + (\alpha - Sin.\alpha) \right\} = 2\,A,$$

zoodat $$y^2 = \frac{2\,A \, Sin^2. \frac{1}{2}\alpha}{Sin^2. \frac{1}{2}\beta(\alpha - Sin.\alpha) + Sin^2. \frac{1}{2}\alpha(\beta - Sin.\beta)},$$

en $$x^2 = \frac{2\,A \, Sin^2. \frac{1}{2}\beta}{Sin^2. \frac{1}{2}\beta(\alpha - Sin.\alpha) + Sin^2. \frac{1}{2}\alpha(\beta - Sin\,\beta)}.$$

De gevraagde ftralen zijn dus

$$y = Sin. \tfrac{1}{2}\alpha \times \sqrt{\frac{2\,A}{Sin^2. \frac{1}{2}\beta(\alpha - Sin.\alpha) + Sin^2. \frac{1}{2}\alpha(\beta - Sin.\beta)}},$$

$$x = Sin. \tfrac{1}{2}\beta \times \sqrt{\frac{2\,A}{Sin^2. \frac{1}{2}\beta(\alpha - Sin.\alpha) + Sin^2. \frac{1}{2}\alpha(\beta - Sin\,\beta)}}.$$

CXXV. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK JUN.

Men vraagt de oneindige reeks $n + a + \frac{bc}{1-c} Log.a - \frac{bc^n}{1-c} \times Log.a + \frac{b^2c^2}{1-c^2} \cdot \frac{Log^2.a}{1.2} - \frac{b^2c^{2n}}{1-c^2} \cdot \frac{Log^2.a}{1.2} + \frac{b^3c^3}{1-c^3} \cdot \frac{Log^3.a}{1.2.3} - \frac{b^3c^{3n}}{1-c^3} \cdot \frac{Log^3.a}{1.2.3}$ *+ enz. te fommeren, dat wil zeggen, tot een eindig aantal termen te herleiden? Alles in de onderftelling, dat n een geheel pofitief getal is.*

OPLOSSING. *Door* A. B. DE BOCK JUN.

Wanneer men elke twee termen, waarin dezelfde magt van $Log.a$ voorkomt, tot eenen term vereenigt, zoo verkrijgt men, de gevraagde fom S ftellende, vooreerst

S =

$$S = n + a + \frac{bc - bc^n}{1 - c} \cdot \frac{Log.\,a}{1} + \frac{b^2c^2 - b^2c^{2n}}{1 - c^2} \cdot \frac{Log^2.\,a}{1.2} + \ldots$$

$$\ldots \frac{b^3c^3 - b^3c^{3n}}{1 - c^3} \cdot \frac{Log^3.\,a}{1.2.3} + \frac{b^4c^4 - b^4c^{4n}}{1 - c^4} \cdot \frac{Log^4.\,a}{1.2.3.4} + enz.$$

of, wat hetzelfde is,

$$S = n + a + bc.\frac{1 - c^{n-1}}{1 - c} \cdot \frac{Log.\,a}{1} + b^2c^2.\frac{1 - c^{2n-2}}{1 - c^2} \cdot \frac{Log^2\,a}{1.2} + \ldots$$

$$\ldots b^3c^3.\frac{1 - c^{3n-3}}{1 - c^3} \cdot \frac{Log^3.\,a}{1.2.3} + b^4c^4.\frac{1 - c^{4n-4}}{1 - c^4} \cdot \frac{Log^4.\,a}{1.2.3.4} + enz.$$

Verrigten wij voorts al de aangewezene deelingen, dan komt er

$$\begin{aligned} S &= a + n \\ &+ b.c\,(1 + c + c^2 + enz. \ldots + c^{n-2})\,\frac{Log.\,a}{1} \\ &+ b^2c^2(1 + c^2 + c^4 + enz. \ldots + c^{2n-4})\,\frac{Log^2.\,a}{1.2} \\ &+ b^3c^3(1 + c^3 + c^6 + enz. \ldots + c^{3n-6})\,\frac{Log^3.\,a}{1.2.3} \\ &+ b^4c^4(1 + c^4 + c^8 + enz. \ldots + c^{4n-8})\,\frac{Log^4.\,a}{1.2.3.4} \\ &+ enz. \end{aligned}$$

of, de vermenigvuldigingen verrigtende,

$$\begin{aligned} S &= a + n \\ &+ (b\,c + b\,c^2 + b\,c^3 + enz. \ldots + b\,c^{n-1})\,\frac{Log.\,a}{1} \\ &+ (b^2c^2 + b^2c^4 + b^2c^6 + enz. \ldots + b^2c^{2n-2})\,\frac{Log^2.\,a}{1.2} \\ &+ (b^3c^3 + b^3c^6 + b^3c^9 + enz. \ldots + b^3c^{3n-3})\,\frac{Log^3.\,a}{1.2.3} \\ &+ (b^4c^4 + b^4c^8 + b^4c^{12} + enz. \ldots + b^4c^{4n-4})\,\frac{Log^4.\,a}{1.2.3.4} \\ &+ enz. \end{aligned}$$

welke reeks nu nog uit een oneindig aantal termen of horizontale rijen bestaat.

Deze reeks kan echter op eene geheel andere wijze geschreven worden; want schrijven wij al de termen, die in eene zelfde verticale rij voorkomen, in horizontale rijen, dan zal elke hori-

rizontale rij uit een oneindig aantal termen bestaan, terwijl het aantal dezer horizontale rijen alsdan bepaald en wel gelijk $n-1$ zal zijn. Wij verkrijgen alzoo door deze herleiding

$$S = a+n$$
$$+\left\{bc\frac{Log.a}{1}+b^2c^2\frac{Log^2.a}{1.2}+b^3c^3\frac{Log^3\,a}{1.2.3}+enz\right\}$$
$$+\left\{bc^2\frac{Log.a}{1}+b^2c^4\frac{Log^2.a}{1.2}+b^3c^6\frac{Log^3.a}{1\,2.3}+enz.\right\}$$
$$+\left\{bc^3\frac{Log.a}{1}+b^2c^6\frac{Log^2.a}{1.2}+b^3c^9\frac{Log^3.a}{1.2.3}+enz\right\}$$
$$+\left\{bc^4\frac{Log.a}{1}+b^2c^8\frac{Log^2.a}{1.2}+b^3c^{12}\frac{Log^3.a}{1.2.3}+enz.\right\}$$
$$+\ enz.$$
$$+\left\{bc^{n-1}\frac{Log.a}{1}+b^2c^{2n-2}\frac{Log^2\,a}{1.2}+b^3c^{3n-3}\frac{Log^3.a}{1.2\,3}+enz.\right\}.$$

Deze reeks bestaat nu, den term $a+n$ niet mederekenende, uit $n-1$ termen, of oneindig voortloopende horizontale rijen. Tellende alzoo bij elke dezer rijen de eenheid op, dan zullen wij, ten einde S onveranderd te laten, n met $n-1$ moeten verminderen, waardoor $a+n$ zal overgaan in $1+a$, zoodat door deze herleiding S de volgende gedaante verkrijgt:

$$S = a+1$$
$$+\left\{1+\frac{bc\,Log.a}{1}+\frac{(bc\,Log.a)^2}{1.2.}+\frac{(bc\,Log.a)^3}{1.2.3}+enz.\right\}$$
$$+\left\{1+\frac{bc^2\,Log.a}{1}+\frac{(bc^2\,Log.a)^2}{1.2}+\frac{(bc^2\,Log.a)^3}{1.2\,3}+enz.\right\}$$
$$+\left\{1+\frac{bc^3\,Log.a}{1}+\frac{(bc^3\,Log.a)^2}{1.2}+\frac{(bc^3\,Log.a)^3}{1.2\,3}+enz.\right\}$$
$$+\left\{1+\frac{bc^4\,Log.a}{1}+\frac{(bc^4\,Log.a)^2}{1.2}+\frac{(bc^4\,Log.a)^3}{1.2.3}+enz.\right\}$$
$$+\ enz.$$
$$+\left\{1+\frac{bc^{n-1}\,Log.a}{1}+\frac{(bc^{n-1}\,Log.a)^2}{1.2}+\frac{(bc^{n-1}\,Log.a)^3}{1.2.3}+enz.\right\}.$$

Daar eindelijk in het algemeen is

$$x^y = 1+\frac{y\,Log.x}{1}+\frac{(y\,Log.x)^2}{1.2}+\frac{(y\,Log.x)^3}{1.2.3}+enz.$$

en

en al de horizontale reijn van S dezen vorm hebben, zoo verkrijgen wij

$$S = 1 + a + a^{(bc)} + a^{(bc^2)} + a^{(bc^3)} + \text{enz.} \ldots + a^{(bc^{n-1})},$$

welke nu uit $n+1$ en dus uit een eindig aantal termen bestaat.

De wet, welke er in de achtervolgende termen dezer reeks bestaat, is te duidelijk om verklaring te behoeven; doch men lette op, dat dezelve eerst bij den derden term aanvangt. Voorts is het duidelijk, dat hier overal de logarithmen als neperiaansche logarithmen beschouwd worden, waaruit volgt, dat indien in de opgegevene reeks de gewone logarithmen bedoeld waren, men zou vinden:

$$S = 1 + a + a^{(mbc)} + a^{(mbc^2)} + a^{(mbc^3)} + \text{enz.} + a^{(mbc^{n-1})},$$

waarin dan m den modulus beteekent.

CXXVI. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK JUN.

In eenen vierhoek ABCD, *Fig.* 93, *zijn uit het hoekpunt* B *twee lijnen* BE *en* BF *tot aan de diagonaal* AC *getrokken, en de punten* E *en* F *vereenigd met het hoekpunt* D. *Wanneer nu gegeven zijn de stukken* AE *en* FC, *de hoeken* ABE, EBF *en* FBC, *en de lijnen* ED *en* FD, *dan vraagt men, hoe de zijden van dezen vierhoek kunnen worden berekend?*

OPGELOST *door* I. R. SCHMIDT, A. B. DE BOCK JUN. en J. BASSAN.

OPLOSSING *van* I. R. SCHMIDT.

Stellen wij AE $=a$, FC $=b$, DE $=c$, DF $=d$, ABE $=\alpha$, EBF $=\beta$, FBC $=\gamma$, AB $=u$, EB $=y$, BF $=z$, BC $=v$, AD $=s$, DC $=t$ en EF $=x$, dan hebben wij in de driehoeken AEB en AFB

$$a : y = Sin.\alpha : Sin.BAC,$$

en $$z : a+x = Sin.BAC : Sin.(\alpha+\beta).$$

Hieruit volgt, door vermenigvuldiging der overeenkomstige termen,

$$az : y(a+x) = Sin.\alpha : Sin.(\alpha+\beta),$$

waaruit $$a+x = a.\frac{z}{y}.\frac{Sin.(\alpha+\beta)}{Sin.\alpha} \quad \ldots \ldots (1).$$

Uit

Uit de driehoeken CFB en CEB volgt eveneens

$$b : z = Sin.\,y : Sin.\,BCA$$

en $$y : b+x = Sin.\,BCA : Sin.\,(\beta+\gamma),$$

waaruit door vermenigvuldiging volgt

$$by : z(b+x) = Sin.\,y : Sin.\,(\beta+\gamma),$$

en dus $$b+x = b.\frac{y}{z}.\frac{Sin.\,(\beta+\gamma)}{Sin.\,\gamma} \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Vermenigvuldigen wij nu (1) en (2), dan verdwijnen y en z, en wij verkrijgen, ter bepaling van x,

$$(a+x)(b+x) = ab.\frac{Sin.\,(\alpha+\beta)\,Sin.\,(\beta+\gamma)}{Sin.\,\alpha\,.\,Sin.\,\gamma},$$

of $$x^2+(a+b)x = ab\frac{Sin.\,(\alpha+\beta)\,Sin.\,(\beta+\gamma)}{Sin.\,\alpha\,.\,Sin.\,\gamma} - ab,$$

welke vierkantsvergelijking ons geeft

$$x = -\tfrac{1}{2}(a+b) \pm \sqrt{\left\{\frac{Sin.(\alpha+\beta)\,Sin.(\beta+\gamma)}{Sin.\,\alpha\,.\,Sin.\,\gamma}ab + \tfrac{1}{4}(a-b)^2\right\}} \; (*) \; (I),$$

zoodat wij, in den verderen loop van deze oplossing, EF $= x$ als eene bekende zullen beschouwen.

Ten einde AD $= s$ en DC $= t$ te berekenen, hebben wij in de driehoeken DAE en DEF

$$s^2 = a^2 + c^2 + 2ac\,Cos.\,FED\,.$$

en $$d^2 = x^2 + c^2 - 2xc\,Cos.\,FED\,;$$

vermenigvuldigen wij nu de eerste met x en de tweede met a, dan komt er

$$s^2x = a^2x + c^2x + 2acx\,Cos.\,FED$$

en $$d^2a = ax^2 + c^2a - 2acx\,Cos.\,FED,$$

zoodat de som dezer twee vergelijkingen geeft

$$xs^2 + ad^2 = ax(a+x) + c^2(a+x);$$

hieruit s oplossende, vinden wij

$$s = \sqrt{\frac{(ax+c^2)(a+x) - ad^2}{x}} \quad \ldots\ldots \quad (II),$$

en het is gemakkelijk in te zien, dat wij uit de driehoeken DCF en FDE eveneens zullen vinden

$t =$

(*) Deze uitdrukking is dezelfde, welke de Heer DELPRAT op eene andere wijze gevonden heeft in VOORSTEL CXCVIII van het 2de Deel.

$$t=\sqrt{\frac{(bx+d^2)(b+x)-bc^2}{x}} \quad \ldots\ldots (III).$$

Waren eindelijk y en z bekend, dan zouden wij u en v op dezelfde wijze kunnen vinden als wij zoo even s en t berekend hebben. Wij zullen alzoo y en z trachten te bepalen.

Hiertoe hebben wij (1) of (2)

$$y=z.\frac{a\,Sin.(\alpha+\beta)}{(a+x)\,Sin.\,\alpha} \quad \text{of} \quad z=y.\frac{b\,Sin.(\beta+\gamma)}{(b+x)\,Sin.\,\beta};$$

terwijl de driehoek BEF ons bovendien geeft

$$y^2+z^2-2yz\,Cos.\,\beta=x^2 \quad \ldots\ldots (3).$$

In deze vergelijking kunnen wij nu de waarde van y of z overbrengen; bezigen wij de eerste, dan komt er

$$z^2\left\{1+\frac{a^2\,Sin^2.(\alpha+\beta)}{(a+x)^2Sin^2.\alpha}-\frac{2a\,Sin.(\alpha+\beta)\,Cos.\beta}{(a+x)\,Sin.\alpha}\right\}=x^2,$$

of

$$z^2.\frac{a^2Sin^2(\alpha+\beta)-2aSin(\alpha+\beta)Cos.\beta(a+x)Sin.\alpha+(a+x)^2Sin^2.\alpha}{(a+x)^2\,Sin^2.\alpha}=x^2,$$

waaruit voor z gevonden wordt

$$z=\frac{x(a+x)\,Sin.\alpha}{\sqrt{\{a^2Sin^2.(\alpha+\beta)-2a(a+x)Cos.\beta Sin.\alpha Sin.(\alpha+\beta)+(a+x)^2Sin^2\alpha\}}} \quad (IV),$$

en dus door de formule voor y

$$y=\frac{ax\,Sin.(\alpha+\beta)}{\sqrt{\{a^2Sin^2.(\alpha+\beta)-2a(a+x)Cos.\beta\,Sin.\alpha Sin.(\alpha+\beta)+(a+x)^2Sin^2\alpha\}}} \quad (V).$$

Gebruikt men daarentegen de waarde van z, dan geeft de vergelijking (3) ons, op gelijke wijze te werk gaande,

$$y=\frac{x(b+x)\,Sin.\gamma}{\sqrt{\{b^2Sin^2.(\beta+\gamma)-2b(b+x)Cos.\beta Sin.\gamma\,Sin.(\beta+\gamma)+(b+x)^2Sin^2.\gamma\}}} \quad (V)',$$

en

$$z=\frac{bx\,Sin.(\beta+\gamma)}{\sqrt{\{b^2Sin^2.(\beta+\gamma)-2b(b+x)\,Cos.\beta Sin.(\beta+\gamma)+(b+x)^2Sin^2\gamma\}}} \quad (IV)'.$$

Het is volstrekt onverschillig, welke dezer waarden van y en z men gebruikt, daar zij tot dezelfde uitkomsten moeten voeren, wanneer voor x derzelver waarde gesubstitueerd wordt, en zoodra men hierdoor z en y berekend heeft, vindt men, op dezelfde wijze als voor s en t werkende,

$u=$

$$u = \sqrt{\frac{(ax+y^2)(a+x)-ax^2}{x}} \quad \ldots\ldots \text{(VI)},$$

en

$$y = \sqrt{\frac{(bx+z^2)(b+x)-by^2}{x}} \quad \ldots\ldots \text{(VII)},$$

waardoor dan al het gevraagde bepaald is.

CXXVII. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK JUN.

In eenen driehoek ABC, *Fig.* 94, *eene lijn* DE *evenwijdig met* AB *te trekken, zoodanig, dat deze lijn* DE *gelijk zij aan de som van de stukken* AD *en* BE, *door dezelve van de zijden* AC *en* BC *afgesneden?*

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, A. B. DE BOCK JUN., J. JONKHEERT en J. BASSAN.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

De gevraagde lijn wordt gemakkelijk op de volgende wijze geconstrueerd.

Deel de hoeken A en B midden door, en trek door het snijpunt I der deelpunten de lijn DE evenwijdig met AB, dan zal DE de begeerde zijn.

Om dit te betoogen hebben wij alleen op te merken, dat uit de constructie ∠EBI = ∠IBA is; maar uit de evenwijdigheid der lijnen DE en AB volgt ook ∠EIB = ∠IBA. De hoeken EBI en EIB zijn dus even groot, en dus is IE = BE. Op dezelfde wijze blijkt, dat ID = AD is, waaruit volgt DE = AD + BE, dat te bewijzen was.

Men ziet hieruit, dat de gevraagde lijn alleen door het middelpunt van den ingeschrevenen cirkel getrokken moet worden, om aan het begeerde te voldoen.

CXXVIII. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK JUN.

Uit een gegeven punt A, *Fig.* 95, *buiten eene gegevene lijn* PQ, *wordt een onbepaald aantal lijnen* AD *naar deze lijn* PQ *getrokken. Uit de punten* D *worden loodlijnen* DE *op* PQ *opgerigt, en uit* A *loodlijnen op de lijnen* AD, *totdat zij de overeenkomstige lijnen* DE *in* E *doorsnijden. Indien nu op elke der lijnen* DE *een punt* F *zoodanig genomen wordt, dat* $DF = \frac{1}{n}$ DE *is, zoo vraagt men naar de meetkunstige plaats van het punt* F?

Opgelost *door* A. B. de Bock Jun. *en* L. J. Ulman.

Oplossing *van* A. B. de Bock Jun.

Zij $AB = a$ de loodlijn, die uit A op PQ valt, en stellen wij $BG = x$ en $GF = y$, dan is, uit hoofde van de gelijkvormigheid der driehoeken BAD en ADE,

$$AB : AD = AD : DE,$$

en daar $AD = \sqrt{(AB^2 + BD^2)} = \sqrt{(AB^2 + FG^2)} = \sqrt{(a^2 + y^2)}$ is,

$$a : \sqrt{(a^2+y^2)} = \sqrt{(a^2+y^2)} : DE,$$

waaruit
$$DE = \frac{a^2+y^2}{a},$$

en omdat DF, dat is BG, gelijk $\frac{1}{n}ED$ is,

$$x = \frac{a^2+y^2}{na},$$

dus
$$nax = a^2+y^2,$$
of
$$y^2 = anx - a^2.$$

Stelt men nu $y = 0$, dan wordt $x = \frac{a}{n}$, zoodat $BC = \frac{1}{n}a$ nemende, de kromme door C zal gaan. Indien men dus $CG = u$ stelt, dat is de abscisfen van den top C rekent, dan is $x = \frac{1}{n}a + u$, dus $nx = a + nu$, waardoor

$$y^2 = nau.$$

De kromme lijn is dus eene parabool, den top in C hebbende, en waarvan na de parameter is.

CXXIX. Voorstel.

Door A. B. de Bock Jun.

Men vraagt den grootst mogelijken cilinder te beschrijven in het ligchaam, geboren door de omwenteling van de cisfoïde om derzelver as, dat is, om de middellijn, die loodregt op de asymptoot staat?

Oplossing. *Door* I. R. Schmidt.

Zij ZAZ′, *Fig.* 96, de cisfoide en stellen wij $AB = 2r$, $AP = x$ en $PM = y$, dan is (*zie mijne Diff. Rek.* § 118) $y^2 = \frac{x^3}{2r-x}$.
De inhoud van den cilinder, door de omwenteling van den regthoek BPMK om AB voortgebragt, is $\pi \times PM^2 \times PB$ of

πy^2

$\pi y^2 \times (2r-x)$, dat is πx^3, waaruit volgt, dat de inhoud van dezen cilinder gelijk is aan zesmaal den bol, welke AP tot middellijn heeft. De inhoud van gezegden cilinder zal dus onophoudelijk aangroeijen, naarmate AP aangroeit, zonder ooit weder af te nemen, en hieruit volgt, dat deze cilinder voor geen maximum vatbaar is.

Dit zelfde besluit wordt ook hieruit opgemaakt, dat, de functie $z = x^3$ een maximum onderstellende, $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 = 0$ zou moeten zijn, waaruit zou volgen $x = 0$; doch deze waarde maakt $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$, zonder $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 0$ te maken, en deze functie is alzoo voor geen maximum vatbaar.

Wordt $x = 2r$ genomen, dan gaat de cilinder over in zulk eenen, waarvan het grondvlak een oneindig groote cirkel en waarvan de hoogte gelijk o is. Voor dit geval wordt πx^3 gelijk $8\pi r^3$, dat is, gelijk zesmaal den bol, door de omwenteling van den makenden cirkel voortgebragt, en tot deze waarde zal dus de ingeschreven cilinder meer en meer naderen, zonder dezelve ooit volkomen te kunnen bereiken.

Geheel anders is het met de zaak gelegen, wanneer het omwentelingsvlak door een vlak RR′, loodregt op de as, doorsneden wordt, en men den grootsten cilinder bepalen wil, die tusschen dit vlak RR′ en het omwentelingsvlak beschreven kan worden; want stellen wij AN $= a$ en AP $= x$, zoo blijft PM$^2 = y^2 = \frac{x^3}{2r-x}$, maar de hoogte van den cilinder is nu PN $= a - x$, en dus wordt deszelfs inhoud $y^2 \pi \times$ PN of $\pi . \frac{x^3(a-x)}{2r-x}$, en de functie $z = \frac{ax^3 - x^4}{2r-x}$, moet dus een maximum zijn. Het eerste differentiaal-quotient opmakende, vinden wij

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(3ax^2 - 4x^3)(2r-x) + x^3(a-x)}{(2r-x)^2},$$

zoodat wij voor het maximum moeten hebben.

$$(2r-x)(3a-4x)x^2 + x^3(a-x) = 0.$$

Hieraan voldoet $x = 0$; doch het is uit het bloote inzien der

figuur duidelijk, dat deze waarde van x tot geen maximum kan voeren, daar zij den inhoud van den cilinder gelijk nul maakt. Deelen wij dus door x^2, dan komt er

$$(2r-x)(3a-4x)+x(a-x)=0,$$

of

$$3x^2-2(a+4r)x+6ar=0,$$

waaruit

$$x=\tfrac{1}{3}\{(a+4r)\pm\sqrt{(2r-a)(8r-a)}\}.$$

Dat er in het onderhavige geval een maximum moet bestaan, is zoo duidelijk uit de figuur in te zien, dat het geen stelkunstig betoog behoeft; en wel, omdat de inhouden der achtervolgende cilinders bij o aanvangen en ook wederom bij o eindigen. Welke der twee gevondene waarden van x echter tot dit maximum behoort, is zoo dadelijk niet in te zien; doch ook hiertoe is het niet noodig het tweede differentiaal-quotient te zoeken: want berekenen wij de waarde van BP, dan vinden wij, dat voor het maximum moet zijn

$$BP=2r-x=\tfrac{1}{3}\{(2r-a)\pm\sqrt{(2r-a)(8r-a)}\},$$

of, omdat $2r-a=BN$ en dus $8r-a=BN+6r$ is,

$$BP=\tfrac{1}{3}\{BN\pm\sqrt{BN(BN+6r)}\}.$$

Daar nu $\sqrt{BN(BN+6r)}>BN$ is, zoo maakt het benedenste teeken BP negatief en dus PM onbestaanbaar. Deze waarde behoort dus niet tot het gevraagde maximum, en wij moeten alzoo voor hetzelve nemen

$$BP=\tfrac{1}{3}\{BN+\sqrt{BN(BN+3AB)}\},$$

welke uitdrukking tevens zoo gemakkelijk doet zien, hoe het punt P geconstrueerd moet worden, dat wij zulks niet breeder behoeven te verklaren.

Uit de waarde van BP volgt nog, dat BP kleiner zal worden, naarmate BN kleiner genomen wordt, en dat eindelijk voor $BN=0$ ook $BP=0$ wordt, hetgeen overeenkomt met hetgeen wij vroeger over dit geval hebben doen opmerken.

CXXX. Voorstel.

Door J. Bassan.

De waarden van x, y en z te vinden, uit de vergelijkingen

$$xy(x-y)+xz(x-z)+yz(y+z)=58 \quad . \quad (I),$$

$$x-y-z=1 \quad . \quad . \quad . \quad (II),$$

en

$$x^3-y^3-z^3=29 \quad . \quad . \quad . \quad (III).$$

Op-

OPGELOST door J. BASSAN, L. J. ULMAN, J. JONKHERT en A. B. DE BOER JUN.

OPLOSSING van J. BASSAN.

Trekken wij de eerste vergelijking van de derde, dan komt er

$$x^3-y^3-z^3-x^2y+xy^2-x^2z+xz^2-y^2z-yz^2=-29,$$

of $x^2(x-y-z)+y^2(x-y-z)+z^2(x-y-z)=-29,$

dat is $(x^2+y^2+z^2)(x-y-z)=-29.$

Deelende deze vergelijking door (2) dan verkrijgen wij

$$x^2+y^2+z^2=29,$$

of . . . . $x^2+y^2=29-z^2$ . . . . (4).

Schrijft men verder de vergelijkingen (2) en (3) op deze wijze:

. . . . $x^3-y^3=29+z^3$

en . . . . $x-y=z-1$ . . . . (5),

dan vindt men, door dezelve in elkander te deelen,

$$x^2+xy+y^2=\frac{29+z^3}{z-1},$$

of . . . . $2x^2+2xy+2y^2=\frac{2(29+z^3)}{z-1},$

en tellende hierbij het vierkant van (5), dat is,

$$x^2-2xy+y^2=(z-1)^2,$$

dan verdwijnt xy en wij vinden

$$3(x^2+y^2)=\frac{2(29+z^3)}{z-1}+(z-1^2).$$

Brengende dus hierin de waarde van x^2+y^2 uit (4) over, dan verkrijgen wij, ter bepaling van z,

$$3(29-z^2)=\frac{2(29+z^3)}{z-1}+(z-1)^2,$$

of $3(29-z^2)(z-1)=2(29+z^3)+(z-1)^3,$

welke vergelijking, ontwikkeld en volgens de magten van z gerangschikt, geeft

$$6z^3-6z^2-84z+144=0,$$

of $z^3-z^2-14z+24=0,$

waarvan de wortels zijn $z=2$, $z=3$ en $z=-4$.

Is z gevonden, dan zijn x en y mede bekend; want $x-y=z-1$ en $x^2+y^2=29-z^2$ zijnde, heeft men $2x^2+2y^2=$

$58 - 2z^2$, en hiervan $(x-y)^2 = (z-1)^2$ aftrekkende, blijft er $(x+y)^2 = -3z^2 + 2z + 57$ en $x+y = \pm\sqrt{(-3z^2+2z+57)}$, waardoor dan x en y bepaald zijn.

Hieruit blijkt dus, dat er zes verschillende antwoorden op het vraagstuk bestaan. Zie hier dezelve:

Neemt men vooreerst $z=2$, dan is $x-y=1$ en $x+y=\pm 7$ en dit geeft de twee volgende antwoorden

$$z=2,\quad x=4,\quad y=3 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (I),$$
$$z=2,\quad x=-3,\quad y=-4 \;.\;.\;.\;.\; (II).$$

Nemende verder $z=3$, dan is $x-y=2$ en $x+y=\pm 6$, waaruit de twee volgende antwoorden voortvloeijen

$$z=3,\quad x=4,\quad y=2 \;.\;.\;.\;.\;.\; (III),$$
$$z=3,\quad x=-2,\quad y=-4 \;.\;.\;.\;.\; (IV).$$

Nemende eindelijk $z=-4$, dan is $x-y=-5$ en $x+y=\pm 1$, en hierdoor verkrijgen wij

$$z=-4,\quad x=-2,\quad y=3 \;.\;.\;.\;.\; (V),$$
$$z=-4,\quad x=-3,\quad y=2 \;.\;.\;.\;.\; (VI).$$

CXXXI. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Uit een der hoekpunten van eenen driehoek is eene loodlijn op de overstaande zijde nedergelaten. Indien nu de stralen der cirkels gegeven zijn, die in de twee regthoekige driehoeken kunnen beschreven worden, welke hierdoor ontstaan, benevens de straal van den cirkel, welke om den oorspronkelijken driehoek beschreven kan worden, dan vraagt men hierdoor de zijden en hoeken van dezen driehoek te bepalen?

OPGELOST *door* A. B. DE BOCK JUN., J. BASSAN *en* J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* A. B. DE BOCK JUN.

Stellen wij, *Fig.* 97, $AB = x$, $AC = y$ en $AD = z$, dan is $BD = \sqrt{(x^2 - z^2)}$ en $CD = \sqrt{(y^2 - z^2)}$. Stellen wij verder de stralen der cirkels in de driehoeken ABD en ACD beschreven, gelijk a en b, en den straal van den omgeschrevenen cirkel des driehoeks ABC gelijk c, dan is bekend, dat deze stralen worden uitgedrukt door

$a =$

$$a=\frac{2\times\triangle ABD}{AB+AD+BD}=\frac{AD\times BD}{AB+AD+BD}=\frac{z\sqrt{(x^2-z^2)}}{x+z+\sqrt{(x^2-z^2)}},$$

$$b=\frac{2\times\triangle ACD}{AC+AD+CD}=\frac{AD\times DC}{AC+AD+CD}=\frac{z\sqrt{(y^2-z^2)}}{y+z+\sqrt{(y^2-z^2)}},$$

$$c=\frac{AB\times AC\times BC}{4\times\triangle ABC}=\frac{AB\times AC\times BC}{2\times AD\times BC}=\frac{AB\times AC}{2AD}=\frac{xy}{2z},$$

en wij hebben alzoo de drie vergelijkingen

$$a\{x+z+\sqrt{(x^2-z^2)}\}=z\sqrt{(x^2-z^2)} \quad \ldots \quad (1),$$

$$b\{y+z+\sqrt{(y^2-z^2)}\}=z\sqrt{(y^2-z^2)} \quad \ldots \quad (2),$$

$$2cz=xy \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

Brengen wij de eerste en tweede onder de volgende gedaante

$$(z-a)\sqrt{(x^2-z^2)}=a(x+z)$$

en

$$(z-b)\sqrt{(y^2-z^2)}=b(y+z),$$

dan zijn derzelver vierkanten

$$(z-a)^2(x^2-z^2)=a^2(x+z)^2$$

en

$$(z-b)^2(y^2-z^2)=b^2(y+z)^2,$$

welke, door $x+z$ en $y+z$ gedeeld zijnde, geven

$$(z-a)^2(x-z)=a^2(x+z)$$

en

$$(z-b)^2(y-z)=b^2(y+z),$$

of

$$x\{(z-a)^2-a^2\}=z\{(z-a)^2+a^2\}$$

en

$$y\{(z-b)^2-b^2\}=z\{(z-b)^2+b^2\},$$

welke, ontwikkeld en door z gedeeld, geven

$$x(z-2a)=z^2-2az+2a^2$$

en

$$y(z-2b)=z^2-2bz+2b^2,$$

waaruit

$$x=\frac{z^2-2az+2a^2}{z-2a} \quad \ldots\ldots \quad (4),$$

en

$$y=\frac{z^2-2bz+2b^2}{z-2b} \quad \ldots\ldots \quad (5),$$

door welke x en y berekend kunnen worden, wanneer z gevonden is.

Om nu z te bepalen, vermenigvuldigen wij (4) en (5), en er komt

$$xy=\frac{(z^2-2az+2a^2)(z^2-2bz+2b^2)}{(z-2a)(z-2b)};$$

maar uit (3) is $xy=2cz$; stellende dus deze waarden aan elkander gelijk, zoo verkrijgen wij

$$2cz=\frac{(z^2-2az+2a^2)(z^2-2bz+2b^2)}{(z-2a)(z-2b)},$$

of $2cz(z-2a)(z-2b)=(z^2-2az+2a^2)(z^2-2bz+2b^2)$, welke ontwikkeld en volgens de magten van z gerangschikt, geeft

$$z^4-2(a+b+c)z^3+2(a^2+b^2+2ab+2ac+2bc)z^2 \quad . \quad .$$
$$. \quad . \quad . \quad -4ab(a+b+2c)z+4a^2b^2=0,$$

waaruit z kan gevonden worden, zoodra a, b en c in getallen gegeven zijn, en dan kunnen x en y door (4) en (5) berekend worden.

CXXXII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Uit een der hoekpunten van eenen driehoek is eene loodlijn op de overstaande zijde nedergelaten. Wanneer men nu de stralen kent der cirkels, welke in den oorspronkelijken driehoek en in de twee regthoekige driehoeken kunnen beschreven worden, dan vraagt men hierdoor den driehoek te bepalen?

OPGELOST *door* A. B. DE BOCK JUN. *en* J. BASSAN.

OPLOSSING *van* A. B. DE BOCK JUN.

Stellen wij, *Fig.* 97, AB $=x$, AC $=y$ en AD $=z$, en stellen wij de stralen der ingeschrevene cirkels van de driehoeken ABD, ACD en ABC achtervolgens gelijk a, b en c, dan hebben wij, even als in het voorgaande vraagstuk,

$$a=\frac{z\sqrt{(x^2-z^2)}}{x+z+\sqrt{(x^2-z^2)}} \text{ en } b=\frac{z\sqrt{(y^2-z^2)}}{y+z+\sqrt{(y^2-z^2)}},$$

terwijl wij voor den derden vinden

$$c=\frac{2\times\triangle ABC}{AB+AC+BC}=\frac{AD\times BC}{AB+AC+BC}=\frac{z\{\sqrt{(x^2-z^2)}+\sqrt{(y^2-z^2)}\}}{x+y+\sqrt{(x^2-z^2)}+\sqrt{(y^2-z^2)}},$$

en de drie vergelijkingen zijn dus hier

$$a(x+z)+a\sqrt{(x^2-z^2)}=z\sqrt{(x^2-z^2)},$$
$$b(y+z)+b\sqrt{(y^2-z^2)}=z\sqrt{(y^2-z^2)},$$
$$c(x+y)+c\sqrt{(x^2-z^2)}+c\sqrt{(y^2-z^2)}=z\sqrt{(x^2-z^2)}+z\sqrt{(y^2-z^2)},$$

welke ook aldus kunnen worden geschreven

$$(z-a)\sqrt{(x^2-z^2)}=a(x+z) \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$
$$(z-b)\sqrt{(y^2-z^2)}=b(y+z) \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$
en
$$(z-c)\{\sqrt{(x^2-z^2)}+\sqrt{(y^2-z^2)}\}=c(x+y) \quad . \quad (3).$$

Uit de twee eerste volgt terstond

V

$$\sqrt{(x^2-z^2)}=\frac{a(x+z)}{z-a} \text{ en } \sqrt{(y^2-z^2)}=\frac{b(y+z)}{z-b} \quad . \; (4),$$

waardoor (3) overgaat in

$$(z-c)\left\{\frac{a(x+z)}{z-a}+\frac{b(y+z)}{z-b}\right\}=c(x+y) \quad . \; . \; (5).$$

De vergelijkingen (4) quadraterende, komt er, na door $(x+z)$ en $(y+z)$ gedeeld te hebben,

$$x-z=\frac{a^2(x+z)}{(z-a)^2} \text{ en } y-z=\frac{b^2(y+z)}{(z-b)^2},$$

waaruit wij voor x en y vinden

$$x=\frac{z^2-2az+2a^2}{z-2a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

en

$$y=\frac{z^2-2bz+2b^2}{z-2b} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7),$$

zoodat $x+z=\dfrac{2(z-a)^2}{z-2a}$ en $y+z=\dfrac{2(z-b)^2}{z-2b}$,

welke waarden, in (5) gebragt zijnde, geven

$$(z-c)\left\{\frac{2a(z-a)}{z-2a}+\frac{2b(z-b)}{z-2b}\right\}=c\left\{\frac{(z-a)^2+a^2}{z-2a}+\frac{(z-b)^2+b^2}{z-2b}\right\};$$

of, met het product der noemers vermenigvuldigende,

$$2(z-c)\{a(z-a)(z-2b)+b(z-b)(z-2a)\} \; . \; . \; .$$
$$=c\{(z^2-2az+2a^2)(z-2b)+(z^2-2bz+2b^2)(z-2a)\}.$$

Dit ontwikkelende en naar de magten van z rangschikkende, komt er, na door $2z$ gedeeld te hebben,

$$(a+b-c)z^2-(a^2+4ab+b^2-ac-bc)z+2ab(a+b)=0,$$

of $$z^2-\frac{a^2+4ab+b^2-ac-bc}{a+b-c}z+\frac{2ab(a+b)}{a+b-c}=0,$$

uit welke vierkantsvergelijking gevonden wordt

$$z=\frac{a^2+4ab+b^2-ac-bc}{2(a+b-c)}\pm\sqrt{\left\{\frac{(a^2+4ab+b^2-ac-bc)^2}{4(a+b-c)^2}-\frac{2ab(a+b)}{a+b-c}\right\}} \; (8),$$

en hierdoor z gevonden zijnde, worden x en y door de vergelijkingen (6) en (7) bepaald.

AANMERKING *door* L. R. SCHMIDT.

Het dubbele teeken, dat voor de waarde van z staat, doet twee oplossingen voor het vraagstuk vermoeden, offchoon het inzien der figuur het bestaan van twee antwoorden zeer onwaarschijn.

schijnlijk maakt. De waarde van z is echter voor eene merkwaardige herleiding vatbaar, welke het zeer gemakkelijk maakt, om over het al of niet bestaan dezer twee antwoorden te oordeelen. Wij kunnen namelijk z aldus schrijven:

$$z = \frac{(a+b)(a+b-c)+2ab}{2(a+b-c)} \pm \sqrt{\left\{\left(\frac{(a+b)(a+b-c)+2ab}{2(a+b-c)}\right)^2 - \frac{2ab(a+b)}{a+b-c}\right\}},$$

of

$$z = \tfrac{1}{2}\left\{(a+b)+\frac{2ab}{a+b-c}\right\} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\left\{\left((a+b)+\frac{2ab}{a+b-c}\right)^2 - 4(a+b).\frac{2ab}{a+b-c}\right\}},$$

stellende dus $a+b=m$ en $\frac{2ab}{a+b-c}=n$, dan hebben wij ten duidelijkste

$$z=\tfrac{1}{2}(m+n)\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\{(m+n)^2-4mn\}}=\tfrac{1}{2}(m+n)\pm\tfrac{1}{2}(m-n).$$

De twee waarden van z zijn dus $z=m$ en $z=n$, dat is

$$z=a+b \quad \text{en} \quad z=\frac{2ab}{a+b-c},$$

en wij moeten dus onderzoeken, of beide deze antwoorden aan het vraagstuk kunnen voldoen.

De eerste waarde van z namelijk $z=a+b$ is geheel onafhankelijk van c, dat is, van den straal des ingeschrevenen cirkels van den driehoek ABC, en brengen wij dezelve over in (6) en (7), dan komt er

$$x=\frac{a^2+b^2}{b-a} \quad \text{en} \quad y=-\frac{a^2+b^2}{b-a},$$

welke mede geheel onafhankelijk van c zijn. Het is echter klaar, dat x, y en z niet onafhankelijk van c kunnen wezen, en dat de kennis van a en b niet genoegzaam is om den driehoek te construeren; want stellen wij in de regte hoeken ADP en ADQ de cirkels, die a en b tot straal hebben, dan kunnen wij uit elk punt A in AD genomen, raaklijnen AB en AC aan deze cirkels trekken, en er bestaat alzoo een oneindig aantal driehoeken ABC, die de twee geconstrueerde cirkels gemeen hebben, waaruit dan van zelf volgt, dat de derde straal c ter bepaling van den cirkel onontbeerlijk is.

Deze aanmerkingen zijn dan genoegzaam om te doen gevoelen, dat men, om het vraagstuk in den eigenlijken zin van de

op-

opgaaf op te lossen, alleen de tweede waarde van z zal moeten gebruiken, namelijk

$$AD = z = \frac{2ab}{a+b-c},$$

en deze in (6) en (7) overbrengende, vinden wij voor de twee zijden AB en AC

$$AB = x = \frac{a\{b^2+(c-a)^2\}}{(c-a)(a+b-c)},$$

$$AC = y = \frac{b\{a^2+(c-b)^2\}}{(c-b)(a+b-c)}.$$

Natuurlijker wijze moet nu de vraag ontstaan, of de eerste waarde van z dan geheel verworpen moet worden, en of zij niet de eene of andere wijziging der figuur aanwijst, waarbij de zijden van den driehoek werkelijk onafhankelijk van c zijn, dat is, voor alle waarden van c hetzelfde blijven. Om zulks na te sporen bestaat er geen geschikter middel, dan de waarden van z, x en y werkelijk te construeren, en te zien, welke gedaante hierdoor de driehoek aanneemt.

Laat dan, *Fig.* 98, op de lijn PQ eene loodlijn DR opgerigt, en in de regte hoeken RDP en RDQ cirkels beschreven worden, waarvan de stralen zijn $MM' = a$ en $NN' = b$. Nemen wij nu $z = a + b$, dat is $DA = MM' + NN'$, dan zal de driehoek, even als in *Fig.* 97, geconstrueerd moeten worden, door uit A raaklijnen AB en AC' aan de twee cirkels te trekken. Nu zal men bevinden, dat deze lijnen AB en AC elkanders verlengde zijn, zoodat de tweede de lijn PQ in hetzelfde punt B doorsnijdt als de eerste, welke omstandigheid overeenkomt met de gevondene waarden van AC en BC, die ons $AC = -AB$ gaven, daar dit doet zien, dat het punt C niet op AC' moet genomen worden, maar op het verlengde, en dat hetzelve alsdan op B moet vallen. De driehoek gaat alzoo in dit oneigenlijk geval over in eene regte lijn, dat is, in eenen driehoek, waarvan de zijde $CB = 0$ is, en elke cirkel, in den onbepaalden hoek C'BQ beschreven, zal dus als de ingeschreven cirkel van den geheelen driehoek kunnen worden beschouwd, hetgeen overeenkomt met de onafhankelijkheid van c. Ziedaar dus wederom een voorbeeld

van

van de voortreffelijkheid der stelkunst, welke nimmer iets overtolligs aanwijst, en waarvan elke uitkomst altijd met de eene of andere eigenschap der figuur in verband moet staan.

Het is eindelijk zeer gemakkelijk om te betoogen, dat de lijn BC', welke de twee cirkels aanraakt, van DR een stuk AD afsnijdt, dat gelijk $a+b$ is; want trekkende NM, dan gaat dezelve noodzakelijk door B, en wij hebben

$$Tang. u = \frac{NK}{MK} = \frac{b-a}{b+a},$$

en dus $$Tang. ABD = Tang. 2u = \frac{2 Tang. u}{1 - Tang^2. u},$$

dat is $$Tang. ABD = \frac{b^2 - a^2}{2ab}.$$

Verder is NK : MK = MM' : BM', waaruit

$$BM' = \frac{MK \times MM'}{NK} = \frac{a(b+a)}{b-a},$$

dus $$BD = BM' + a = \frac{2ab}{b-a},$$

en $$AD = BD \times Tang. ABD = \frac{2ab}{b-a} + \frac{b^2 - a^2}{2ab} = a+b,$$

waardoor het boven aangevoerde buiten eenigen twijfel verheven is.

CXXXIII. Voorstel.

Door J. Bassan.

Wanneer in eenen driehoek eene lijn uit een der hoekpunten naar het midden van de overstaande zijde getrokken wordt, en de middellijnen der cirkels gegeven zijn, welke in den oorspronkelijken driehoek en in de driehoeken beschreven kunnen worden, waarin de driehoek verdeeld is, dan vraagt men, hoe door deze gegevens de zijden van den driehoek bepaald kunnen worden?

Oplossing. *Door* J. Bassan.

Zij ABC, *Fig.* 99, de driehoek, en stellen wij $AD = DC = x$, de loodlijn $BE = y$ en de stralen der cirkels, in de driehoeken ABD, CBD en ABC beschreven, a, b en c, dan is, volgens de bekende eigenschap,

$$(AB + BD + x)a = xy$$

en $$(BC + BD + x)b = xy,$$

zoo-

zoodat $$AB+BD=\frac{x(y-a)}{a}$$

en $$BC+BD=\frac{x(y-b)}{b},$$

waarvan het verschil en de som is

$$AB-BC=\frac{x(y-a)}{a}-\frac{x(y-b)}{b}=\frac{b-a}{ab}xy \quad \ldots\ldots (1)$$

en $$AB+BC+2BD=\frac{x(y-a)}{a}+\frac{x(y-b)}{b}=\frac{b+a}{ab}xy-2x \; (2).$$

Verder geeft de driehoek ABC ons

$$(AB+BC+2x)c=2xy,$$

en dus $$AB+BC=\frac{2x(c-y)}{c} \quad \ldots\ldots (3),$$

zoodat wij, door de halve som en het halve verschil van (3) en (1) te nemen, vinden

$$AB=\left(\frac{1}{c}+\frac{b-a}{2ab}\right)xy-x \quad \ldots\ldots (4)$$

en $$BC=\left(\frac{1}{c}-\frac{b-a}{2ab}\right)xy-x \quad \ldots\ldots (5),$$

terwijl wij, door (3) in (2) te substitueren, vinden

$$BD=\left(\frac{a+b}{2ab}-\frac{1}{c}\right)xy \quad \ldots\ldots (6).$$

Daar nu BD de zijde AC midden door deelt, zoo is, volgens eene bekende eigenschap van den driehoek,

$$AB^2+BC^2=2BD^2+2AD^2,$$

en brengende hierin de waarden over, die wij in (4), (5) en (6) gevonden hebben, dan komt er

$$\left\{\left(\frac{1}{c}+\frac{b-a}{2ab}\right)xy-x\right\}^2+\left\{\left(\frac{1}{c}-\frac{b-a}{2ab}\right)xy-x\right\}^2 \ldots$$

$$\ldots\ldots =2\left(\frac{a+b}{2ab}-\frac{1}{c}\right)^2x^2y^2+2x^2,$$

of, wanneer wij alles door x^2 deelen,

$$\left\{\left(\frac{1}{c}+\frac{b-a}{2ab}\right)y-1\right\}^2+\left\{\left(\frac{1}{c}-\frac{b-a}{2ab}\right)y-1\right\}^2 \ldots$$

$$\ldots\ldots =2\left(\frac{a+b}{2ab}-\frac{1}{c}\right)^2y^2+2,$$

dit

dit ontwikkeld en alles naar denzelfden kant gebragt, geeft

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{1}{c^2}+\frac{b-a}{abc}+\frac{(b-a)^2}{4a^2b^2}\right)y^2-\left(\frac{2}{c}+\frac{b-a}{ab}\right)y+1\\ +\left(\frac{1}{c^2}-\frac{b-a}{abc}+\frac{(b-a)^2}{4a^2b^2}\right)y^2-\left(\frac{2}{c}-\frac{b-a}{ab}\right)y+1\\ +\left(-\frac{2}{c^2}+\frac{2(a+b)}{abc}-\frac{2(b-a)^2}{4a^2b^2}\right)y^2 \;\ldots\; -2\end{array}\right\}=0,$$

dat is, na herleiding der termen,

$$\left(\frac{2(a+b)}{abc}-\frac{2}{ab}\right)y^2-\frac{4}{c}y=0,$$

of

$$(a+b-c)y-2ab=0,$$

zoodat

$$BE=y=\frac{2ab}{a+b-c} \;\ldots\ldots\; (7),$$

waardoor de waarden van AB, BC en BD overgaan in

$$AB=\frac{2a(b-c)+c^2}{c(a+b-c)}\cdot x \;\ldots\ldots\; (8),$$

$$BC=\frac{2b(a-c)+c^2}{c(a+b-c)}\cdot x \;\ldots\ldots\; (9),$$

$$BD=\frac{c(a+b)-2ab}{c(a+b-c)}\cdot x \;\ldots\ldots\; (10);$$

en er blijft dus niet meer over, dan x te bepalen.

Hiertoe hebben wij volgens de bekende eigenschap der segmenten van eene der zijden

$$DE=\frac{AB^2-AD^2-BD^2}{2AD},$$

en brengende hierin de gevondene waarden

$$DE=\frac{\{2a(b-c)+c^2\}^2x^2-c^2(a+b-c)^2x^2-\{c(a+b)-2ab\}^2x^2}{2x(a+b-c)^2c^2}$$

$$=\frac{\{2a(b-c)+c^2\}^2-c^2(a+b-c)^2-\{c(a+b)-2ab\}^2}{2c^2(a+b-c)^2}\cdot x$$

$$=\frac{2ab(b-a)-c(b^2-a^2)+c^2(b-a)}{c(a+b-c)^2}\cdot x$$

$$=\frac{(b-a)\{2ab-c(b+a)+c^2\}}{c(a+b-c)^2}\cdot x.$$

Ein-

Eindelijk is $BD^2 - DE^2 = BE^2$, en hierin de gevondene waarden overbrengende, verkrijgen wij

$$\left\{\frac{\{c(a+b)-2ab\}^2}{c^2(a+b-c)^2} - \frac{(b-a)^2\{c^2-(b+a)c+2ab\}^2}{c^2(a+b-c)^4}\right\}x^2 = \frac{4a^2b^2}{(a+b-c)^2},$$

of, wanneer wij met $c^2(a+b-c)^4$ vermenigvuldigen,

$$[\{c(a+b)-2ab\}^2(a+b-c)^2-(b-a)^2\{c^2-(b+a)c+2ab\}^2]x^2 =$$
$$4a^2b^2c^2(a+b-c)^2.$$

De coëfficient van x^2 ontwikkelende en naar de magten van c rangschikkende, komt er

$$4ab\{c^4-3(a+b)c^3+(2a^2+9ab+2b^2)c^2-6ab(a+b)c+4a^2b^2\},$$

en daar de tweede factor gemakkelijk in de vier factoren $c-a$, $c-b$, $c-2a$ en $c-2b$ ontbonden wordt, hebben wij

$$ab(c-a)(c-b)(c-2a)(c-2b)x^2 = a^2b^2c^2(a+b-c)^2,$$

en hieruit volgt dus

$$AD = CD = x = \frac{c(a+b-c)\sqrt{ab}}{\sqrt{(c-b)(c-a)(c-2b)(c-2a)}},$$

waaruit voor de overige lijnen gevonden wordt

$$AB = \frac{\{c^2-2a(c-b)\}\sqrt{ab}}{\sqrt{(c-a)(c-b)(c-2a)(c-2b)}},$$

$$BC = \frac{\{c^2-2b(c-a)\}\sqrt{ab}}{\sqrt{(c-a)(c-b)(c-2a)(c-2b)}},$$

$$BD = \frac{\{c(a+b)-2ab\}\sqrt{ab}}{\sqrt{(c-a)(c-b)(c-2a)(c-2b)}}.$$

CXXXIV. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Wanneer in eenen driehoek eene lijn getrokken wordt, die een' der hoeken midden door deelt, en men de stralen kent van de drie cirkels, welke in den oorspronkelijken driehoek en in deszelfs deelen kunnen beschreven worden, dan vraagt men de zijden van dezen driehoek te berekenen?

OPLOSSING *door* J. BASSAN.

Zij ABC, *Fig.* 100, de driehoek. Stellen wij $BD = x$ den halven tophoek ϕ; en den hoek, welke de deellijn BD met de loodlijn BE maakt, gelijk ψ, dan is $\angle BDC = 90° - \psi$, $\angle BDA = 90° + \psi$, $\angle EBC = \phi - \psi$, $\angle ABE = \phi + \psi$,

$\angle BAD = 90^\circ - (\phi + \psi)$ en $\angle BCD = 90^\circ - (\phi - \psi)$.
Verder hebben wij

$$BD : AD = Sin. BAD : Sin. ABD,$$

dus $$AD = BD \times \frac{Sin. ABD}{Sin. BAD} = x \times \frac{Sin. \phi}{Cos. (\phi + \psi)}.$$

$$BD : AB = Sin. BAD : Sin. ADB,$$

dus $$AB = BD \times \frac{Sin. ADB}{Sin. BAD} = x \times \frac{Cos. \psi}{Cos. (\phi + \psi)}.$$

$$BD : DC = Sin. BCD : Sin. DBC,$$

dus $$DC = BD \times \frac{Sin. DBC}{Sin. BCD} = x \times \frac{Sin. \phi}{Cos. (\phi - \psi)}.$$

$$BD : BC = Sin. BCD : Sin. BDC,$$

dus $$BC = BD \times \frac{Sin. BDC}{Sin. BCD} = x \times \frac{Cos. \psi}{Cos. (\phi - \psi)},$$

waaruit dan verder volgt

$$AC = x \, Sin. \phi \left(\frac{1}{Cos. (\phi + \psi)} + \frac{1}{Cos. (\phi - \psi)} \right) \text{ en } BE = x \, Cos. \psi.$$

Stellende voorts de stralen der cirkels, die in de driehoeken ABD, DBC en ABC beschreven kunnen worden, achtervolgens a, b en c, dan is in den driehoek ABD,

$$(AB + AD + BD) a = AD \times BE,$$

of $$\left(\frac{x \, Cos. \psi}{Cos. (\phi + \psi)} + \frac{x \, Sin. \phi}{Cos. (\phi + \psi)} + x \right) a = \frac{x \, Sin. \phi}{Cos. (\phi + \psi)} \times x \, Cos. \psi,$$

dat is, wanneer wij met $Cos. (\phi + \psi)$ vermenigvuldigen en door $a x$ deelen,

$$Cos. \psi + Sin. \phi + Cos. (\phi + \psi) = \frac{x}{a} Sin. \phi \, Cos. \psi \quad . \quad (1).$$

In den driehoek DBC is eveneens

$$(BC + CD + BD) b = CD \times BE,$$

of $$\left(\frac{x \, Cos. \psi}{Cos. (\phi - \psi)} + \frac{x \, Sin. \phi}{Cos. (\phi - \psi)} + x \right) b = \frac{x \, Sin. \phi}{Cos. (\phi - \psi)} \times x \, Cos. \psi,$$

hetwelk met $Cos. (\phi - \psi)$ vermenigvuldigd en door $b x$ gedeeld, geeft

$$Cos. \psi + Sin. \phi + Cos. (\phi - \psi) = \frac{x}{b} Sin. \phi \, Cos. \psi \quad . \quad (2).$$

Eindelijk is in den driehoek ABC

$$(AB + BC + AC) c = AC \times BE,$$

en

en hierin de gevondene waarden schrijvende,

$$\left\{\frac{x\,Cos.\psi}{Cos.(\phi+\psi)}+\frac{x\,Cos\,\psi}{Cos.(\phi-\psi)}+\frac{x\,Sin.\phi}{Cos.(\phi+\psi)}+\frac{x\,Sin.\phi}{Cos.(\phi-\psi)}\right\}c$$

$$=\left(\frac{x\,Sin.\phi}{Cos.(\phi+\psi)}+\frac{x\,Sin.\phi}{Cos.(\phi-\psi)}\right)\times x\,Cos.\psi,$$

of, door cx deelende en herleidende,

$$\frac{Cos\,\psi+Sin.\phi}{Cos\,(\phi+\psi)}+\frac{Cos.\psi+Sin.\phi}{Cos.(\phi-\psi)}=\frac{x}{c}\left(\frac{Sin.\phi}{Cos.(\phi+\psi)}+\frac{Sin.\phi}{Cos.(\phi-\psi)}\right)Cos.\psi,$$

hetgeen ook aldus geschreven kan worden

$$(Cos.\psi+Sin.\phi)\left\{\frac{1}{Cos.(\phi+\psi)}+\frac{1}{Cos.(\phi-\psi)}\right\}=\ldots$$

$$\ldots\ \frac{x}{c}\,Sin.\phi\,Cos.\psi\left\{\frac{1}{Cos.(\phi+\psi)}+\frac{1}{Cos.(\phi-\psi)}\right\},$$

welke vergelijking door den gemeenen factor gedeeld zijnde, geeft

$$Cos.\psi+Sin.\phi=\frac{x}{c}\,Sin.\phi\,Cos.\psi\ \ldots\ldots\ (3),$$

zoodat wij drie vergelijkingen ter bepaling van x, ϕ en ψ hebben.

Zonderen wij x uit (3) af, dan hebben wij

$$x=c\,\frac{Cos.\psi+Sin.\phi}{Cos.\psi\,Sin.\phi}\ \ldots\ldots\ (4),$$

en brengende dit in (1) en (2) over, dan komt er

$$Cos.(\phi+\psi)=\frac{c-a}{a}(Cos.\psi+Sin.\phi)\ \ldots\ (5),$$

en

$$Cos.(\phi-\psi)=\frac{c-b}{b}(Cos.\psi+Sin.\phi)\ \ldots\ (6).$$

Deze vergelijkingen vermenigvuldigende, verkrijgen wij, omdat $Cos.(\phi+\psi)\,Cos.(\phi-\psi)=Cos^2.\psi-Sin^2.\phi$ is,

$$Cos^2.\psi-Sin^2.\phi=\frac{(c-a)(c-b)}{ab}(Cos.\psi+Sin.\phi)^2,$$

of, aan beide zijden door $Cos.\psi+Sin.\phi$ deelende,

$$Cos.\psi-Sin.\phi=\frac{(c-a)(c-b)}{ab}(Cos.\psi+Sin.\phi),$$

of $ab(Cos.\psi-Sin.\phi)=(c^2-ac-bc+ab)(Cos.\psi+Sin.\phi)$,
en $(ac+bc-c^2)Cos.\psi=(c^2-ac-bc+2ab)\,Sin.\phi$,

zoodat

$$\frac{Cos.\psi}{Sin.\phi}=\frac{c^2-c(a+b)+2ab}{c(a+b-c)}\ \ldots\ldots\ (7).$$

Ne-

Nemende daarentegen het verschil van (6) en (5), dan komt er

$$2\,Sin.\phi\,Sin.\psi = \frac{ac-bc}{ab}(Cos.\psi + Sin.\phi),$$

welke door $2\,Sin.\phi$ gedeeld, geeft

$$Sin.\psi = \frac{c(a-b)}{2ab}\left(\frac{Cos.\psi}{Sin.\phi}+1\right),$$

brengende dus hierin de waarde van $\frac{Cos.\psi}{Sin.\phi}$ over, dan wordt $Sin.\psi$ geheel bekend, en wij vinden

$$Sin.\psi = \frac{c(a-b)}{2ab}\left(\frac{c^2-c(a+b)+2ab}{c(a+b-c)}+1\right),$$

dat is

$$Sin.\psi = \frac{a-b}{a+b-c} \;\ldots\ldots\ldots\ (8).$$

Ten einde op de gemakkelijkste wijze ϕ te bepalen, nemen wij de som der vergelijkingen (5) en (6), en verkrijgen

$$2\,Cos.\phi\,Cos.\psi = \frac{c(a+b)-2ab}{ab}(Cos.\psi + Sin.\phi),$$

of, door $2\,Cos.\psi$ deelende,

$$Cos.\phi = \frac{c(a+b)-2ab}{2ab}\left(1+\frac{Sin.\phi}{Cos.\psi}\right),$$

zoodat wij, hierin de waarde van $\frac{Sin.\phi}{Cos.\psi}$ uit (7) overbrengende, vinden

$$Cos.\phi = \frac{c(a+b)-2ab}{2ab}\times\left(1+\frac{c(a+b-c)}{c^2-(a+b)c+2ab}\right),$$

dat is, na behoorlijke herleiding,

$$Cos.\phi = \frac{c^2}{c^2-c(a+b)+2ab}-1 \;\ldots\ldots\ (9).$$

Trekken wij dit alles te zamen, dan verkrijgen wij voor het stelsel van vergelijkingen, waardoor de zijden van den driehoek berekend worden,

$$Sin.\psi = \frac{a-b}{a+b-c} \;\ldots\ldots\ldots\ (I),$$

$$Cos.\phi = \frac{c^2}{c^2-c(a+b)+2ab}-1 \;\ldots\ldots\ (II),$$

$$BD = x = c.\frac{Cos.\psi + Sin.\phi}{Cos.\psi\,Sin.\phi} \;\ldots\ldots\ (III),$$

AB

$$AB = \frac{x \, Cos. \psi}{Cos. (\phi + \psi)} \ldots (IV), \qquad BC = \frac{x \, Cos. \psi}{Cos. (\phi - \psi)} \ldots (V),$$

$$AD = \frac{x \, Sin. \phi}{Cos. (\phi + \psi)} \ldots (VI), \qquad CD = \frac{x \, Sin. \phi}{Cos. (\phi - \psi)} \ldots (VII).$$

CXXXV. VOORSTEL.

Door S. KLYNSMA.

Van een trapezium is gegeven de afstand der evenwijdige zijden, de inhoud en de twee zijden, die niet evenwijdig loopen. Men vraagt hierdoor de twee andere zijden te vinden?

OPGELOST door L. J. ULMAN, J. BASSAN, A. B. DE BOCK JUN., N. I. SINGELS en J. JONKHEERT.

OPLOSSING van L. J. ULMAN.

Wanneer in *Fig.* 101 gegeven is $AD = a$, $BC = b$ en $DF = CE = c$, dan heeft men terstond

$$AF = \sqrt{(a^2 - c^2)} \quad \text{en} \quad BE = \sqrt{(b^2 - c^2)}.$$

Is verder de inhoud gelijk I, dan is

$$I = \tfrac{1}{2} c (AB + CD),$$

dus

$$AB + CD = \frac{2 I}{c},$$

en daar $AB - CD = AF + BE$ is, heeft men bovendien

$$AB - CD = \sqrt{(a^2 - c^2)} + \sqrt{(b^2 - c^2)},$$

waaruit dan voor AB en CD volgt

$$AB = \frac{I}{c} + \tfrac{1}{2} \left\{ \sqrt{(a^2 - c^2)} + \sqrt{(b^2 - c^2)} \right\},$$

en

$$CD = \frac{I}{c} - \tfrac{1}{2} \left\{ \sqrt{(a^2 - c^2)} + \sqrt{(b^2 - c^2)} \right\}.$$

AANMERKING. Men lette wel op, dat voor elke der uitdrukkingen $\sqrt{(a^2 - c^2)}$ en $\sqrt{(b^2 - c^2)}$ het dubbele teeken kan worden geplaatst, en dat alzoo $\sqrt{(a^2 - c^2)} + \sqrt{(b^2 - c^2)}$ voor vier verschillende waarden vatbaar is. Hieruit blijkt dan, dat er ook vier trapeziums zijn, die aan de vraag beantwoorden, en welke in de figuur zijn aangeteekend door ABCD, ADGE, BCHF en FEHG. Het is ondertusschen klaar, dat zoo wel de twee middelste als de twee uiterste, met elkander niet in vorm, maar alleen in ligging verschillen, en dat er alzoo niet meer dan twee verschillende trapeziums zijn, die aan de vraag voldoen.

CXXXVI. VOORSTEL.

Door S. KLYNSMA.

Van een trapezium zijn twee aan elkander grenzende zijden bekend, benevens de hoeken op eene dezer zijden; men vraagt hierdoor de overige zijden te vinden?

OPGELOST *door* J. BASSAN, L. J. ULMAN, A. B. DE BOCK JUN., J. JONKHEERT *en* N. I. SINGELS.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Onderstellen wij, dat ABCD, *Fig.* 102, het trapezium is, waarin $AB = a$ en $AD = b$ de bekende zijden zijn, dan kunnen B en A de gegevene hoeken niet wezen, omdat derzelver som twee regte hoeken is, en de eene alzoo door den anderen bepaald wordt. De gegevene hoeken moeten dus zijn $BAD = \alpha$ en $CDA = \beta$.

De driehoek BAE geeft ons terstond voor de hoogte van het trapezium

$$BE = CF = a\ Sin.\ \alpha,$$

en bij gevolg vinden wij voor de zijde CD

$$CD = \frac{CF}{Sin.\ \beta} = \frac{a\ Sin.\ \alpha}{Sin.\ \beta}.$$

Eindelijk is $BC = AD - AE - FD$; maar wij hebben

$$AE = a\ Cos.\ \alpha \text{ en } FD = CF\ Cot.\ \beta = \frac{a\ Sin.\ \alpha}{Tang.\ \beta},$$

zoodat $$BC = b - a\ Cos.\ \alpha - a\frac{Sin.\ \alpha}{Tang.\ \beta},$$

of $$BC = b - a\left(Cos.\ \alpha + Sin.\ \alpha.\frac{Cos.\ \beta}{Sin.\ \beta}\right),$$

dat is $$BC = b - a\frac{Cos.\ \alpha\ Sin.\ \beta + Sin.\ \alpha\ Cos.\ \beta}{Sin.\ \beta},$$

zoodat $$BC = b - a.\frac{Sin.\ (\alpha + \beta)}{Sin.\ \beta},$$

waardoor het vraagstuk opgelost is.

CXXXVII. VOORSTEL.

Door J. JONKHEERT.

Van een trapezium is gegeven de lijn, welke het midden der twee evenwijdige zijden vereenigt, de hoek, welke deze lijn met de basis maakt, en de twee deelen, waarin eene der diagonalen door

de.

deze lijn gedeeld wordt. Men vraagt dit trapezium door constructie en door berekening te bepalen?

OPGELOST *door* J. BASSAN, J. JONKHEERT, L. J. ULMAN *en* A. B. DE BOCK JUN.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Onderstellen wij ABCD, *Fig.* 103, het gevraagde trapezium te zijn, waarin gegeven is de hoek α, welke EF met FD moet maken, de lijn $EF = c$, en de stukken van de diagonaal AC gelijk $AG = a$ en $GC = b$, dan is het gemakkelijk in te zien, dat het trapezium op de volgende wijze geconstrueerd wordt.

Men neme in eene willekeurige en onbepaalde lijn PQ een punt F aan, make QFE gelijk den gegevenen hoek α en EF gelijk de gegevene lijn c; indien men dan door E eene lijn RS evenwijdig met PQ trekt, dan zullen de evenwijdige zijden van het trapezium op PQ en RS gelegen moeten wezen.

Men beschrijve verder uit F, met FH gelijk $a+b$ als straal, eenen cirkelboog, die RS in H snijdt, trekke FH en neme $FI = a$; trekt men dus IG evenwijdig met PQ en door G de lijn AC evenwijdig aan FH, dan zijn A en C hoekpunten van het trapezium; want dan is $AG = a$ en $GC = b$.

Nemende dus $EB = EC$ en $FD = AF$, dan zal ABCD het gevraagde trapezium zijn.

De cirkelboog, uit F met FH gelijk $a+b$ als straal beschreven, snijdt RS in twee punten H en H′ en hierdoor ontstaan dan ook twee trapeziums, ABCD en A′B′C′D′, welke aan de vraag voldoen.

Om de zijden van het trapezium door berekening te bepalen, stellen wij $EG = x$; alsdan is

$$x : c = b : a + b \quad \text{dus} \quad x = \frac{bc}{a+b},$$

en

$$GF = c - x = \frac{ac}{a+b}.$$

Verder hebben wij in den driehoek AGF; $\angle CAD = \phi$ en $\angle FGA = \psi$ stellende,

$$a : c - x = Sin\ \alpha : Sin.\ \phi \quad \text{dus} \quad Sin.\ \phi = \frac{c-x}{a}\ Sin.\ \alpha = \frac{c\ Sin.\ \alpha}{a+b},$$

en

en hieruit ϕ gevonden hebbende, is $\psi = \alpha - \phi$, waaruit dan verder volgt

$$a : AF = Sin.\,\alpha : Sin.\,\psi, \quad \text{dus} \quad AF = \frac{a\; Sin.\,\psi}{Sin.\,\alpha},$$

en dus
$$AD = \frac{2\,a\; Sin.\,(\alpha - \phi)}{Sin.\,\alpha}.$$

Eveneens is in den driehoek ECG

$$b : EC = Sin.\,\alpha : Sin.\,\psi \quad \text{dus} \quad CE = \frac{b\, Sin\,\psi}{Sin.\,\alpha},$$

en dus
$$BC = \frac{2\,b\; Sin.\,(\alpha - \phi)}{Sin.\,\alpha}.$$

Om eindelijk AB en CD te berekenen, trekke men BK en CL evenwijdig met EF, alsdan is

$$AK = LD = AF - BE = \frac{(a - b)\; Sin.\,(\alpha - \phi)}{Sin.\,\alpha},$$

waardoor, uit hoofde van

$$AB = \sqrt{(BK^2 + AK^2 + 2\,BK \times AE\; Cos.\,\alpha)}$$
en
$$CD = \sqrt{(CL^2 + LD^2 - 2\,CL \times LD\; Cos.\,\alpha)},$$

gevonden wordt

$$AB = \sqrt{\left\{c^2 + \frac{(a-b)^2\; Sin^2.\,\psi}{Sin^2.\,\alpha} + \frac{2\,c\,(a-b)\; Sin.\,\psi}{Sin.\,\alpha} \times Cos.\,\alpha\right\}}$$

en
$$CD = \sqrt{\left\{c^2 + \frac{(a-b)^2\; Sin^2.\,\psi}{Sin^2.\,\alpha} - \frac{2\,c\,(a-b)\; Sin\,\psi}{Sin.\,\alpha} \times Cos.\,\alpha\right\}}:$$

Hieruit blijkt dan, dat de zijden van het trapezium gevonden worden door het volgende stelsel van vergelijkingen:

$$Sin.\,\phi = \frac{c\; Sin.\,\alpha}{a + b} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

$$AD = \frac{2\,a\; Sin.\,(\alpha - \phi)}{Sin.\,\alpha} \quad \ldots\ldots \quad (2),$$

$$BC = \frac{2\,b\; Sin.\,(\alpha - \phi)}{Sin\;\alpha} \quad \ldots\ldots \quad (3),$$

$$AB = \sqrt{\left\{c^2 + \frac{(a-b)^2 Sin^2.(\alpha - \phi)}{Sin^2.\,\alpha} + 2c(a-b) Sin.(\alpha - \phi) Cot.\,\alpha\right\}} \; (4),$$

$$CD = \sqrt{\left\{c^2 + \frac{(a-b)^2 Sin^2.(\alpha - \phi)}{Sin^2.\,\alpha} - 2c(a-b) Sin.(\alpha - \phi)\, Cot.\,\alpha\right\}} \; (5).$$

Men lette wel op, dat de vergelijking (1) twee waarden voor ϕ

doet

doet kennen, waardoor men dan ook tot de twee vierhoeken geraakt, waarvan boven melding is gemaakt.

CXXXVIII. VOORSTEL.

Door J. Jonkhert.

Van een trapezium is gegeven de bazis, eene der diagonalen, de lijn, welke het midden der evenwijdige zijden vereenigt en de hoek, welke de gegevene diagonaal met de bazis maakt. Men vraagt dit trapezium, zoo wel door constructie als door berekening, te bepalen?

Opgelost *door* J. Jonkhert, L. J. Ulman, A. B. de Bock Jun. *en* J. Bassan.

Oplossing *van* J. Jonkhert.

Om het trapezium te construeren, trekken wij eene lijn AD, *Fig.* 104, gelijk de gegevene bazis, maken DAC gelijk den gegeven' hoek, welke de diagonaal AC met de bazis moet maken, en nemen AC gelijk de gegevene lengte van deze diagonaal; hierdoor zijn dan reeds de drie hoekpunten A, D en C van het trapezium bepaald, en er blijft dus alleen over, om het vierde te construeren.

Dit vierde hoekpunt moet ergens in de lijn LM liggen, door C evenwijdig met AD getrokken. Daar verder EF gegeven is, deelen wij AD midden door in E, en beschrijven uit E, met de gegevene lengte van EF als straal, eenen cirkelboog, die ML in F snijdt. Nemende dan FB=FC, zoo zal B het vierde hoekpunt en dus ABCD het gevraagde trapezium zijn.

De boog, uit E met EF als straal beschreven, snijdt ML in twee punten F en F′ en hieruit komt nog een trapezium AB′CD voort, dat even goed als het eerste aan de vraag voldoet.

Ten einde het vraagstuk door berekening op te lossen, stellen wij AD $=a$, AC $=b$, EF $=c$ en $\angle$ CAD $=\alpha$; hierdoor is CI $=$ BR $=$ FG $= b\,Sin.\,\alpha$ en AI $= b\,Cos.\,\alpha$ dus DI $= a - b\,Cos.\,\alpha$, zoodat

$$CD = \sqrt{(a^2 - 2ab\,Cos\,\alpha + b^2)} \quad \ldots \quad (I).$$

Verder is EG $= \sqrt{(EF^2 - FG^2)} = \sqrt{(c^2 - b^2\,Sin^2.\,\alpha)}$; maar EI $=$ AI $-$ AE zijnde, is EI $= b\,Cos.\,\alpha - \frac{1}{2}a$, en dus

$$FC = GI \pm b\,Cos.\,\alpha - \tfrac{1}{2}a + \sqrt{(c^2 - b^2\,Sin^2.\,\alpha)},$$

zoodat $\quad BC = 2\,b\,Cos.\,\alpha - a - 2\sqrt{(c^2 - b^2 Sin^2.\,\alpha)} \quad$ (II).

Eindelijk is $AR = AI - BC = a + \frac{1}{2}\sqrt{(c^2 - b^2 Sin^2.a)} - b Cos.a$, en hieruit volgt, omdat $AB = \sqrt{(AR^2 + BR^2)}$ is,

$AB = \sqrt{\{b^2 Sin^2.a + (-b Cos.a + a + \frac{1}{2}\sqrt{(c^2 - b^2 Sin^2.a)})^2\}}$ (III), waardoor de drie gevraagde zijden bepaald zijn.

Voor den tweeden vierhoek is $F'C = EI + EG'$, dat is $F'C = b Cos.a - \frac{1}{2}a + \sqrt{(c^2 - b^2 Sin^2.a)}$; waaruit volgt, dat wij, om $B'C$ en AB' te vinden, in (II) en (III) alleen $\sqrt{(c^2 - b^2 Sin^2.a)}$ van teeken moeten doen veranderen.

CXXXIX. VOORSTEL.

Door J. JONKHERT.

In een trapezium heeft men twee der hoekpunten door eene diagonaal vereenigd, en uit de twee overige hoekpunten loodlijnen op deze diagonaal nedergelaten. Indien nu deze diagonaal en elke der gezegde loodlijnen gegeven is, benevens de hoek van het trapezium, die aan de bazis staat en waaruit men eene der loodlijnen heeft nedergelaten, dan vraagt men dit trapezium, zoowel door constructie als door berekening, te bepalen?

OPGELOST *door* J. BASSAN, J. JONKHERT *en* L. J. ULMAN.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Het gevraagde trapezium wordt op de volgende wijze geconstrueerd. — Men neme AC, *Fig.* 105, gelijk de gegevene diagonaal, en beschrijve op dezelve een cirkelsegment, dat den gegeven' hoek van het trapezium bevat. Daar nu de loodlijn DE gegeven is, behoeft men slechts eene lijn KH evenwijdig met AC te trekken, op eenen afstand van dezelve gelijk de lengte van deze loodlijn, en dan zal het punt D, waarin deze lijn het cirkelsegment snijdt, het hoekpunt D van het trapezium wezen, waardoor dan de bazis AD en de zijde CD bepaald is. Trekkende nu CM evenwijdig aan AD, dan moet hierin het vierde hoekpunt gelegen zijn, en daar de loodlijn BF gegeven is, zal men alleen eene lijn IL op dezen afstand evenwijdig met AC te trekken hebben, om het vierde punt B en dus het geheele trapezium ABCD te bepalen.

De lijn KH het cirkelsegment nog in een tweede punt D' doorsnijdende, geeft dezelfde constructie nog een tweede trapezium AB'CD', dat aan het begeerde voldoet.

Ter berekening van het trapezium, stellen wij $AC = a$, $DE = b$, BF

$BF = c$ en $CDA = \alpha$, en nemen als onbekenden aan $\angle ADE = \frac{1}{2}\alpha + \phi$ en $\angle CDE = \frac{1}{2}\alpha - \phi$; men heeft alsdan

$AE = b\,Tang.(\frac{1}{2}\alpha + \phi)$ en $CE = b\,Tang.(\frac{1}{2}\alpha - \phi)$,

en daar derzelver som gelijk a moet zijn,

$$b\,Tang.(\tfrac{1}{2}\alpha + \phi) + b\,Tang.(\tfrac{1}{2}\alpha - \phi) = a,$$

of

$$Tang.(\tfrac{1}{2}\alpha + \phi) + Tang.(\tfrac{1}{2}\alpha - \phi) = \frac{a}{b},$$

dat is

$$\frac{Sin.(\frac{1}{2}\alpha + \phi)}{Cos.(\frac{1}{2}\alpha + \phi)} + \frac{Sin.(\frac{1}{2}\alpha - \phi)}{Cos.(\frac{1}{2}\alpha - \phi)} = \frac{a}{b},$$

of

$$\frac{Sin.(\frac{1}{2}\alpha + \phi)Cos.(\frac{1}{2}\alpha - \phi) + Sin.(\frac{1}{2}\alpha - \phi)Cos.(\frac{1}{2}\alpha + \phi)}{Cos.(\frac{1}{2}\alpha + \phi)Cos.(\frac{1}{2}\alpha - \phi)} = \frac{a}{b},$$

dat is

$$\frac{Sin.\alpha}{Cos.(\frac{1}{2}\alpha + \phi)\,Cos.(\frac{1}{2}\alpha - \phi)} = \frac{a}{b},$$

en daar de noemer kan worden herleid tot $Cos^2.\frac{1}{2}\alpha - Sin^2.\phi$,

$$\frac{Cos^2.\frac{1}{2}\alpha - Sin^2.\phi}{Sin.\alpha} = \frac{b}{a},$$

waaruit

$$Sin.\phi = \sqrt{(Cos^2.\tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{b}{a}Sin.\alpha)} \quad . \; . \; . \; . \; (I).$$

Zoodra ϕ gevonden is, heeft men verder

$$AD = \frac{b}{Cos.(\frac{1}{2}\alpha + \phi)} \; . \; (II) \quad \text{en} \quad CD = \frac{b}{Cos.(\frac{1}{2}\alpha - \phi)} \; . \; (III),$$

en daar, CB evenwijdig met AD zijnde, $\angle CBF = \angle ADE = \frac{1}{2}\alpha + \phi$ is,

$$BC = \frac{c}{Cos.(\frac{1}{2}\alpha + \phi)} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (IV).$$

Eindelijk volgt hieruit

$FC = c\,Tang.(\frac{1}{2}\alpha + \phi)$,

dus $AF = a - c\,Tang.(\frac{1}{2}\alpha + \phi)$,

en dus $AB = \sqrt{\{a^2 - 2ac\,Tang.(\frac{1}{2}\alpha + \phi) + c^2 Sec^2.(\frac{1}{2}\alpha + \phi)\}}$. (V),

waardoor dan al de zijden van het trapezium berekend kunnen worden.

De vergelijking (I) tot twee waarden van ϕ aanleiding gevende, zoo worden ook door onze formulen beide de trapeziums berekend, welke wij door constructie gevonden hebben.

CXL.

CXL. VOORSTEL.

Door S. KLIJNSMA.

Van eenen driehoek is gegeven de hoogte, de bazis en het verschil der hoeken aan de bazis. Men vraagt dezen driehoek, zoowel door constructie als door berekening, te bepalen?

OPLOSSING. *Door* I. R. SCHMIDT.

§ 1. Stellen wij de bazis CB $= a$, *Fig.* 106, de hoogte AD $= h$ en het verschil der hoeken aan de bazis gelijk α gegeven. Indien wij dan C voor den grootsten dezer hoeken aannemen, en derzelver som gelijk ϕ stellen, is $C + B = \phi$ en $C - B = \alpha$, zoodat

$$C = \tfrac{1}{2}(\phi + \alpha), \quad B = \tfrac{1}{2}(\phi - \alpha) \text{ en } A = 180^\circ - \phi.$$

Nu is de inhoud van driehoek ABC gelijk $\frac{1}{2} BC \times AD = \frac{1}{2} a h$; maar men heeft ook voor dezen inhoud $\frac{1}{2} a^2 \times \frac{Sin.\,B \times Sin.\,C}{Sin.\,A}$, en dit geeft ons de vergelijking

$$\frac{Sin.\,B \times Sin.\,C}{Sin.\,A} = \frac{h}{a},$$

of

$$\frac{Sin.\,\frac{1}{2}(\phi + \alpha)\,Sin.\,\frac{1}{2}(\phi - \alpha)}{Sin.\,\phi} = \frac{h}{a},$$

uit welke vergelijking de waarde van de onbekende ϕ op zeer veel verschillende wijzen kan worden afgeleid. Zie hier eene van dezelve.

Omdat in het algemeen $Sin.\,p\;Sin.\,q = \frac{1}{2}\,Cos.\,(q - p) - \frac{1}{2}\,Cos.\,(q + p)$ is, kan onze vergelijking aldus geschreven worden:

$$\frac{Cos.\,\alpha - Cos.\,\phi}{Sin.\,\phi} = \frac{2h}{a},$$

of

$$\frac{2h}{a}\,Sin.\,\phi = Cos.\,\alpha - Cos.\,\phi,$$

dat is

$$Sin.\,\phi + \frac{a}{2h}\,Cos.\,\phi = \frac{a}{2h}\,Cos.\,\alpha.$$

Stellen wij dus

$$\frac{a}{2h} = Tang.\,\mu \quad \ldots \quad (1),$$

dan is

$$Sin.\,\phi + Tang.\,\mu\,Cos.\,\phi = Tang.\,\mu\,Cos.\,\alpha,$$

of

$$Sin.\,\phi\,Cos.\,\mu + Sin.\,\mu\,Cos.\,\phi = Sin.\,\mu\,Cos.\,\alpha,$$

dat is

$$Sin.\,(\phi + \mu) = Sin.\,\mu\,Cos.\,\alpha \quad \ldots \quad (2).$$

Of-

Offchoon deze vergelijking twee waarden voor $\phi+\mu$ doet kennen, welke elkanders fupplement zijn, zal men echter in ons geval alleen de grootfte dezer twee waarden moeten gebruiken; want $Cos. \alpha < 1$ zijnde, is

$$Sin. \mu \, Cos \, \alpha < Sin. \mu,$$

en dus $$Sin. (\phi+\mu) < Sin. \mu.$$

Wanneer men dus voor $\phi+\mu$ den fcherpen hoek nam, welke uit de vergelijking $Sin (\phi+\mu) = Sin. \mu \, Cos. \alpha$ voortfpruit, zou $\phi+\mu<\mu$ en dus ϕ, dat is B+C, negatief worden. Hieruit blijkt dan, dat ons vraagftuk wordt opgelost door de vergelijkingen

$$Tang. \mu = \frac{a}{2h} \text{ en } \phi = 180° - \mu - Boog. Sin. \{Sin. \mu \, Cos \, \alpha\}.$$

Wanneer eindelijk ϕ gevonden is, kost het geene moeite al het overige in den driehoek te berekenen; want dan is $B = \frac{1}{2}(\phi-\alpha)$; $C = \frac{1}{2}(\phi+\alpha)$, $A = 180° - \phi$, $AB = a\frac{Sin. C}{Sin. A}$ en $AC = a \times \frac{Sin. B}{Sin. A}$.

§ 2. Men kan de vergelijking (α) ook op de volgende wijze oplosfen. Schrijven wij dezelve aldus:

$$\frac{Sin. \frac{1}{2}(\phi-\alpha) \, Sin. \frac{1}{2}(\phi+\alpha)}{Sin. \frac{1}{2}\phi \, Cos. \frac{1}{2}\phi} = \frac{2h}{a},$$

en deelende, na $Sin. \frac{1}{2}(\phi-\alpha)$ en $Sin. \frac{1}{2}(\phi+\alpha)$ ontwikkeld te hebben, onder en boven door $Cos^2. \frac{1}{2}\phi$, dan komt er

$$\frac{(Tang. \frac{1}{2}\phi \, Cos. \frac{1}{2}\alpha - Sin. \frac{1}{2}\alpha)(Tang. \frac{1}{2}\phi \, Cos. \frac{1}{2}\alpha + Sin. \frac{1}{2}\alpha)}{Tang. \frac{1}{2}\phi} = \frac{2h}{a},$$

of $$Tang^2. \tfrac{1}{2}\phi \, Cos^2. \tfrac{1}{2}\alpha - Sin^2. \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{2h}{a} Tang. \tfrac{1}{2}\phi,$$

dat is $$Tang^2. \tfrac{1}{2}\phi - \frac{2h}{a} Sec^2. \tfrac{1}{2}\alpha \, Tang. \tfrac{1}{2}\phi = Tang^2. \tfrac{1}{2}\alpha,$$

waaruit $$Tang. \tfrac{1}{2}\phi = \frac{h}{a} Sec^2. \tfrac{1}{2}\alpha \pm \sqrt{\left\{\frac{h^2}{a^2} Sec^4. \tfrac{1}{2}\alpha + Tang^2. \tfrac{1}{2}\alpha\right\}}.$$

Hierin kan nu alleen het bovenfte teeken gebruikt worden; want het benedenfte nemende, zou $Tang. \frac{1}{2}\alpha$ blijkbaar negatief worden, waaruit zou volgen, dat ϕ of negatief of grooter dan 180°

zou

zou zijn, hetgeen, daar $\phi = B + C$ is, geen van beide plaats kan hebben. Gebruikende dan het bovenste teeken, zoo is het gemakkelijk in te zien, dat de waarde van $Tang. \frac{1}{2} \phi$ aldus kan worden geschreven

$$Tang. \tfrac{1}{2} \phi = \frac{h}{a} Sec^2. \tfrac{1}{2} \alpha \left\{ 1 + \sqrt{\left(1 + \frac{a^2}{4h^2} Sin^2 \alpha\right)} \right\},$$

en hierdoor ϕ bepaald hebbende, wordt al het overige zoo als boven gevonden.

§ 3. Zie hier eene geheel andere oplossing van het vraagstuk, welke het voordeel heeft, om tot eene gemakkelijke constructie te voeren.

Stellen wij wederom $BC = a$, $AD = h$ en $C - B = \alpha$. Stellen wij verder, na BC in E midden door gedeeld te hebben, $ED = x$, dan is $BD = \frac{1}{2} a + x$ en $CD = \frac{1}{2} a - x$. Nu is $h = DC \times Tang. C = BD \times Tang. B$, waaruit volgt

$$Tang. C = \frac{h}{\frac{1}{2} a - x} \quad \text{en} \quad Tang. B = \frac{h}{\frac{1}{2} a + x};$$

maar $C - B = \alpha$ zijnde, moet men hebben

$$\frac{Tang. C - Tang. B}{1 + Tang. C \; Tang. B} = Tang. \alpha,$$

zoodat
$$\frac{\dfrac{h}{\frac{1}{2} a - x} - \dfrac{h}{\frac{1}{2} a + x}}{1 + \dfrac{h^2}{\frac{1}{4} a^2 - x^2}} = Tang. \alpha,$$

of
$$\frac{2 h x}{h^2 + \frac{1}{4} a^2 - x^2} = Tang. \alpha,$$

dus
$$h^2 + \tfrac{1}{4} a^2 - x^2 = 2 h x \, Cot. \alpha,$$

of
$$x^2 + 2 h x \, Cot. \alpha = h^2 + \tfrac{1}{4} a^2,$$

waaruit
$$x = - h \, Cot. \alpha \pm \sqrt{\left(\frac{h^2}{Sin^2. \alpha} + \tfrac{1}{4} a^2\right)}.$$

Daar nu C grooter dan B ondersteld is, moet $BA > AC$ zijn. Het punt A ligt dus ter regterhand van de loodlijn EF, en dus moet x positief zijn, waaruit blijkt, dat wij het bovenste teeken moeten gebruiken, en dus is

$$x = - h \, Cot. \alpha + \sqrt{\left\{ \left(\frac{h}{Sin. \alpha}\right)^2 + (\tfrac{1}{2} a)^2 \right\}}.$$

Uit

Uit deze formule wordt nu de volgende constructie afgeleid. — Stel, *Fig.* 129, BF = *h* loodregt op BC en trek door F de lijn GH evenwijdig met BC, dan moet de top A in deze lijn gelegen zijn.

Maak GFI = *a*, dan is EI = $h\, Cot.\, a$ en FI = $\frac{h}{Sin.\, a}$.

Stel FK = GE = $\frac{1}{2}a$, loodregt op FI, dan is

$$IK = \sqrt{\left\{\left(\frac{h}{Sin.\, a}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}a\right)^2\right\}},$$

makende dus ID = IK en trekkende DA loodregt op BD, dan zal A de top en dus BAC de gevraagde driehoek wezen; want dan heeft men ED = — EI + ID = — EI + IK = $-h\, Cot.\, a +$
$$\sqrt{\left\{\left(\frac{h}{Sin.\, a}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}a\right)^2\right\}} = x.$$

Aanmerking. Construeert men de tweede waarde van *x*, namelijk $x = -\frac{1}{2}h\, Cot.\, a - \sqrt{\left\{\left(\frac{h}{Sin.\, a}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}a\right)^2\right\}}$, dan zal men bevinden, dat niet C — B = *a*, maar C — B = — (180° — *a*) wordt. Hieruit volgt nu mede *Tang.* (C — B) = *Tang. a*, en ofschoon dus dit tweede antwoord niet aan de vraag voldoet, zoo voldoet hetzelve aan de vergelijking *Tang.* (C — B) = *Tang. a*, waardoor wij ons vraagstuk hebben opgelost. Hadden wij ons vraagstuk opgelost door de vergelijking *Sin.* (C — B) = *Sin. a*, dan zouden wij eveneens de waarden van *x* gevonden hebben, die C — B = *a* en die C — B = 180° — *a* maken, en zoo vervolgens.

CXLI. VOORSTEL.

Door J. Bassan.

Er is een jaargetal, bestaande uit vier getalmerken; indien men nu door het eerste, tweede, derde en vierde cijfer dat der duizendtallen, honderdtallen, tientallen en eenheden verstaat, dan vormen het eerste, derde, vierde en tweede cijfer eene meetkunstige reeks. Verder is het vierkant van het product des eersten en vierden cijfers gelijk het product van het tweede en derde cijfer. Zoo nu de som der cijferletters 15 is, vraagt men naar dit getal?

Opgelost *door* J. Bassan, L. J. Ulman, A. B. de Bock Jun. *en* J. Jonkheer.

Op-

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Uit de eerste voorwaarde volgt, dat wij de vier getalmerken achtervolgens kunnen voorstellen door

$$x,\quad xy^3,\quad xy \text{ en } xy^2,$$

en dan geven de twee overige voorwaarden ons

$$x^4y^4 = x^2y^4 \text{ en } x(1+y+y^2+y^3) = 15.$$

Uit de eerste dezer vergelijkingen is terstond $x^2 = 1$ of $x = 1$; waardoor de tweede overgaat in

$$1+y+y^2+y^3 = 15,$$

of

$$y^3+y^2+y-14 = 0,$$

waaruit $y = 2$, terwijl de twee andere onbestaanbaar zijn. Wij hebben alzoo $x = 1$, $xy = 2$, $xy^2 = 4$, $xy^3 = 8$, en het gevraagde jaartal is 1824.

CXLII. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Twee personen bezitten ieder een aantal guldens; wanneer men deze getallen met elkander vermenigvuldigt, zoo is de uitkomst 63; doch het verschil van derzelver cuben staat tot den cubus van derzelver verschil als 193 *tot* 4. *Hoeveel guldens had ieder?*

OPGELOST *door* G. BRANDSTEDER, J. BASSAN, A. B. DE BOCK JUN., L. J. ULMAN *en* J. JONKHEERT.

OPLOSSING *door* G. BRANDSTEDER.

Stellen wij het aantal guldens, die ieder in het bijzonder heeft, x en y, dan is het product

$$xy = 63,$$

terwijl men, naar aanleiding des voorstels, verder heeft

$$x^3 - y^3 : (x-y)^3 = 193 : 4.$$

De termen der eerste reden door $x-y$ deelende, komt er

$$x^2+xy+y^2 : x^2-2xy+y^2 = 193 : 4,$$

en hieruit ontstaat de vergelijking

$$4x^2+4xy+4y^2 = 193x^2-386xy+193y^2,$$

of

$$189x^2-390xy+189y^2 = 0,$$

dat is

$$63x^2-130xy+63y^2 = 0,$$

en substituerende hierin $xy = 63$,

$$63x^2+63y^2 = 130\times 63,$$

zoodat

$$x^2+y^2 = 130;$$

ver-

vermeerdert en vermindert men dit met $2xy=126$, dan komt er

$$(x+y)^2=256 \quad \text{en} \quad (x-y)^2=4,$$

dus $\quad x+y=16 \quad$ en $\quad x-y=2,$

waardoor $x=9$ en $y=7$ voor het aantal guldens, die ieder in het bijzonder bezat.

CXLIII. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Twee personen bezitten elk een zeker aantal guldens, welke getallen 54 tot product hebben; wanneer nu de som van derzelver cuben tot den cubus van derzelver som in reden is als 7 tot 25, dan wordt gevraagd naar het aantal guldens van ieder?

OPGELOST *door* G. BRANDSTEDER, A. B. DE BOCK JUN., J. BASSAN, L. J. ULMAN en J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* G. BRANDSTEDER.

De gevraagde getallen x en y stellende, hebben wij

$$xy=54 \quad \text{en} \quad x^3+y^3:(x+y)^3=7:25,$$

of de termen van de eerste reden door $x+y$ deelende,

$$x^2-xy+y^2:x^2+2xy+y^2=7:25,$$

of $\quad 25x^2-25xy+25y^2=7x^2+14xy+7y^2,$

dàt is $\quad 18x^2-39xy+18y^2=0,$

en daar $xy=54=3\times 18$ is,

$$18x^2+18y^2=117\times 18,$$

zoodat $\quad x^2+y^2=117.$

Hierbij tellende en aftrekkende $2xy=108$, komt er

$$(x+y)^2=225 \quad \text{en} \quad (x-y)^2=9,$$

dus $\quad x+y=15 \quad$ en $\quad x-y=3,$

zoodat $x=9$ en $y=6$ guldens.

CXLIV. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Van eene rekenkunstige reeks van vier termen en eene meetkunstige van drie termen, is het volgende bekend: 1°. Het gemeen verschil der termen van de rekenkunstige reeks is gelijk aan driemaal het quotient der achtervolgende termen van de meetkunstige. 2°. De tweede term der rekenkunstige reeks is een quadraat, welks wortel de eerste term der meetkunstige is. 3°. De som der vierkanten van de twee eerste termen der rekenkunstige reeks is vijf meer dan driemaal het quadraat des eersten, plus de tweede magt van

 den

den tweeden term der meetkunstige reeks. 4°. *De som van den derden term der rekenkunstige en den tweeden term der meetkunstige reeks, min een, is gelijk aan de som van den eersten term der meetkunstige en den laatsten term der rekenkunstige reeks. Welke zijn deze reeksen?*

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, G. BRANDSTEDER, J. JONKHEERT, A. B. DE BOCK JUN. *en* J. BASSAN.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

Stel de meetkunstige reeks x, xy, xy^2, dan is het gemeen verschil der termen van de rekenkunstige reeks $3y$, en volgens de tweede voorwaarde, is de derde term van deze reeks x^2, zoodat dezelve moet worden voorgesteld door

$$x^2-6y,\ x^2-3y,\ x^2 \text{ en } x^2+3y.$$

De twee laatste voorwaarden geven ons dus

$$(x^2-6y)^2+(x^2-3y)^2-5=3x^2+x^2y^2 \quad . \quad . \quad (1),$$

en

$$x^2+xy-1=x+x^2+3y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

De eerste dezer vergelijkingen ontwikkelende, komt er, alles volgens de magten van y rangschikkende,

$$(x^2-45)y^2+18x^2y-2x^4+3x^2+5=0 \quad . \quad . \quad (3),$$

en daar wij uit de tweede terstond hebben

$$y=\frac{x+1}{x-3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

zoo vinden wij, door deze waarde van y in (3) over te brengen,

$$(x^2-45)\times\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^2+18x^2\times\frac{x-1}{x+3}-2x^4+3x^2+5=0,$$

welke vergelijking, met $(x+3)^2$ vermenigvuldigd, na herleid en door $2x$ gedeeld te zijn, geeft

$$x^5-6x^4-2x^3+26x^2+33x+60=0 \quad . \quad . \quad (5),$$

waaruit $x=5$, en dus ingevolge van (4), $y=3$, zoodat de twee gevraagde reeksen zijn 5, 15, 45 en 7, 16, 25, 34.

De vergelijking (5) door $x-5=0$ deelende, komt er voor de vergelijking, die de overige wortels bevat,

$$x^4-x^3-7x^2-9x-12=0,$$

welke twee bestaanbare wortels heeft, als een' tusschen 3 en 4 en een' tusschen -1 en -2, terwijl de twee andere onbestaanbaar

zijn,

zijn, waaruit dan blijkt, dat er nog twee andere antwoorden in onmeetbare getallen op het vraagstuk zijn.

CXLV. VOORSTEL.

Door S. KLYNSMA.

Een vat kan door twee kranen A *en* B *gevuld worden, welke ieder in het bijzonder het water met eenparige snelheid doen instorten. Blijft de eerste kraan* $\frac{3}{5}$ *gedeelte van den tijd geopend, welke er noodig is om het vat door de kraan* B *alleen te doen vol loopen, en laat men voorts het vat, alleen door de kraan* B*, verder vol loopen, dan is de geheele verloopene tijd 6 uren meer dan die, welke er noodig zou zijn, om het vat te doen vol loopen, wanneer* A *en* B *beide geopend waren. Eindelijk is nog bekend, dat er, in het laatste geval, door* A *slechts* $\frac{2}{3}$ *van het water is ingestort, hetwelk bij de eerste vulling door* B *is ingeloopen. Men vraagt hierdoor te bepalen, in hoe veel tijd het vat door elke der kranen in het bijzonder zou vol loopen?*

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, A. B. DE BOCK JUN. *en* J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

Stel het aantal uren, waarin het vat door de kraan A alleen volloopt, x, en het aantal uren, waarin hetzelve door B alleen volloopt, y, dan loopt er, den inhoud van het vat V stellende, in elk uur, door A alleen $\frac{1}{x}V$ en door B alleen $\frac{1}{y}V$ in het vat; bij gevolg door A en B te zamen $\frac{1}{x}V + \frac{1}{y}V$ of $\frac{x+y}{xy} \times V$; deelende alzoo deze uitdrukking in V, dan komt er voor het aantal uren, dat er noodig is, om het vat door A en B te zamen te doen volloopen, $\frac{xy}{x+y}$.

Blijft nu A gedurende $\frac{3}{5}y$ uren open, dan loopt er in het vat eene hoeveelheid $\frac{3}{5} \times \frac{y}{x}V$, en de overblijvende ruimte, die door B gevuld moet worden, is dus $V - \frac{3y}{5x}V$ of $\frac{5x-3y}{5x}V$, en deelende dit door $\frac{1}{y}V$, dan komt er voor den tijd, welke B

hier-

hiertoe behoeft, $\frac{y(5x-3y)}{5x}$. Dit geeft ons alzoo, volgens de opgaaf van het vraagſtuk,

$$\tfrac{3}{5}y+\frac{y(5x-3y)}{5x}=\frac{xy}{x+y}+6 \quad \ldots\ldots \quad (I).$$

Ten einde de tweede vergelijking te vinden, herinneren wij ons, dat de tijd van volling, door A en B te zamen, gelijk $\frac{xy}{x+y}$ uren is, waaruit volgt, dat er in dezen tijd door A alleen eene hoeveelheid $\frac{y}{x+y}V$, en door B alleen eene hoeveelheid $\frac{x}{x+y}V$ in het vat is geſtroomd. Dit in aanmerking nemende, geeft de laatſte voorwaarde van het vraagſtuk ons, na door V gedeeld te hebben,

$$\frac{y}{x+y}=\tfrac{2}{3}\cdot\frac{5x-3y}{5x} \quad \ldots\ldots \quad (II).$$

Deze laatſte vergelijking met het product der noemers vermenigvuldigende, komt er

$$15xy=2(5x-3y)(x+y),$$

of

$$15xy=10x^2+4xy-6y^2,$$

dus

$$10x^2-11xy-6y^2=0,$$

of

$$x^2-\tfrac{11}{10}xy-\tfrac{6}{10}y^2=0,$$

welke als eene vierkantsvergelijking ten opzigte van x beſchouwd, geeft

$$x=\tfrac{11}{20}y\pm\sqrt{(\tfrac{121}{400}y^2+\tfrac{6}{10}y^2)},$$

dat is

$$x=\tfrac{3}{2}y \quad \ldots\ldots\ldots \quad (*).$$

Brengen wij nu deze waarde over in (I), zoo verkrijgen wij

$$\tfrac{3}{5}y+\frac{y(\tfrac{15}{2}y-3y)}{\tfrac{15}{2}y}=\frac{\tfrac{3}{2}y^2}{\tfrac{3}{2}y+y}+6,$$

of

$$\tfrac{3}{5}y+\tfrac{3}{5}y=\tfrac{3}{5}y+6,$$

dus $\tfrac{3}{5}y=6$ en $y=10$, waardoor $x=\tfrac{3}{2}y=15$. Het vat loopt dus,

(*) Wij gebruiken hier alleen het bovenſte teeken, omdat het benedenſte den tijd x negatief zou maken, welk antwoord toepasſelijk zou zijn, ingevalle het water door B inſtortte en door de kraan A uitſtroomde.

dus, door A alleen, in 15, door B alleen, in 10, en door A en B te zamen, in 6 uren vol.

CXLVI. VOORSTEL.

Door S. KLYNSMA.

Van eenen driehoek is bekend de tophoek en de som der zijden om dien hoek, benevens het verschil der stukken, waarin de loodlijn, uit den gegeven' tophoek op de overstaande zijde nedergelaten, deze grondlijn verdeelt. Men vraagt dezen driehoek te berekenen en te construeren?

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, A. B. DE BOCK JUN. *en* J. BASSAN.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

Zij, *Fig.* 108, $C = \alpha$ de gegeven hoek, $AC + BC = 2b$ en $AD - DB = 2a$, dan stellen wij $AC = b + x$, $BC = b - x$, $AD = y + a$ en $BD = y - a$, waardoor $AB = 2y$. Nu is $CD^2 = AC^2 - AD^2$. en $CD^2 = CB^2 - BD^2$, dus

$$AC^2 - AD^2 = CB^2 - BD^2,$$

en brengende hierin de gestelde waarden over,

$$(b+x)^2 - (y+a)^2 = (b-x)^2 - (y-a)^2,$$

of ontwikkelende en de gelijke termen aan beide zijden weglatende,

$$2bx - 2ay = -2bx + 2ay;$$

dat is $4bx = 4ay$, of $bx = ay$, waaruit $y = \frac{b}{a}x$.

Verder is, volgens de bekende eigenschap der driehoeken,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\,AC \times BC \times Cos.\,C,$$

en dus $4y^2 = (b+x)^2 + (b-x)^2 - 2(b^2 - x^2)\,Cos.\,\alpha.$

Brengende dus hierin de waarde van y over, dan komt er

$$\frac{4b^2}{a^2}x^2 = 2b^2 + 2x^2 - 2(b^2 - x^2)\,Cos.\,\alpha,$$

of $$2b^2x^2 = a^2b^2 + a^2x^2 - a^2(b^2 - x^2)\,Cos.\,\alpha,$$

dat is $(2b^2 - a^2 - a^2\,Cos.\,\alpha)\,x^2 = a^2b^2 - a^2b^2\,Cos.\,\alpha,$

of $$(2b^2 - a^2(1 + Cos.\,\alpha))\,x^2 = a^2b^2(1 - Cos.\,\alpha),$$

dus, uit hoofde van $1 + Cos\,\alpha = 2\,Cos^2.\tfrac{1}{2}\alpha$ en $1 - Cos.\,\alpha = 2\,Sin^2.\tfrac{1}{2}\alpha$,

$$(b^2 - a^2\,Cos^2.\tfrac{1}{2}\alpha)\,x^2 = a^2b^2\,Sin^2.\tfrac{1}{2}\alpha,$$

waaruit $$x = \frac{a\,b\,Sin.\tfrac{1}{2}a}{\sqrt{(b^2 - a^2\,Cos^2.\tfrac{1}{2}a)}},$$

en dus $$y = \frac{b^2\,Sin.\tfrac{1}{2}a}{\sqrt{(b^2 - a^2\,Cos^2.\tfrac{1}{2}a)}}.$$

De drie zijden van den driehoek $b+x$, $b-x$ en $2y$ zijnde, vinden wij eindelijk voor dezelven

$$AC = b + \frac{a\,b\,Sin.\tfrac{1}{2}a}{\sqrt{(b^2 - a^2\,Cos^2.\tfrac{1}{2}a)}},$$

$$BC = b - \frac{a\,b\,Sin.\tfrac{1}{2}a}{\sqrt{(b^2 - a^2\,Cos^2.\tfrac{1}{2}a)}},$$

en $$AB = \frac{2\,b^2\,Sin.\tfrac{1}{2}a}{\sqrt{(b^2 - a^2\,Cos^2.\tfrac{1}{2}a)}}.$$

CONSTRUCTIE *door* I. R. SCHMIDT.

Maak PCQ gelijk den gegeven' hoek a en deel dezen hoek, door de lijn CG, midden door.

Neem $CE = b$ en $CF = a$, beschrijf op CE eenen halven cirkel, en trek, na EH getrokken te hebben, FI evenwijdig met EH. Alsdan is ten duidelijkste $EH = b\,Sin.\tfrac{1}{2}a$ en $CI = a\,Cos.\tfrac{1}{2}a$.

Beschrijf uit C, met CI als straal, een' cirkelboog IK en trek EK, dan is $EK = \sqrt{(b^2 - a^2\,Cos^2.\tfrac{1}{2}a)}$, en bij gevolg $x = a \times \frac{EH}{EK}$ of $EK : EH = a : x$.

Nemende dus $EL = CF$ en trekkende LM evenwijdig met KH, dan zal $EM = x$ zijn.

Wanneer dus $EN = EA = EM$ genomen, en $CB = CN$ gemaakt wordt, zal ACB de gevraagde driehoek zijn; want dan is $CA = b + x$ en $CB = b - x$.

CXLVII. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK JUN.

Men vraagt de functie $y = Tang.(a - bx + cx^2 - dx^3 + enz.)$ in eene reeks te ontwikkelen, welke volgens de magten van x voortgaat?

OPGELOST *door* A. B. DE BOCK JUN. *en* J. JONKHEERT.

OPLOSSING *van* A. B. DE BOCK JUN.

Stellen wij kortheidshalve de reeks

$$a - bx + cx^2 - dx^3 + enz. = z,$$

dan is $$y = Tang.z.$$

Daar

Daar nu y oorspronkelijk als eene functie van x wordt beschouwd, moet ook z als eene functie van de veranderlijke grootheid x worden aangezien; zoodat δz zoowel als δy veranderlijk is. Differentieren wij dan, in deze onderstelling, de vergelijking $y = Tang\ z$ twee achtervolgende malen, zoo hebben wij

$$\delta y = \frac{\delta z}{Cos^2.\ z} \quad \text{en} \quad \delta^2 y = \frac{Cos.\ z\, \delta^2 z + 2\, Sin.\ z\, \delta z^2}{Cos^3\ z}.$$

Ten einde uit de laatste vergelijking $Cos.\ z$ en $Sin.\ z$ te verdrijven, geeft de waarde van δy ons vooreerst

$$Cos^2.\ z = \frac{\delta z}{\delta y},$$

en vermenigvuldigende dit met $Tang.\ z = y$, dan komt er

$$Cos.\ z\ Sin.\ z = y \frac{\delta z}{\delta y}.$$

Schrijven wij dus de waarde van $\delta^2 y$ aldus

$$\delta^2 y = \frac{Cos^2.\ z\, \delta^2 z + 2\, Cos.\ z\ Sin.\ z\, \delta z^2}{Cos^4.\ z},$$

en substitueren wij hierin de waarden van $Cos^2.\ z$ en $Cos.\ z\ Sin.\ z$, dan verkrijgen wij

$$\delta^2 y = \frac{\frac{\delta z}{\delta y} \times \delta^2 z + 2 y . \frac{\delta z}{\delta y} \times \delta z^2}{\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)^2};$$

of $$\delta^2 y \left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)^2 = \delta^2 z \frac{\delta z}{\delta y} + 2 y \frac{\delta z}{\delta y} \delta z^2,$$

dat is, met δy^2 vermenigvuldigende en door δz deelende,

$$\delta^2 y\, \delta z - \delta^2 z\, \delta y - 2 y\, \delta y\, \delta z^2 = 0,$$

en wanneer wij door δx^3 deelen,

$$\frac{\delta z}{\delta x} . \frac{\delta^2 y}{\delta x^2} - \frac{\delta y}{\delta x} . \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} - 2 y . \frac{\delta y}{\delta x} . \left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)^2 = 0 \quad . \quad (\alpha).$$

Nu hebben wij vooreerst, uit

$$z = a - b x + c x^2 - d x^3 + enz.,$$

$$\frac{\delta z}{\delta x} = - b + 2 c x - 3 d x^2 + enz.,$$

en $$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = + 1 . 2 c - 2 . 3 . d x + enz.$$

 Daar

Daar verder de functie y volgens de magten van x moet worden ontwikkeld, zoo stellen wij

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{enz.},$$

dus $$\frac{\partial y}{\partial x} = \quad + B \quad + 2Cx + 3Dx^2 + \text{enz.},$$

en $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \qquad + 1.2.C + 2.3\,Dx + \text{enz.}$$

Substitueren wij dan deze waarden in de vergelijking (a), zoo komt er

$$\left\{\begin{array}{l} (-b+2cx-3dx^2+\text{enz.})(2C+2.3Dx+3.4Ex^2+\text{enz.}) \\ -(B+2Cx+3Dx^2+\text{enz.})(2c-2.3dx+3.4ex^2-\text{enz.}) \\ -2(A+Bx+Cx^2+\text{enz.})(B+2Cx+3Dx^2+\text{enz.})(-b+2cx- \\ 3dx^2+\text{enz.})^2 \end{array}\right\} = 0.$$

Welke vergelijking nu voor alle waarden van x moet doorgaan en dus identiek moet wezen, zoodat wij, alles ontwikkeld en naar de magten van x gerangschikt hebbende, de coëfficient van elk der magten van x gelijk o zullen moeten stellen, ten einde hierdoor de onbepaalde coëfficienten te berekenen.

Deze ontwikkeling en rangschikking uitvoerende, verkrijgen wij

$$\left.\begin{array}{rrl} -2b\,C & -6b\,Dx & -12b\,E\,x^2 - \text{enz.} \\ & +4c\,Cx & +12c\,D\,x^2 + \text{enz.} \\ & & -6d\,C\,x^2 - \text{enz.} \\ -2c\,B & +6d\,Bx & -12e\,B\,x^2 + \text{enz.} \\ & -4c\,Cx & +12d\,C\,x^2 - \text{enz.} \\ & & -6c\,D\,x^2 + \text{enz.} \\ -2b^2AB & +8bcABx & -12bdAB\,x^2 + \text{enz.} \\ & -4b^2ACx & -8c^2AB\,x^2 - \text{enz.} \\ & -2b^2B^2x & +16bcACx^2 - \text{enz.} \\ & & -6b^2AD\,x^2 + \text{enz.} \\ & & +8bc\,B^2\,x^2 - \text{enz.} \\ & & -6b^2\,BC\,x^2 - \text{enz.} \end{array}\right\} = 0.$$

Stellende dus elke der verticale kolommen gelijk nul, dan verkrijgen wij

$$-2bC - 2cB - 2b^2AB = 0,$$
$$-6bD + 6dB + 8bcAB - 4b^2AC - 2b^2B^2 = 0,$$

— 12

$$-12bE+6cD+6dC-12eB-(12bd+8c^2)AB\ldots$$
$$+16bcAC-6b^2AD+8bcB^2-6b^2BC=0,$$

enz.

waardoor, van C te beginnen, elk der coëfficienten in de voorgaanden wordt uitgedrukt; want wij vinden

$$C=\frac{-cB-b^2AB}{b},$$

$$D=\frac{3dB+4bcAB-2b^2AC-b^2B^2}{3b},$$

$$E=\frac{3cD+3dC-6eB-(6bd+4c^2)AB+8bcAC-3b^2AD+4bcB^2-3b^2BC}{6b},$$

enz.

zoodat al de coëfficienten gevonden zullen worden, zoodra wij A en B kunnen bepalen.

Hiertoe hebben wij nu de vergelijkingen

$$y=A+Bx+Cx^2+\text{enz.}=Tang.(a-bx+cx^2-\text{enz.})$$

en $$\frac{\delta y}{\delta x}=B+2Cx+3Dx^2+\text{enz.}=\frac{-b+2cx-3dx^2+\text{enz.})}{Cos^2.(a-bx+cx^2-\text{enz.})},$$

welke ons, door $x=0$ te stellen, geven

$$A=Tang.a \quad \text{en} \quad B=-\frac{b}{Cos^2.a},$$

waardoor dan al de overige coëfficienten bepaald zijn; want wij vinden

$$C=Sec^2.a(c+b^2Tang.a)$$
$$D=-Sec^2.a(d+2bcTang.a+\tfrac{1}{3}b^3+b^3Tang^2.a)$$

welke men zoo ver kan voortzetten als men goedvindt.

CXLVIII. VOORSTEL.

Door L. J. ULMAN.

Wanneer men in eene strook papier, in den vorm van eenen zeer langwerpigen regthoek, een' gewonen knoop legt, en denzelven zoo sterk mogelijk aanhaalt, zonder het papier te scheuren of te kreuken, dan ontstaat hierdoor altijd een regelmatige vijfhoek. Men vraagt naar het bewijs?

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, A. B. DE BOCK JUN. *en* J BASSAN.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

Laat, *Fig.* 109, de geknoopte strook papier voorstellen, dan

 blijkt

blijkt terstond uit den regthoekigen vorm van dezen strook, dat de diagonalen EG, HE, FH en IF achtervolgens evenwijdig loopen met de zijden IH, FG, EI en HG; terwijl uit dezen regthoekigen vorm tevens blijkbaar is, dat de afsnijden IN, IM, enz. van deze evenwijdige zijden en diagonalen alle even groot zijn.

Voorts is het gemakkelijk te betoogen, dat ook de vijfde diagonaal IG evenwijdig met de overstaande zijde EF loopt; want uit de evenwijdigheid der opgenoemde lijnen blijkt reeds, dat wij achtervolgens hebben:

op de bazis EI,	*drieh.* EFI = *drieh.* EHI,
op de bazis IH,	*drieh.* EHI = *drieh.* IHG,
op de bazis HG,	*drieh.* IHG = *drieh.* HFG,
op de bazis GF,	*drieh.* HFG = *drieh.* FEG,

en daar het laatste lid van elke dezer vergelijkingen tevens het voorste lid van de volgende vergelijking is, zoo volgt hieruit

drieh. EFI = *drieh.* EFG;

maar deze driehoeken staan op dezelfde bazis EF, zij hebben dus ook gelijke hoogte, en hieruit volgt, dat IG evenwijdig met EF is.

Gaan wij nu over, om de gelijkheid der zijden en der hoeken van den vijfhoek te betoogen. — Hiertoe merken wij op, dat *drieh.* EIH = ½ IE × IM, en dat ook *drieh.* EIH = ½ IH × IN is; wij hebben alzoo IE × IM = IH × IN; maar wij hebben reeds aangetoond, dat IM = IN is, en hieruit volgt dus EI = IH; terwijl op dezelfde wijze blijkt, dat IH = HG en HG = FG is, zoodat men heeft EI = IH = HG = FG.

Daar verder in de regthoekige driehoeken EIN, en GQH, IN = HQ en EI = HG is, zoo is ∠EIN = ∠GHQ, en tellende bij elk een' regten hoek op, zoo komt er ∠EIH = ∠IHG, en eveneens blijkt, dat men heeft ∠IHG = ∠HGF, waaruit dan volgt ∠EIH = ∠IHG = ∠HGF.

De gelijkbeenige driehoeken EIH, IHG en HGF zijn dus gelijk en gelijkvormig, waaruit volgt, dat al de hoeken, die wij in de figuur met een boogje geteekend hebben, even groot zijn. Maar uit de evenwijdigheid van de lijnen EF en FI met de lijnen IG en GH volgt, dat ∠EFI = ∠IGH is; terwijl uit de evenwijdigheid van EI en IF met FH en HG volgt ∠EIF = ∠FHG; hier-

wordt blijkt dus, dat men heeft $\angle EFI = \angle EIF$ en bij gevolg $EF = EI$, waardoor dan de regelmatigheid van den vijfhoek aan geenen twijfel meer onderworpen is.

CXLIX. Voorstel.

Door A. B. de Bock Jun.

Eene harmonische reeks van vier termen te vinden, zoodanig, dat de som der beide uiterste termen 15 en de som der beide middelste 10 zij?

Opgelost door A. B. de Bock Jun., L. J. Ulman, J. Josshert en J. Bassan.

Oplossing van A. B. de Bock Jun.

Stellen wij de termen van de reeks achtervolgens

$$\frac{1}{x-3y},\ \frac{1}{x-y},\ \frac{1}{x+y} \text{ en } \frac{1}{x+3y},$$

dan hebben wij de vergelijkingen

$$\frac{1}{x-3y}+\frac{1}{x+3y}=15 \quad \text{en} \quad \frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}=10,$$

of wanneer wij de gebrokens verdrijven

$$2x=15(x^2-9y^2) \quad \text{en} \quad 2x=10(x^2-y^2),$$

welke twee waarden van $2x$, aan elkander gelijk gesteld, geven

$$15(x^2-9y^2)=10(x^2-y^2),$$

of

$$3x^2-27y^2=2x^2-2y^2,$$

dat is $x^2=25y^2$, waaruit $x=5y$.

Deze waarde van x in de tweede vergelijking overgebragt, dat is in

$$x=5x^2-5y^2,$$

komt

$$5y=125y^2-5y^2=120y^2,$$

of

$$y=\tfrac{5}{120}=\tfrac{1}{24}.$$

Wij hebben dus $y=\frac{1}{24}$ en $x=5y=\frac{5}{24}$, waaruit voor de termen van de reeks volgt

$$\frac{1}{x-3y}=12,\ \frac{1}{x-y}=6,\ \frac{1}{x+y}=4 \text{ en } \frac{1}{x+3y}=3.$$

CL. Voorstel.

Door A. B. de Bock Jun.

Van eenen driehoek gegeven zijnde de som van elke der zijden met den sinus van den overstaanden hoek, vraagt men de zijden en hoeken te berekenen?

Op-

OPGELOST *door* I. R. SCHMIDT, A. B. DE BOCK JUN., J. JONGHEERT, J. BASSAN *en* L. J. ULMAN.

OPLOSSING *van* I. R. SCHMIDT.

Stellen wij de zijden x, y, z en de overstaande hoeken X, Y, Z, dan zijn de vergelijkingen

$$x + Sin\,X = a,\quad y + Sin.\,Y = b,\quad z + Sin.\,Z = c.$$

Daar verder de zijden tot elkander in reden zijn als de sinussen der overstaande hoeken, zoo kunnen wij de betrekking van elke der zijden tot den sinus van den overstaanden hoek door eene zelfde letter u uitdrukken, en alzoo stellen

$$Sin.\,X = ux,\quad Sin.\,Y = uy \quad\text{en}\quad Sin.\,Z = uz,$$

waardoor onze vergelijkingen overgaan in

$$x(1+u) = a,\quad y(1+u) = b,\quad z(1+u) = c,$$

of

$$x = \frac{a}{1+u},\quad y = \frac{b}{1+u},\quad z = \frac{c}{1+u}.$$

Hieruit volgt dan, daar de inhoud van eenen driehoek wordt uitgedrukt door

$$I = \tfrac{1}{4}\sqrt{(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)},$$

dat de inhoud van onzen driehoek zal zijn

$$I = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}{4(1+u)^2},$$

of wanneer wij kortheidshalve stellen

$$\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)} = M \quad (1),$$

$$I = \frac{M}{4(1+u)^2}.$$

Maar de inhoud van eenen driehoek wordt ook uitgedrukt door $I = \frac{1}{2}xy\,Sin.\,Z$, en wij hebben dus ook

$$I = \frac{ab}{2(1+u)^2} \times Sin.\,Z.$$

Stellende dus deze twee waarden van I aan elkander gelijk, zoo vinden wij

$$\frac{ab}{2(1+u)^2}\,Sin.\,Z = \frac{M}{4(1+u)^2},$$

waaruit

$$Sin.\,Z = \frac{M}{2ab},$$

en daar de overige hoeken op dezelfde wijze gevonden worden, zoo hebben wij, ter berekening van de hoeken,

Sin.

$$Sin.X=\frac{M}{2bc},\quad Sin.Y=\frac{M}{2ac},\quad Sin.Z=\frac{M}{2ab}\quad .\ (2),$$

waardoor wij voor de zijden vinden

$$x=a-\frac{M}{2bc},\quad y=b-\frac{M}{2ac},\quad z=c-\frac{M}{2ab}\quad .\ (3).$$

Hieruit vinden wij verder nog

$$u=\frac{Sin.X}{x}=\frac{Sin.Y}{y}=\frac{Sin.Z}{z}=\frac{M}{2abc-M}\quad ;\ (4).$$

en daar de ſtraal van den omgeſchreven' cirkel gelijk is aan $\frac{X}{2\,Sin.x}=\frac{1}{2u}$, zoo is deze ſtraal

$$R=\frac{2abc-M}{2M}\quad ....\ (5).$$

De waarde van u in die voor I overbrengende, verkrijgen wij voor den inhoud van den driehoek

$$I=\frac{M(2abc-M)^2}{16a^2b^2c^2}\quad ......\ (6),$$

terwijl wij eindelijk voor den ſtraal van den ingeſchreven' cirkel vinden

$$r=\frac{M(2abc-M)}{4abc(a+b+c)}\quad ....\ (7).$$

CLI. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK JUN.

Wanneer men uit de hoekpunten van eenen bolvormigen driehoek loodregte bogen op de overſtaande zijden laat vallen, dan vraagt men, deze loodlijnen gegeven zijnde, de zijden en hoeken van den driehoek te bepalen?

OPGELOST *door* A. B. DE BOCK JUN. *en* J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* A. B. DE BOCK JUN.

Stellen wij in den bolvormigen driehoek ABC, *Fig.* 110, de gegevene loodregte bogen AF $=\alpha$, BE $=\beta$ en CD $=\gamma$; terwijl wij de zijden, die over de hoeken X, Y en Z ſtaan, door x, y en z voorſtellen, dan zullen wij x, y, z, X, Y en Z in α, β en γ moeten uitdrukken.

Hiertoe geven ons de regthoekige driehoeken ECB en AFC vooreerst

Sin.

$$Sin.x = \frac{Sin.\beta}{Sin.Z} \text{ en } Sin.y = \frac{Sin.\alpha}{Sin.Z} \quad \ldots \quad (1),$$

waardoor wij uit de driehoeken ACD, BAE en BDC vinden,

$$Sin.X = \frac{Sin.\gamma}{Sin.y} = \frac{Sin.\gamma\, Sin.Z}{Sin.\alpha} \quad \ldots \quad (2),$$

$$Sin.z = \frac{Sin.\beta}{Sin.X} = \frac{Sin.\alpha\, Sin.\beta}{Sin.\gamma\, Sin.Z} \quad \ldots \quad (3),$$

$$Sin.Y = \frac{Sin.\gamma}{Sin.x} = \frac{Sin.\gamma\, Sin.Z}{Sin.\beta} \quad \ldots \quad (4),$$

en hieruit blijkt, dat al het gevraagde zal gevonden zijn, zoodra wij Z in α, β en γ kunnen uitdrukken.

Ten einde hiertoe te geraken, hebben wij in den driehoek BCD

$$Cos.BD = \frac{Cos.x}{Cos.\gamma} = \frac{\sqrt{(1 - Sin^2.x)}}{Cos.\gamma} = \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{Sin^2.\beta}{Sin^2.Z}\right)}}{Cos.\gamma},$$

dat is $$Cos.BD = \frac{\sqrt{(Sin^2.Z - Sin^2.\beta)}}{Sin.Z\, Cos.\gamma} \quad \ldots \quad (5),$$

en daar $Sin.BD = \sqrt{(1 - Cos^2.BD)}$ is, vinden wij hieruit

$$Sin.BD = \sqrt{\left\{1 - \frac{Sin^2.Z - Sin^2\beta}{Sin^2.Z\, Cos^2.\gamma}\right\}} = \frac{\sqrt{(Sin^2.Z Cos^2\gamma - Sin^2 Z + Sin^2.\beta)}}{Sin.Z\, Cos.\gamma},$$

dat is $$Sin.BD = \frac{\sqrt{(Sin^2.\beta - Sin^2.Z\, Sin^2.\gamma)}}{Sin.Z\, Cos.\gamma} \quad \ldots \quad (6);$$

terwijl wij, op dezelfde wijze, uit den driehoek CAD afleiden

$$Cos.AD = \frac{\sqrt{(Sin^2.Z - Sin^2.\alpha)}}{Sin.Z\, Cos.\gamma} \quad \ldots \quad (7),$$

en $$Sin.AD = \frac{\sqrt{(Sin^2.\alpha - Sin^2.Z\, Sin^2.\gamma)}}{Sin.Z\, Cos.\gamma} \quad \ldots \quad (8).$$

Nu is $z = BD + AD$ en bij gevolg

$$Sin.z = Sin.BD \times Cos.AD + Sin.AD \times Cos\, BD,$$

brengende dus hierin de waarden over, in (3), (5), (6), (7) en (8) gevonden, dan verkrijgen wij, ter bepaling van Z

$$\frac{Sin.\alpha\, Sin\,\beta}{Sin.\gamma\, Sin.Z} = \frac{\sqrt{(Sin^2.\beta - Sin^2.Z\, Sin^2.\gamma)\,(Sin^2.Z - Sin^2.\alpha)}}{Sin^2.Z\, Cos^2.\gamma} + \frac{\sqrt{(Sin^2.\alpha - Sin^2.Z\, Sin^2.\gamma)\,(Sin^2.Z - Sin^2.\beta)}}{Sin^2.Z\, Cos^2\gamma},$$

of, wanneer wij met $Sin^2.Z\, Cos^2.\gamma\, Sin.\gamma$ vermenigvuldigen

en

en een' der termen van het tweede lid in het eerste overbrengen,

$$Sin.\alpha Sin.\beta Cos^2.\gamma Sin.Z - Sin.\gamma\sqrt{(Sin^2.\beta - Sin^2.Z Sin^2.\gamma)(Sin^2.Z - Sin^2.\alpha)}$$
$$= Sin.\gamma\sqrt{(Sin^2.\alpha - Sin^2.Z Sin^2.\gamma)(Sin^2.Z - Sin^2.\beta)},$$

welke vergelijking, gequadrateerd zijnde, geeft

$$Sin^2.\alpha Sin^2\beta Cos^4\gamma Sin^2 Z + Sin^2\gamma(Sin^2.\beta - Sin^2\gamma Sin^2 Z)(Sin^2 Z - Sin^2\alpha)$$
$$-2Sin.\alpha Sin.\beta Cos^2.\gamma Sin.\gamma Sin.Z\sqrt{(Sin^2.\beta - Sin^2.\gamma Sin^2.Z)(Sin^2.Z - Sin^2.\alpha)}$$
$$= Sin^2.\gamma(Sin^2.\alpha - Sin^2.\gamma Sin^2.Z)(Sin^2.Z - Sin^2.\beta);$$

worden nu de aangewezene vermenigvuldigingen verrigt, en de gelijke termen tegen elkander weggelaten, dan verkrijgt men, na door $Sin.Z$ gedeeld te hebben,

$$Sin^2.\alpha Sin^2.\beta Cos^4.\gamma Sin.Z + Sin^2.\gamma Sin^2.\beta Sin.Z + Sin^4.\gamma Sin^2.\alpha Sin.Z \,..$$
$$-2Sin.\alpha Sin.\beta Cos^2.\gamma Sin.\gamma\sqrt{(Sin^2.\beta - Sin^2.\gamma Sin^2.Z)(Sin^2.Z - Sin^2.\alpha)}$$
$$= Sin^2\gamma Sin^2.\alpha Sin.Z + Sin^4.\gamma Sin^2\beta Sin.Z,$$

of, wanneer wij de termen, die met $Sin\ Z$ zijn aangedaan, te zamen vereenigen, en de wortelgrootheid in het tweede lid brengen,

$$\left\{\begin{matrix} Sin^2.\alpha Sin^2.\beta Cos^4.\gamma + Sin^2.\gamma Sin^2.\beta + Sin^4.\gamma Sin^2.\alpha \\ - Sin^2\gamma Sin^2.\alpha - Sin^4.\gamma Sin^2.\beta \end{matrix}\right\} \times Sin.Z = \,....$$
$$2Sin.\alpha Sin.\beta Cos^2.\gamma Sin.\gamma\sqrt{(Sin^2\beta - Sin^2.\gamma Sin^2.Z)(Sin^2.Z - Sin^2.\alpha)},$$

dat is, wanneer wij den coëfficient van $Sin.Z$ behoorlijk herleiden en vervolgens alles door $Cos^2.\gamma$ deelen,

$$\{Sin^2.\alpha Sin^2.\beta Cos^2.\gamma + (Sin^2.\beta - Sin^2.\alpha)Sin^2.\gamma\}\ Sin.Z = \,....$$
$$2Sin\ \alpha Sin.\beta\ Sin.\beta\sqrt{(Sin^2.\beta - Sin^2.\gamma Sin^2.Z)(Sin^2.Z - Sin^2.\alpha)}.$$

Deze vergelijking andermaal quadraterende, verkrijgen wij

$$\{Sin^2.\alpha Sin^2\beta Cos^2.\gamma + (Sin^2\beta - Sin^2.\alpha)Sin^2\gamma\}^2\ Sin^2.Z = \,....$$
$$4Sin^2.\alpha Sin^2.\beta Sin^2.\gamma\ (Sin^2\beta - Sin^2.\gamma\ Sin^2.Z)(Sin^2.Z - Sin^2.\alpha),$$

of, wanneer wij de aangeduide vermenigvuldigingen uitvoeren, en alles op nul herleiden,

$$4Sin^2.\alpha Sin^2.\beta Sin^4.\gamma Sin^4.Z - 4Sin^2.\alpha Sin^2.\beta Sin^2.\gamma(Sin^2.\beta + Sin^2.\alpha Sin^2.\gamma)$$
$$\times Sin^2.Z + \{Sin^2.\alpha Sin^2.\beta Cos^2\gamma + (Sin^2.\beta - Sin^2.\alpha)Sin^2.\gamma\}^2\ Sin^2.Z +$$
$$4\,Sin^4.\alpha Sin^4.\beta\ Sin^2.\gamma = 0.$$

Deelen wij alzoo door $4Sin^2.\alpha Sin^2.\beta Sin^4.\gamma$, en stellen wij kortheidshalve

$$-\frac{Sin^2.\beta + Sin^2.\alpha\ Sin^2\gamma}{Sin^2.\gamma} \,........$$
$$+\frac{\{Sin^2.\alpha Sin^2.\beta Cos^2.\gamma + (Sin^2.\beta - Sin^2.\alpha)Sin^2.\gamma\}^2}{4Sin^2.\alpha Sin^2.\beta Sin^4.\gamma} = A,$$

en

en $$\frac{Sin^2.\alpha\ Sin^2.\beta}{Sin^4.\gamma}=B,$$

dan verkrijgen wij de vierkantsvergelijking

$$Sin^4.Z+A\ Sin^2.Z+B=0,$$

waaruit $$Sin.Z=\sqrt{\{-\tfrac{1}{2}A\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}A^2-B)}\}},$$

en hierdoor Z bepaald hebbende, vinden wij het overige, door de vergelijkingen (1), (2), (3) en (4).

CLII. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK JUN.

Men vraagt de vergelijking $\partial^3 y+a\partial x\sqrt{(\partial x^4-\partial^4 y^2)}=0$ *te integreren?*

OPLOSSING. *Door* A. B. DE BOCK JUN.

Deelen wij de vergelijking door ∂x^3, dan verkrijgen wij

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+\frac{a\sqrt{(\partial x^4-\partial^4 y^2)}}{\partial x^2}=0,$$

welke vergelijking wij ook kunnen stellen onder den vorm

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+a\sqrt{\left\{1-\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2\right\}}=0.$$

Stellen wij hierin $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=z$ en dus $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=\frac{\partial z}{\partial x}$, dan komt er

$$\frac{\partial z}{\partial x}+a\sqrt{(1-z^2)}=0,$$

waaruit $$\partial x=-\frac{\partial z}{a\sqrt{(1-z^2)}},$$

en hiervan is de integraal, zoo als bekend is,

$$x=C-\frac{1}{a}Boog.Sin.z,$$

zoodat $$Boog.Sin.z=a(C-x),$$

of $$z=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=Sin.\{a(C-x)\},$$

en $$\frac{\partial^2 y}{\partial x}=\partial x\ Sin.\{a(C-x)\},$$

hetwelk geïntegreerd zijnde, geeft

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{1}{a}Cos.\{a(C-x)\}+C',$$

of $$\partial y=\frac{1}{a}\partial x\,Cos.\{a(C-x)\}+C'\partial x,$$

en

en dit nogmaals integrerende, komt er eindelijk

$$y = \pm \frac{1}{a^2} \, Sin. \{a(C - x)\} + C'x + C''.$$

CLIII. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK JUN.

Men vraagt den loop en de voornaamste eigenschappen te bepalen van de kromme lijn, welke $z = a\phi + b\phi^2$ tot polaire vergelijking heeft?

OPGELOST *door* I. R. SCHMIDT *en* A. B. DE BOCK JUN.

OPLOSSING *van* I. R. SCHMIDT.

Vermits de vergelijking twee van elkander onafhankelijke standvastige grootheden a en b bevat, is het gemakkelijk in te zien, dat de kromme, door deze vergelijking voorgesteld, verschillende vormen zal hebben naar gelang der verschillende betrekkingen, welke er tusschen deze grootheden a en b plaats hebben. Is, bij voorbeeld, $b = o$, dan is de vergelijking $z = a\phi$, en de kromme is alsdan niets anders dan de *Spiraal* van ARCHIMEDES, met welke wij ons echter, als genoegzaam bekend, niet zullen bezig houden; zoodat wij terstond tot het algemeene geval overgaan, waarin a en b willekeurig gegevene lijnen voorstellen, terwijl ϕ een boog is, in deelen van den straal 1 uitgedrukt; voorts onderstellen wij, dat a en b beide positief zijn, daar het niet moeijelijk zal wezen, bij het onderzoek van den loop der kromme, na te gaan, welke wijzigingen dezen loop door het negatief worden van a en b zou kunnen ondergaan.

Zij dan P, *Fig.* 111, de pool en PA de oorsprong der hoeken ϕ, dan blijkt vooreerst, dat $\phi = o$ ook $z = o$ maakt, en dat de kromme alzoo door de pool P gaat.

Daar wij verder a en b positief onderstellen, zal elke positieve waarde van ϕ ook z positief maken, en deze waarde van z zal niet alleen onophoudelijk grooter worden wanneer ϕ aanwast, maar zelfs veel sneller aanwassen dan de waarde van ϕ, omdat voor ϕ oneindig, z eene oneindige van den tweeden rang wordt. Hieruit volgt dan, dat de tak PZ, die uit de positieve waarden van ϕ ontstaat, oneindig veel omloopen of krullingen om het punt P zal doen, welke hoe lang hoe meer uitgebreidheid zullen hebben en zich eindelijk in het oneindige verliezen.

Onderzoeken wij nu, wat er uit de negatieve waarden van ϕ geboren wordt. Stellen wij hiertoe, in onze vergelijking

$$z = \phi(a + b\phi),$$

$\phi = -\phi'$, dan gaat dezelve over in

$$z = -\phi'(a - b\phi'),$$

waarin nu ϕ' een' willekeurigen hoek APQ', beneden PA verbeeldt. Zoo lang nu $\phi' < \frac{a}{b}$ is, zal de tweede factor positief en dus z negatief wezen, welke waarde van z dan nu op het verlengde van Q'P in PM' zal moeten worden uitgezet. Dit zelfde plaats blijvende grijpen voor alle waarden van ϕ', die tusschen $\phi' = 0$ en $\phi' = \frac{a}{b}$ gelegen zijn, bij welke laatste waarde z wederom gelijk o wordt, zoo blijkt hieruit, dat al deze waarden van ϕ' den knoop PM'KM'''P doen ontstaan. Wordt $\phi' > \frac{a}{b}$ genomen, dan zijn beide factoren negatief en dus z positief. Wanneer dus APA' $= \frac{a}{b}$ gemaakt, en APQ'' > APA' genomen wordt, zal de waarde van z wederom op PQ'' in PM'' moeten worden uitgezet, en nu zal z wederom onophoudelijk met ϕ' aangroeijen; waaruit dan een derde tak PZ' ontstaat, die, even zoo als de eerste ZP, oneindig veel krullingen om P verrigt.

Omdat in den boog M'PM elk punt, ter wederzijde van P, bewezen is aan denzelfden kant van Aa te liggen, zoo is aA eene raaklijn van de kromme. Eveneens blijkt uit het reeds aangevoerde, dat in den tak M'''PM'' elk punt, ter wederzijde van P genomen, aan denzelfden kant van A'a' ligt, en dat alzoo ook A'a' raaklijn aan de kromme is. De knoop is alzoo besloten tusschen de twee raaklijnen Pa en Pa', welke het verlengde zijn van den oorsprong PA en de lijn PA', die met PA den hoek $-\frac{a}{b}$ maakt.

Het zal niet ondienstig zijn te onderzoeken, waar de grootste ordinaat PK van den knoop, dat is, het minimum van z gelegen is. Hiertoe hebben wij,

$$\frac{\delta z}{\delta \phi} = a + 2b\phi \text{ en } \frac{\delta^2 z}{\delta \phi^2} = 2b,$$

uit welke laatste uitdrukking reeds blijkt, dat er geene waarde van ϕ bestaat, die het tweede differentiaal quotient negatief kan maken, en dat z alzoo voor geen maximum kan vatbaar zijn. Het eerste differentiaal quotient gelijk nul stellende, vinden wij voorts,

$$\phi = -\frac{a}{2b} = \tfrac{1}{2} APA',$$

waaruit blijkt, dat het punt K in de lijn PS moet liggen, die $\angle APA'$ midden door deelt; terwijl wij, door $\phi = -\frac{a}{2b}$ in z over te brengen, vinden

$$PK = -\frac{a^2}{4b},$$

zoodat PK een vierde is van de derde evenredige tot de twee gegevene lijnen b en a.

Uit deze omstandigheden moet natuurlijkerwijze het vermoeden ontstaan, of de kromme ook aan beide zijden van KS op dezelfde wijze gelegen is, dat wil zeggen, of de twee takken KM' PMZ en KM''' PM'' Z' niet gelijk en gelijkvormig zijn. Ten einde dit te onderzoeken, behoeven wij alleen de veranderlijke hoeken van PS te tellen, en alzoo PM $= z$ in SPQ $= \phi'$ uit te drukken; want is ons vermoeden gegrond, dan zal dit hierdoor kenbaar worden, dat in de vergelijking geene andere dan evene magten van ϕ' voorkomen, omdat alsdan $\phi' = \delta$ en $\phi' = -\delta$ dezelfde waarde voor z zullen geven. — Stellen wij dan, daar APS $= \frac{a}{2b}$ gevonden is, $\phi + \frac{a}{2b} = \phi'$ of $\phi = \phi' - \frac{a}{2b}$, dan komt er

$$z = \left(\phi' - \frac{a}{2b}\right)\left(a + b\left(\phi' - \frac{a}{2b}\right)\right) = \left(\phi' - \frac{a}{2b}\right)\left(b\phi' + \tfrac{1}{2}a\right),$$

dat is

$$z = b\left\{\phi'^2 - \left(\frac{a}{2b}\right)^2\right\}:$$

of, wanneer wij $\angle SPA = \angle SPA' = \frac{a}{2b} = \mu$ stellen,

$$z = b(\phi'^2 - \mu^2).$$

Deze vergelijking bevestigt dan ons vermoeden volkomen, en de lijn KS is alzoo eene as van de kromme, welke alle regthoekige coördinaten MM' in R midden door deelt; wij zullen ons van deze vergelijking, als de eenvoudigste, blijven bedienen; doch dezelve, ter constructie der verschillende punten van de kromme, nog eene kleine herleiding doen ondergaan.

De gegevens, waardoor de kromme bepaald wordt, zijn, vooreerst eene lijn b en ten andere een hoek α, welke de helft is van den hoek, die de raaklijnen van den knoop met elkander maken. Deze hoek α is bekend, zoodra de betrekking gegeven is, welke dezelve tot 180° heeft, en daar α hier niet in graden, maar in deelen van den straal gegeven moet zijn, stellen wij $\alpha = n\pi$. Eveneens kunnen wij den veranderlijken hoek ϕ' door deszelfs betrekking tot π uitdrukken, en alzoo stellen $\phi' = x\pi$; waardoor de vergelijking overgaat in

$$z = b(x^2\pi^2 - n^2\pi^2) = b\pi^2(x^2 - n^2).$$

Daar eindelijk b eene gegevene lijn is, zoo is ook $b\pi^2 = 9{,}869 \times b$ eene gegevene lijn. Stellen wij dus $b\pi^2 = c$, dan wordt de vergelijking

$$z = c(x^2 - n^2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A),$$

waarin nu, zoo als gezegd is, x en n de getallen zijn, waarmede π moet worden vermenigvuldigd, om de hoeken ϕ' en α te verkrijgen.

Hierdoor kan nu de kromme in elk geval gemakkelijk door punten geconstrueerd worden, hetgeen wij door een enkel voorbeeld zullen aanwijzen. Nemen wij $n = \frac{4}{6}$, dan verkrijgen wij, door te stellen

x	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{9}{6}$	*enz.*
z	$-\frac{16}{36}c$	$-\frac{15}{36}c$	$-\frac{12}{36}c$	$-\frac{7}{36}c$	0	$\frac{9}{36}c$	$\frac{20}{36}c$	$\frac{33}{36}c$	$\frac{48}{36}c$	$\frac{65}{36}c$	*enz.*

Beschrijven wij dus, *Fig.* 112, uit de pool P, met willekeurigen straal, eenen cirkel en deelen wij denzelven, van S te beginnen, in 12 gelijke deelen, dan zullen de hoeken SP1, PS2, *enz.* overeenkomen met $x = \frac{1}{6}$, $x = \frac{2}{6}$, *enz.* omdat hieruit volgt $\phi' = \frac{1}{6}\pi$, $\phi' = \frac{2}{6}\pi$, *enz.* Nemen wij dus op de lijnen PS, P1, P2, *enz.* $PK = -\frac{16}{36}c = -\frac{16}{36}BC$, $P1 = -\frac{15}{36}BC$, $P2 = -\frac{12}{36}BC$, *enz.* dan zullen K, 1, 2, *enz.* punten van de kromme zijn.

zijn. De hoeken SPA en SPA' zijn hier de waarden van α, en het stuk K 1 2 3 P is hier de helft van den knoop. Deze korte aanwijzing zal, vertrouwen wij, genoegzaam zijn, om te doen gevoelen, hoe men in elk voorkomend geval moet handelen, en door middendoordeeling der hoeken, en berekening der overeenkomstige waarden van z, zoo veel punten te doen vinden als men begeert.

Is echter oorspronkelijk niet c en n, maar a en b gegeven, dan zal men eerst c en n moeten berekenen door de formulen $n = \frac{\alpha}{\pi} = \frac{a}{2 b \pi}$ en $c = b \pi^2$. Was, bij voorbeeld, $a = 2 b$, dan zou men hebben $n = \frac{1}{\pi} = 0,31831$, terwijl voor elk geval $c = 9,8696 \times b$ blijft.

Vergelijkt men de *Figuren* 111 en 112, dan zal men ook een genoegzaam inzigt verkrijgen in de verandering van vorm, dien de kromme ondergaat, wanneer, c onveranderd blijvende, α of n grooter genomen wordt, dat is, naarmate de waarde van a ten opzigte van b grooter wordt. *Fig.* 111 is geteekend voor $n = \frac{1}{3}$, en *Fig.* 112 voor $n = \frac{2}{3}$; in het eerste geval is de hoek aPa' van den knoop kleiner, en in het tweede geval grooter dan 180°, en neemt men $n = \frac{1}{2}$, dan zullen de raaklijnen Aa en A'a' op elkander vallen. In elk geval groeijen echter de waarden van z zoo spoedig aan, dat men eene zeer groote ruimte behoeft indien men eenige krullingen der kromme wil teekenen, zonder den knoop al te klein te doen uitvallen; zoo zou men, om het eerstvolgende snijpunt van de kromme met PS in *Fig.* 112 te vinden, reeds hebben $z = \frac{128}{36} c = 3\frac{5}{9} \times$ BC; voor het volgende snijpunt op PS, $z = 8\frac{5}{9} \times$ BC, *enz.*

Om in het algemeen de afstanden te vinden, die alle punten, waarin eene zelfde lijn PQ de kromme snijdt, van het punt P hebben, moet men, den hoek SAQ $= \delta\pi$ en dus $n = \delta$ stellende, voor x achtervolgens nemen δ, $2+\delta$, $4+\delta$, $6+\delta$, *enz.* Hierdoor zal men, voor al de punten, die op PQ liggen, vinden

$$\text{PM} = c(\delta^2 - n^2),\ \text{PM}_1 = c\{(2+\delta)^2 - n^2\},\ \text{PM}_2 = c\{(4+\delta)^2 - n^2\}\ \textit{enz.}$$

terwijl men om de afstanden van P, die op Pq vallen, te ver-

 krij-

krijgen, zal moeten stellen $n = \delta + 1$, $n = \delta + 3$, $n = \delta + 5$, enz. hetgeen zal geven

$$Pm = c\{(1+\delta)^2 - a^2\},\ Pm_1 = c\{(3+\delta)^2 - a^2\},$$
$$Pm_2 = c\{(5+\delta)^2 - a^2\},\ enz.$$

zijnde dit reeksen, waarvan de tweede verschillen gelijk $8c$ zijn, en die dus aantoonen, dat de afstanden dezer achtervolgende punten van elkander eene gewone rekenkunstige reeks vormen, die met $8c$ opklimt. Deze eigenschap der kromme is bij de constructie van veel aanbelang, omdat zij elke volgende krulling door middel van de voorgaande doet vinden.

Laat ons nu onderzoeken, welken invloed de positieve of negatieve waarden van a en b op den vorm van de kromme kunnen hebben. Stellen wij hiertoe vooreerst, dat a positief blijft, doch dat b negatief gegeven is; zoodat de oorspronkelijke vergelijking was $z = a\phi - b\phi^2$. Dit geval verschilt met het reeds behandelde alleen hierin, dat b van teeken veranderd is, waardoor ook c van teeken verandert. De waarde van a en dus die van n wordt, wel is waar, hierdoor mede negatief, doch dit heeft geen invloed op z, omdat alleen n^2 in de vergelijking voorkomt. Hieruit volgt dan, dat de vergelijking voor dit geval overgaat in

$$z = -c(x^2 - n^2),$$

welke, met (A) vergeleken, aantoont, dat al de waarden van z alleen van teeken veranderen, zoodat hierdoor geene verandering in den vorm van de kromme ontstaat, maar alleen wordt te weeg gebragt, dat dezelve, *Fig.* 112 of *Fig.* 111, aan de andere punt van Vv komt te liggen, even alsof zij eene halve omwenteling om deze lijn als as had gedaan.

Blijft b positief, maar wordt a negatief genomen, dan blijft c derzelver teeken behouden, doch n wordt negatief, hetgeen echter, om dezelfde reden als boven, geen invloed op de waarde van z kan hebben; waaruit dus volgt, dat door het negatief worden van a de kromme in geenen deele van vorm of ligging verandert, zoodat de vergelijkingen $z = a\phi + b\phi^2$ en $z = -a\phi + b\phi^2$ voor dezelfde waarden van a en b volstrekt dezelfde kromme lijn aanduiden.

Zijn eindelijk a en b beide negatief, dan wordt c negatief en n blijft

blijft positief. Dit geval komt dus volmaakt overeen met dat, waarin alleen b negatief is, en de vergelijkingen $z = a\phi - b\phi^2$ en $z = -a\phi - b\phi^2$ toonen dus, voor dezelfde waarden van a en b, dezelfde kromme lijn aan, welke met die, waarvan $z = \pm a\phi + b\phi^2$ de vergelijking is, alleen in de betrekkelijke ligging ten opzigte van de lijn Vv verschilt.

Is $a = o$, dan wordt de vergelijking $z = b\phi^2$, hetgeen ook met de tweede vergelijking, dat is $z = b(\phi'^2 - a^2)$, overeenkomt, omdat voor $a = o$ ook $a = o$ is. De lijnen PA en PA′ vallen dus in dit geval beide op PS, terwijl $PK = -\frac{a^2}{4b} = o$ wordt; al hetgeen aantoont, dat in dit geval de knoop geheel verdwijnt, en dat de takken PZ en PZ′ zich alsdan in het keerpunt P vereenigen. Overigens verandert de kromme niet van aard, en al wat wij verder over het algemeene geval gezegd hebben of nog zullen zeggen, gaat ook op dit bijzonder geval door.

Men lette echter wel op, dat men zich voor $b = o$ of $z = a\phi$, dat is voor de spiraal van ARCHIMEDES, aan de eerste vergelijking moet blijven houden, en dat men voor dit geval de tweede, namelijk $z = b\phi'^2 - \frac{a^2}{4b}$, niet meer kan gebruiken, als overgaande in $z = \infty$, hetgeen een' cirkel met oneindigen straal aanduidt. Zulks wordt hierdoor veroorzaakt, dat wij, bij deze tweede vergelijking, niet meer van PA, *Fig.* 111, maar van PS zijn beginnen te tellen, die met PA eenen hoek $-\frac{a}{2b}$ maakt. Deze hoek wordt nu, voor $b = o$, oneindig groot, en het zou dus in ons geval even zoo ongerijmd zijn van deze lijn als oorsprong te willen tellen, als dat men bij de parabool den oorsprong der coördinaten in het punt van de as zou willen plaatsen, dat oneindig ver van den top ligt. De vergelijking $z = \infty$ stelt ondertusschen bij gezegde spiraal geene ongerijmdheid voor, doch komt overeen met de eigenschap, die deze kromme bezit, van bij elke volgende omwenteling meer en meer tot den cirkel te naderen.

Voor den hoek, dien de raaklijn van eenig punt met de polaire

ordinaat maakt, hebben wij in het algemeen $Tang\ \psi = \frac{z\,\delta\phi}{\delta z}$. Nu volgt uit $z = b(\phi'^2 - a^2)$; $\frac{\delta z}{\delta \phi'} = 2b\phi'$, zoodat

$$Tang.\ \psi = \frac{z}{2b\phi'} = \frac{\phi'^2 - a^2}{2\phi'} = \tfrac{1}{2}\phi' - \frac{a^2}{2\phi'} = \tfrac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{u}{x}\right),$$

welke vergelijking men ook nog aldus kan schrijven:

$$Tang.\ \psi = \frac{z}{2\sqrt{(a^2b^2 + bz)}} = \frac{z}{\sqrt{(a^2 + 4bz)}},$$

gevende de laatste uitdrukking, voor $b = 0$, naar behooren $Tang.\ \psi = \frac{z}{a} = \phi$, terwijl zoo wel de bovenste als de benedenste overeenstemmen, om voor $a = 0$ te geven $Tang.\ \psi = \tfrac{1}{2}\phi$.

Voor den inhoud heeft men, zoo als bekend is, $I = \tfrac{1}{2}\int z^2\delta\phi$ en dus voor $z = b(\phi'^2 - a^2)$,

$$I = \tfrac{1}{2}\int b^2(\phi'^2 - a^2)^2\delta\phi = \tfrac{1}{2}b^2\int(\phi'^4 - 2a^2\phi'^2 + a^4)\delta\phi,$$

of $$I = \tfrac{1}{2}b^2(\tfrac{1}{5}\phi'^5 - \tfrac{2}{3}a^2\phi'^3 + a^4\phi'),$$

dat is $$I = \tfrac{1}{30}b^2(3\phi'^4 - 10a^2\phi'^2 + 15a^4)\phi',$$

waar wij geene standvastige behoeven te voegen, wanneer wij bij PK, dat is bij $\phi = 0$, aanvangen. Voor den halven knoop moeten wij alsdan $\phi = a$ stellen, en er komt $\frac{4}{15}b^2a^5$, en dus voor den inhoud van den geheelen knoop $\frac{8}{15}b^2a^5$, of $\frac{8}{15}c^2\pi n^5$.

Ten einde niet langwijlig te worden, zijn wij verpligt het verder onderzoek wegens de eigenschappen der voorgestelde kromme achterwege te laten; alleen zullen wij nog de vergelijking op de regtstandige coördinaten opgeven, omdat dezelve in vele opzigten tot dit nader onderzoek zou kunnen dienen. Stellen wij dan PR $= x$ en RM $= y$, zoo vindt men $\phi = Boog.\ Tang\ \frac{y}{x}$ en $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, en substituerende dit in $z = b(\phi^2 - a^2)$, komt er voor de gevraagde vergelijking

$$\sqrt{(x^2 + y^2)} = b\left\{(Boog.\ Tang.\ \frac{y}{x})^2 - \frac{a^2}{4b^2}\right\}.$$

CLIV. VOORSTEL.

Door J. W. MARTINI.

Uit een onveranderlijk punt A, *Fig.* 113, *gelegen in eene regte lijn* XY, *wordt een onbepaald aantal lijnen* AC *getrokken, van gelijke lengte* AC $= a$. *Voorts beweegt eene andere lijn* BD $= b$,

van

van onveranderlijke lengte, zoodanig, dat zij met het uiteinde B *voortdurend in* XY *blijft liggen, en tevens loodregt staat op* AC, *waarin het andere uiteinde* D *ligt. Indien men nu, in elken stand van deze lijnen, eenen cirkel door de punten* A, B *en* C *laat gaan, vraagt men de meetkunstige plaats des middelpunts van dezen cirkel te bepalen?*

OPGELOST *door* J. W. MARTINI, A. B. DE BOCK JUN. *en* J. JONKHEERT.

OPLOSSING *van* J. W. MARTINI.

Zij P het middelpunt van den cirkel, die door A, B en C gaat, en trekken wij PF loodregt op XY. Nemen wij verder XY als as der abscisſen en TU, loodregt door A op XY getrokken, als as der ordinaten aan, dan is $AF = x$ en $PF = y$. Trekken wij nu BC, dan hebben wij $AD = \sqrt{(AB^2 - BD^2)}$; daar nu de loodlijn PF de koorde AB midden door deelt, zoo is $AB = 2x$ en dus $AD = \sqrt{(4x^2 - b^2)}$, waaruit $CD = a \pm \sqrt{(4x^2 - b^2)}$ en bij gevolg $BC = \sqrt{(BD^2 + CD^2)}$, dat is

$$BC = \sqrt{\{b^2 + (a \pm \sqrt{(4x^2 - b^2)})^2\}}.$$

Het product der drie zijden van den driehoek ABC is alzoo

$$AC \times AB \times BC = 2ax\sqrt{\{b^2 + (a \pm \sqrt{(4x^2 - b^2)})^2\}},$$

terwijl de inhoud van dezen driehoek is

$$\tfrac{1}{2} AC \times BD = \tfrac{1}{2} ab.$$

Nu is bekend, dat de ſtraal $AP = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ van den omgeſchreven cirkel eens driehoeks gelijk is aan het product der zijden, gedeeld door viermaal den inhoud van den driehoek, en wij hebben alzoo

$$\sqrt{(x^2 + y^2)} = \frac{x}{b}\sqrt{\{b^2 + (a \pm \sqrt{(4x^2 - b^2)})^2\}},$$

of $$b^2(x^2 + y^2) = b^2x^2 + x^2(a \pm \sqrt{(4x^2 - b^2)})^2,$$

zoodat $$b^2y^2 = x^2(a \pm \sqrt{(4x^2 - b^2)})^2,$$

waaruit $$y = \pm\frac{x}{b}(a \pm \sqrt{(4x^2 - b^2)})^2,$$

hetwelk dan nu de vergelijking van de meetkunstige plaats des middelpunts P is.

Uit het dubbele teeken, dat voor de waarde van y ſtaat, volgt, dat de kromme lijn boven en beneden XY op dezelfde

wijze gelegen is; en daar de vorm van y in geenen deele verandert door x in $-x$ te doen overgaan, zoo is de kromme ook ter wederzijde van TU op dezelfde wijze gelegen; waaruit blijkt, dat XY en TU middellijnen van de kromme zijn, hetgeen ook uit de constructie gemakkelijk was op te maken.

Onze vergelijking toont ook aan, dat in het algemeen, voor elke waarde van x, vier waarden van y bestaan, ten zij $x < \frac{1}{2}b$ genomen wordt; want alsdan wordt y onbestaanbaar. Hiervan is alleen het geïsoleerde punt A uitgezonderd, voor hetwelk x en y beide nul zijn, doch dat door de constructie niet gevonden wordt.

Hieruit volgt dan reeds, dat de punten, waarin de kromme het meeste tot TU nadert, gevonden zullen worden, door ter wederzijden van TU eene lijn Ss, evenwijdig aan TU, en op eenen afstand $\frac{1}{2}b$ van dezelve te stellen, en dan de ordinaat gelijk $\pm\frac{1}{2}a$ te nemen. Tusschen deze twee evenwijdige lijnen zal dan geen punt van de kromme kunnen gelegen zijn.

Om x in y uit te drukken, verkrijgt men de vergelijking

$$4x^4 - (a^2 + b^2)x^2 \pm 2abxy - b^2y^2 = 0,$$

welker oplossing hier ondertusschen niet noodig is. Dezelve toont ons echter aan, dat voor elke waarden van y acht waarden van x kunnen bestaan; omdat men deze vergelijking als een zamenstel van twee vergelijkingen van den vierden graad kan beschouwen. Het zal echter van de betrekking tusschen a en b afhangen, of deze waarden alle bestaanbaar zijn. Zoo ziet men in *Fig. a*, welke voor $a = 2b$ geconstrueerd is, dat er met elke waarde van y nergens meer dan vier waarden van x overeenstemmen, terwijl men in *Fig. b*, bij welke $a = 4b$ ondersteld is, ten duidelijkste ziet, dat er waarden van y zijn, die met 4, en andere, die met 8 waarden van x overeenstemmen.

De vergelijking $y = \pm\left\{\frac{a}{b}x \pm \frac{x}{b}\sqrt{(4x^2 - b^2)}\right\}$ van onze kromme, vier verbindingen van teekens toelatende, kan beschouwd worden, als uit vier bijzondere takken te bestaan, waarvan de vergelijkingen zijn

$$y = \frac{a}{b}x + \frac{x}{b}\sqrt{(4x^2 - b^2)},$$

$y =$

$$y = \frac{a}{b}x - \frac{x}{b}\sqrt{(4x^2 - b^2)},$$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{x}{b}\sqrt{(4x^2 - b^2)},$$

en $$y = -\frac{a}{b}x + \frac{x}{b}\sqrt{(4x^2 - b^2)},$$

van welke de twee laatste niets anders zijn, dan de twee eersten, negatief genomen, dat is, aan den anderen kant van XY uitgezet. Wij zullen ons alzoo met de voornaamste eigenschappen van de twee eerste bezig houden, daar die van de twee anderen hierin geheel opgesloten zijn.

De vergelijking van den eersten tak is

$$y = \frac{a}{b}x + \frac{x}{b}\sqrt{(4x^2 - b^2)}.$$

Hierin kan x nooit kleiner dan $\frac{1}{2}b$ zijn, zonder y onbestaanbaar te maken, en $x = \frac{1}{2}b$ is dus de kleinste ordinaat, voor welke $y = \frac{1}{2}a$ is; en deze waarde van y is tevens de kleinste ordinaat van den tak, dien wij beschouwen, omdat x aangroeijende ook y onophoudelijk aangroeit en gelijktijdig met x oneindig wordt, offchoon het duidelijk is, dat y veel sneller aangroeit dan x. Deze tak LKI snijdt alzoo noch de as der ordinaten noch die der abscisfen en begint bij het punt L, waarvoor $x = \frac{1}{2}b$ en $y = \frac{1}{2}a$ is; terwijl dezelve naar boven tot in het oneindige voortloopt.

De vergelijking van den tweeden tak is

$$y = \frac{a}{b}x - \frac{x}{b}\sqrt{(4x^2 - b^2)}.$$

Voor dezen tak kan de abscis x mede niet kleiner dan $\frac{1}{2}b$ genomen worden, en dus begint ook deze tak bij L; doch hieruit volgt niet, dat $x = \frac{1}{2}b$ altijd de grootste waarde van y in dezen tak doet kennen, en wij zullen verder zien, dat zulks van de betrekking tusschen a en b afhangt. Deze tweede tak kan echter den eersten nooit bereiken, omdat $KZ = \frac{2x}{b}\sqrt{(4x^2 - b^2)}$ altijd het verschil van de twee ordinaten uitdrukt, die in de twee takken met eene zelfde abscis x overeenkomen. Dit verschil groeit bij grootere waarden van x hoe langs hoe meer aan, en de punten K en Z verwijderen zich bij gevolg meer en meer. —

Voor

Voor $x = \infty$ wordt verder $y = -\infty$ en de tweede tak LQR loopt dus mede tot in het oneindige voort.

Wij hebben bij deze twee takken alleen van positieve waarden voor x gewag gemaakt, doch het is duidelijk in te zien, dat wij, door aan x negatieve waarden te geven, de takken $l'i'$ en $l'Q'r'$ verkrijgen, terwijl de vergelijkingen van de twee overige takken ons de kromme lijnen $rQlki$ en R′Q′L′K′I′ verschaffen, welke dan, gezamenlijk met de voorgaande, de meetkunstige plaats van het middelpunt P uitmaken.

Om het punt Q te vinden, waarin de tweede tak de as XY doorsnijdt, stellen wij $y = 0$, en dit geeft

$$\frac{a}{b}x - \frac{1}{b}x\sqrt{(4x^2 - b^2)} = 0.$$

Hieraan voldoet $x = 0$, doch deze waarde behoort tot het geïsoleerde punt A. Deelen wij dan door x, zoo komt er

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{b}\sqrt{(4x^2 - b^2)} = 0,$$

of

$$\sqrt{(4x^2 - b^2)} = a,$$

waaruit

$$x = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b^2)},$$

voor de waarde van AQ en AQ′. Uit deze uitkomst blijkt, dat de punten Q, waarin de takken elkander snijden, de plaats van het punt P zijn, op het oogenblik, dat D in C valt, of dat BD raaklijn aan den cirkel wordt, uit A met $AC = a$ als straal beschreven. Dit was ook uit de constructie op te maken.

Neemt men $x > \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b^2)}$, dan toont de vergelijking van den tweeden tak aan, dat y negatief wordt, en wel grooter en grooter negatief, naarmate x de lijn AQ meer overtreft, hetgeen dan wederom aantoont, dat deze tak naar beneden tot in het oneindige voortloopt.

De kromme lijn kan in derzelver geheele uitgestrektheid geconstrueerd worden, door de punten P ingevolge van de opgaaf des vraagstuks te bepalen, alsmede, door voor elke waarde van x de overeenkomstige waarden van y te berekenen. Wij zullen ondertusschen uit onze vergelijking nog eene andere constructie afleiden, die tevens eene niet onbelangrijke eigenschap van onze kromme zal doen kennen. Het zal verder genoegzaam zijn zulks

voor

voor den tak IKLQR aan te wijzen, daar de overige toch met deze gelijk en gelijkvormig zijn.

Voor dezen tak hebben wij nu

$$y = \frac{a}{b}x \pm \frac{x}{b}\sqrt{(4x^2 - b^2)},$$

welke uit twee verscheidende deelen bestaat, namelijk $\frac{a}{b}x$ en $\frac{x}{b}\sqrt{(4x^2 - b^2)}$. Zoodat wij, $\frac{a}{b}x = y'$ en $\frac{x}{b}\sqrt{(4x^2 - b^2)} = t$ stellende, hebben

$$y = y' \pm t.$$

Trekkende nu door A en het reeds bepaalde punt L eene onbepaalde regte lijn WV, dan is voor elke waarde $AE' = x$, de lijn $EE' = \frac{a}{b}x = y'$; omdat L gevonden is, door $AN = \frac{1}{2}b$ en $NL = \frac{1}{2}a$ te nemen. Hieruit volgt dan, dat men de punten I en I″ van de kromme zal verkrijgen, door overal

$$EI = EI'' = t = \frac{x}{b}\sqrt{(4x^2 - b^2)}$$

te nemen. *De lijn* WV, *die door* A *en* L *gaat, deelt dus al de ordinaten* II″, *evenwijdig met* TU *loopende, midden door, en is alzoo eene middellijn van de kromme. Eveneens zal dan ook* V′W′ *eene middellijn van de kromme zijn.*

Ten einde de waarde van t te construeren, zullen wij de vergelijking van onze kromme zoeken, in de onderstelling, dat $AE = u$ en $EI = EI'' = t$ als coördinaten worden aangenomen. Hiertoe hebben wij $AE = \sqrt{(AE'^2 + EE'^2)}$, of

$$u = \sqrt{(x^2 + \frac{a^2}{b^2}x^2)} = x\sqrt{(1 + \frac{a^2}{b^2})} = \frac{x}{b}\sqrt{(a^2 + b^2)},$$

zoodat $$x = \frac{bu}{\sqrt{(a^2 + b^2)}},$$

hetwelk, in de waarde van t overgebragt zijnde, geeft

$$t = \pm \frac{u}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} \times \sqrt{(\frac{4b^2u^2}{a^2 + b^2} - b^2)},$$

dat is $$t = \pm \frac{bu}{a^2 + b^2}\sqrt{\{4u^2 - (a^2 + b^2)\}}.$$

Nu

Nu is AL $= \surd(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2) = \frac{1}{2}\surd(a^2+b^2)$ en dus $l'L = \surd(a^2+b^2)$. Stellende dus kortheidshalve $l'L = 2d$, dan hebben wij

$$t = \pm \frac{bu}{4d^2}\surd(4u^2 - 4d^2),$$

of

$$t = \pm \frac{u}{2d} \times \frac{b}{d}\surd(u^2 - d^2);$$

en wanneer wij $w = \frac{b}{d}\surd(u^2 - d^2)$ stellen

$$t = \pm \frac{uw}{2d}.$$

Beschrijven wij dus eene hyperbool, waarvan de halve eerste as $AL = d$ en de halve tweede as $BD = b$ is, dan zal voor elke middelpuntsabscis $u = AE$ de overeenkomstige ordinaat $w = \frac{b}{d} \times \surd(u^2 - d^2)$ zijn, en dus zal dan $EI = EI'$ vierde evenredig tot $l'L$, AE en deze ordinaat w genomen moeten worden, om de punten I en I' van de kromme te verkrijgen. Deze hyperbool eens geconstrueerd zijnde, kan men zonder veel moeite een genoegzaam aantal punten I construeren, om er de kromme uit de hand te kunnen doortrekken.

Om te bepalen, of onze kromme lijn voor maxima, minima of buigpunten vatbaar is, zullen wij de oorspronkelijke vergelijking tusschen x en y blijven behouden, omdat bij zulke onderzoekingen de regthoekige coördinaten altijd het verkieslijkste zijn.

Het eerste differentiaal quotient van de twee takken

$$y = \frac{a}{b}x \pm \frac{x}{b}\surd(4x^2 - b^2)$$

is

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a}{b} \pm \frac{8x^2 - b^2}{b\surd(4x^2 - b^2)},$$

of

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a\surd(4x^2 - b^2) \pm (8x^2 - b^2)}{b\surd(4x^2 - b^2)},$$

terwijl men voor het tweede differentiaal quotient zal vinden

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \pm \frac{4x(8x^2 - 3b^2)}{b(4x^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Voor de maxima of minima van y moet $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ zijn, en hier-

hieruit blijkt, dat er in den bovensten tak LI geen maximum of minimum voor y kan bestaan; want stellen wij voor dezen tak $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, dan komt er

$$a\sqrt{(4x^2 - b^2)} + 8x^2 - b^2 = 0,$$

of

$$a\sqrt{(4x^2 - b^2)} + 8x^2 = b^2.$$

Daar nu voortdurend $x > \frac{1}{2}b$, of $x^2 > \frac{1}{4}b^2$ en dus $8x^2 > 2b^2$ is, dewijl anders y onbestaanbaar zou wezen, zoo is zoo veel te meer het eerste lid altijd grooter dan b^2, en dus kan aan deze vergelijking door geene waarde van x voldaan worden, waaruit dan het gezegde van zelf volgt.

Stellen wij, ten einde te onderzoeken, of er in den tweeden tak LQR maxima of minima voor y kunnen bestaan, voor dezen tak $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, dan is

$$a\sqrt{(4x^2 - b^2)} - 8x^2 + b^2 = 0,$$

dat is

$$a\sqrt{(4x^2 - b^2)} = 8x^2 - b^2,$$

hetwelk gequadrateerd en herleid geeft

$$x^4 - \tfrac{1}{32}(a^2 + 4b^2)x^2 + \frac{1}{2.32}b^2(a^2 + b^2) = 0,$$

waaruit $x^2 = \frac{1}{64}\{a^2 + 4b^2 \pm \sqrt{((a^2 + 4b^2)^2 - 16b^2(a^2 + b^2))}\}$,

zoodat $x = \frac{1}{8}\sqrt{2}\,\{a^2 + 4b^2 \pm a\sqrt{(a^2 - 8b^2)}\}$ . . (α).

Hieruit blijkt dan terstond, dat er in dezen benedensten tak geen maxima of minima zal kunnen bestaan, zoo lang $a^2 < 8b^2$ of $a < 2b\sqrt{2}$ is, daar anders x onbestaanbaar zou worden. Men ziet ook in *Fig. a*, welke voor $a = 2b$ geconstrueerd is, dat er in den tak LQR voor y geen maximum of minimum aanwezig is.

Is daarentegen $a > 2b\sqrt{2}$, dan geeft (α) twee bestaanbare wortels voor x, en het is verder, uit hetgeen wij reeds over den vorm van de kromme gezegd hebben, allerwaarschijnlijkst, dat de kleinste dezer twee waarden alsdan tot een minimum en de grootste tot een maximum van y zal behooren. Substitueren wij, om dit nader te onderzoeken, de grootste, dat is

$$x = \tfrac{1}{8}\sqrt{2}\{a^2 + 4b^2 + a\sqrt{(a^2 - 8b^2)}\},$$

in het tweede differentiaal quotient van onzen tak, dat is in

$\partial^2 y$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{4x(8x^2-3b^2)}{b(4x^2-b^2)^{\frac{3}{2}}},$$

dan wordt $8x^2 - 3b^2 = \frac{1}{4}\{a + \sqrt{(a^2-8b^2)}\}\sqrt{(a^2-8b^2)}$,

en $4x^2 - b^2 = \frac{1}{16}\{a + \sqrt{(a^2-8b^2)}\}^2$,

hetwelk gesubstitueerd zijnde, geeft

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{8\sqrt{(2a^2-16b^2)}\{a^2+4b^2+a\sqrt{(a^2-8b^2)}\}}{b\{a+\sqrt{(a^2-8b^2)}\}^2},$$

welke waarde negatief zijnde, een maximum voor y aantoont.

Nemen wij daarentegen de kleinste waarde van x, dat is

$$x = \tfrac{1}{8}\sqrt{2}\{a^2+4b^2-a\sqrt{(a^2-8b^2)}\},$$

dan vinden wij, op dezelfde wijze handelende,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = +\frac{8\sqrt{(2a^2-16b^2)}\{a^2+4b^2-a\sqrt{(a^2-8b^2)}\}}{b\{a-\sqrt{(a^2-8b^2)}\}^2},$$

en deze positieve waarde doet bij gevolg een minimum voor y kennen.

Men zou eindelijk nog kunnen vragen, of de gevondene waarden van x beide wel grooter dan $\frac{1}{2}b$ zullen zijn, daar in het tegenovergestelde geval geene bestaanbare waarden van y met deze waarden van x zouden overeenstemmen. Dit behoeft natuurlijkerwijze alleen voor de kleinste bewezen te worden, en zulks geschiedt op de volgende wijze.

Omdat men in het algemeen heeft

$$(a^2-4b^2)^2 = a^4 - 8a^2b^2 + 16b^4,$$

zoo is $(a^2-4b^2)^2 > a^4 - 8a^2b^2$,

dus $a^2 - 4b^2 > a\sqrt{(a^2-8b^2)}$,

en $a^2 + 4b^2 > 8b^2 + a\sqrt{(a^2-8b^2)}$,

of $a^2 + 4b^2 - a\sqrt{(a^2-8b^2)} > 8b^2$,

zoodat $\sqrt{2}(a^2+4b^2-a\sqrt{(a^2-8b^2)}) > 4b$,

en $x = \frac{1}{8}\sqrt{2}\{a^2+4b^2-a\sqrt{(a^2-8b^2)}\} > \frac{1}{2}b$;

waardoor alle twijfel over het bestaan der maxima of minima geheel verdwenen is.

Uit dit alles blijkt dan nu ten duidelijkste, dat zoodra $a > 2b\sqrt{2}$, dat is $a > 2{,}828428 \times b$ is, er altijd een maximum en een minimum in den tak LQR zal bestaan, zoo als, bij

voor-

Voorbeeld, in *Fig.* *b*, waarin $a = 4b$ is. Dit minimum zal dan worden gevonden door te nemen

$$x = \tfrac{1}{8}\sqrt{2}\,\{a^2 + 4b^2 - a\sqrt{(a^2 - 8b^2)}\},$$

en de overeenkomende of kleinste waarde van y zal zijn

$$y = \frac{1}{32.b}\{3a + \sqrt{(a^2 - 8b^2)}\} \times \sqrt{\{2a^2 + 8b^2 - 2a\sqrt{(a^2 - 8b^2)}\}};$$

zoodat deze waarden van x en y de coördinaten van het punt M zullen wezen.

Het maximum wordt gevonden door te nemen

$$x = \tfrac{1}{8}\sqrt{2}\,\{a^2 + 4b^2 + a\sqrt{(a^2 - 8b^2)}\},$$

en de waarde van y, die hiermede overeenkomt, is

$$y = \frac{1}{32.b}\{3a - \sqrt{(a^2 - 8b^2)}\} \times \sqrt{\{2a^2 + 8b^2 + 2a\sqrt{(a^2 - 8b^2)}\}},$$

hetgeen nu de coördinaten voor het hoogste punt O zijn.

Is $a^2 = 8b^2$, hetgeen de overgang is van die gevallen, waarin al of niet maxima en minima voor y bestaan, dan gaan de waarden van x voor het maximum en minimum, beide over in $x = \tfrac{1}{4}b\sqrt{6}$, terwijl de overeenkomstige ordinaat wordt $y = \tfrac{3}{4}b\sqrt{3}$. In dit geval bestaat er in het bepaalde geen maximum of minimum, doch de raaklijn van dit punt loopt evenwijdig met XY, zoodat de punten M en O voor dit geval overgaan in een buigpunt; men zal ook bevinden, dat $a^2 = 8b^2$ de waarden, die wij zoo even voor $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ vonden, beide gelijk 0 maken, hetgeen het kenmerk voor een buigpunt is.

Wij weten reeds uit den loop der kromme, dat de abscis x voor geen maximum vatbaar is, maar wel voor een minimum, namelijk bij het punt L. Ook dit wordt door de vergelijking bevestigd, want voor soortgelijke punten moet $\frac{\partial y}{\partial x} = \infty$ worden, en dit geeft $4x^2 - b^2 = 0$ of $x = \pm\tfrac{1}{2}b$, zoo als reeds bekend was. Dit toont nog bovendien aan, dat de kromme de lijnen, evenwijdig aan TU, op eenen afstand gelijk $\tfrac{1}{2}b$ van dezelve getrokken, in L aanraakt: hetgeen men reeds lang vermoed moet hebben.

Heeft de kromme buigpunten, en zulks is ten minste zeker in

in geval er een maximum of minimum voor y bestaat, dan moet het tweede differentiaal-quotient gelijk nul zijn, zonder het derde gelijk nul te maken. Wij hebben alzoo tot dit onderzoek

$$8x^2-3b^2=0,$$

waaruit $x=\frac{1}{4}b\sqrt{6}=0{,}6123725.b,$

terwijl de ordinaat, hiertoe behoorende, is

$$y=\tfrac{11}{4}a\sqrt{6}\pm\tfrac{1}{4}b\sqrt{3},$$

en dit doet vermoeden, dat er twee buigpunten bestaan, als een in den tak LI en een in den tak LQR, welke met eene zelfde waarde van x overeenstemmen.

De waarde van het tweede differentiaal-quotient bevestigt dit vermoeden; want stelt men in

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=+\frac{4x(8x^2-3b^2)}{b(4x^2-b^2)^{\frac{3}{2}}},$$

en

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-\frac{4x(8x^2-3b^2)}{b(4x^2-b^2)^{\frac{3}{2}}},$$

x iets kleiner of grooter dan $\frac{1}{4}b\sqrt{6}$, dan zal men bevinden, dat in beide gevallen $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ van teeken verandert, en dat derhalve, zoo wel ter wederzijde van K als ter wederzijde van Z, de kromme van wending verandert, dat is, van bolrond in holrond overgaat.

Deze twee buigpunten hebben dus in elk geval, dat wil zeggen voor elke willekeurige betrekking, tusschen a en b plaats, en worden altijd gevonden door $x=\frac{1}{4}b\sqrt{6}$ te nemen, en hierdoor wordt het boven gezegde, namelijk, dat voor $a^2=8b^2$ de punten van het maximum en minimum in een enkel buigpunt overgaan, volkomen bevestigd.

De trigonometrische tangens van den hoek, welke de raaklijn van eenig punt met de as der abscissen maakt, is $\frac{\partial y}{\partial x}$, en wij hebben dus, dezen hoek ϕ stellende,

$$Tang.\,\phi=\frac{a}{b}\pm\frac{8x^2-b^2}{b\sqrt{(4x^2-b^2)}},$$

waarin het bovenste teeken tot den tak LI en het benedenste tot den tak LQR behoort. Wij zullen ons niet ophouden met deze

waar-

waarde voor elk punt te construeren, maar ons in deze slechts tot eenige voornaame punten bepalen.

Voor $x = \frac{1}{2}b$ is $Tang.\phi = \infty$ en dus $\phi = 90°$, waaruit blijkt, dat de kromme in L de lijn NS aanraakt.

Stellen wij de formule voor $Tang.\phi$ onder de volgende gedaante

$$Tang.\phi = \frac{a}{b} \pm \frac{8 - \frac{b^2}{x^2}}{\frac{b}{x} \sqrt{(4 - \frac{b^2}{x^2})}},$$

dan ziet men, dat voor $x = \infty$, $Tang.\phi = \infty$ en dus $\phi = 90°$ wordt. Al de oneindige takken der kromme neigen dus meer en meer tot de evenwijdigheid met TU, doch zij kunnen dezen stand niet dan op eenen oneindigen afstand van TU verkrijgen, waaruit volgt, dat de kromme voor geene regtlijnige asymptoten vatbaar is. Zulks vindt men ook door de punten te onderzoeken, waarin eene willekeurige raaklijn de assen snijdt, en in de formulen, die de afstanden dezer punten van A uitdrukken, $x = \infty$ te stellen; men zal dan vinden, dat al deze afstanden oneindig worden, waardoor men tot hetzelfde besluit geraakt. Wij laten, om niet te langwijlig te worden, deze berekeningen achterwegen.

Onderzoeken wij nog, welke rigting de raaklijnen aan de buigpunten hebben. Stellen wij dezen hoek, voor den tak LI, gelijk α en voor den tak LQR gelijk β, dan hebben wij, door $x = \frac{1}{4}b\sqrt{6}$ te stellen,

$$Tang.\alpha = \frac{a}{b} + 2\sqrt{2} = \frac{a + 2b\sqrt{2}}{b},$$

en $$Tang.\beta = \frac{a}{b} - 2\sqrt{2} = \frac{a - 2b\sqrt{2}}{b},$$

De eerste dezer uitdrukkingen altijd positief zijnde, zoo is de hoek α altijd positief; doch β zal alleen positief zijn, zoo lang $a > 2b\sqrt{2}$ is, dat is, zoo lang er, zoo als in *Fig. b*, een maximum en minimum voor y bestaat. In het tegenovergestelde geval, waarin $a < 2b\sqrt{2}$ is, en waarmede *Fig. a* overeenkomt, is $Tang.\beta$ en dus ook β negatief. In het eerste geval klimt dus de kromme in het buigpunt Z, bij de aangroeijing van x, doch in het tweede geval is de kromme in dit punt dalend. Voor $a = 2b\sqrt{2}$ wordt $Tang.\beta = 0$ of $\beta = 0$, en de raaklijn van het buigpunt Z

Bb 2 loopt

loopt dan evenwijdig met XY, hetwelk overeenkomt met hetgeen wij vroeger dienaangaande hebben gezegd.

De hoeken α en β, die de raaklijnen van de buigpunten met XY maken, zijn ook gemakkelijk te construeren; want nemende op de assen $Aa = Aa' = 2b$, dan is $aa' = 2b\sqrt{2}$. Nemende dus $Ab = Ab' = aa'$, dan is $db = a + 2b\sqrt{2}$ en $db' = a - 2b\sqrt{2}$. Stellende verder dc loodregt op Ad en makende $dc = b$, dan is

$$Tang.\, bcd = \frac{bd}{cd} = \frac{a + 2b\sqrt{2}}{b} = Tang.\, \alpha,$$

en $$Tang.\, b'cd = \frac{b'd}{cd} = \frac{a - 2b\sqrt{2}}{b} = Tang.\, \beta.$$

Trekkende dus door K de lijn Gg evenwijdig met bc', en door Z de lijn Hh evenwijdig met $c'b'$, dan zullen dit de raaklijnen der buigpunten zijn.

Wij hebben reeds gezegd, dat de eerste figuur voor $a = 2b$ en de tweede voor $a = 4b$ geconstrueerd is. Bij de eerste bestaat dus geen maximum of minimum voor y, doch voor de tweede bestaan beide. Ten einde de constructie gemakkelijker te maken, hebben wij voor beide gevallen een tafeltje der coördinaten geconstrueerd, dat, wel is waar, alleen voor den tak ILQR geldt, doch door verandering der teekens op alle overige takken toepasselijk is.

Tafeltje voor Fig. 113. a

waarden van x.	*waarden van y.* *in den tak* IL.	*in den tak* LQR.	*Merkwaardige punten.*
0,5 b	1. b	1. b	*minimum* L *en x.*
0,6. b	1,597995. b	0,802005. b	
0,61237. b	1,657758. b	0,791732. b	*de buigpunten* K *en* Z.
0,7. b	2,085857. b	0,714143. b	
0,8. b	2,599200. b	0,600800. b	
0,9. b	3,146997. b	0,453003. b	
1. b	3,732050. b	0,267950. b	
1,18034. b	4,721360. b	0	*snijpunt met* XY.
1,2. b	5,018092. b	— 0,218092. b	
1,3. b	5,720000. b	— 0,520000 b	
1,5. b	7,242642. b	— 1,242642. b	
1,7. b	8,924344. b	— 2,124344. b	
2. b	11,745966. b	— 3,745966. b	
enz.	*enz.*	*enz.*	

In

In dit geval, of voor deze figuur heeft men nog *Tang.* α = 4,428428 en *Tang* β = — 0,828428, waaruit α = 78° 17′ 56″,69 en β = — 39° 38′ 21″,49.

Tufeltje voor Fig. 113. *b*

waarden van x.	*waarden van y.*		*Merkwaardige punten.*
	in den tak IL.	*in den tak* LQK.	
0,5. *b*	2 *b*	2 *b*	*minimum* L *van x.*
0,521004. *b*	2,236614. *b*	1,931418. *b*	*minimum* M *van y.*
0,6. *b*	2,797995. *b*	2,002005. *b*	
0,632373. *b*	2,882501. *b*	2,016475. *b*	*de buigpunten* K *en* Z.
0,7. *b*	3,485857. *b*	2,114143. *b*	
0,8. *b*	4,199290. *b*	2,200700. *b*	
0,9. *b*	4,946997. *b*	2,253003. *b*	
0,989218. *b*	5,645573. *b*	2,268170. *b*	*maximum* O *van y.*
1. *b*	5,732950. *b*	— 2,267850. *b*	
1,1. *b*	6,555551. *b*	2,244449. *b*	
1,3. *b*	8,320000 *b*	2,080000. *b*	
1,5. *b*	10,242642. *b*	1,757358. *b*	
1,7. *b*	12,324344. *b*	1,275656. *b*	
2. *b*	15,745966. *b*	0,294034. *b*	
2,061552. *b*	16,492416. *b*	0	*snijpunt met* XY.
2,2. *b*	18,226682. *b*	— 0,626682. *b*	
2,4. *b*	20,867226. *b*	— 1,667226. *b*	
2,5. *b*	22,247448. *b*	— 2,247448. *b*	
2,7. *b*	25,127820. *b*	— 3,527820. *b*	
3. *b*	29,748234. *b*	— 5,748234. *b*	
4. *b*	47,749008. *b*	— 15,749008. *b*	
enz.	*enz.*	*enz.*	

In deze figuur heeft men bovendien nog *Tang.* α = 6,828428 en *Tang.* β = 1,171572, waaruit voor de hoeken α en β gevonden wordt α = 84° 40′ 6″,43 en β = 49° 31′ 2″,83.

CLV. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Uit den tophoek van eenen driehoek is eene loodlijn op de grondlijn nedergelaten. Zoo nu gegeven zijn de stralen van de cirkels, welke om den oorspronkelijken driehoek en om de regthoekige driehoeken beschreven kunnen worden, waarin de driehoek verdeeld is, dan vraagt men hierdoor de zijden van den oorspronkelijken driehoek te vinden?

OPGELOST *door* J. BASSAN, A. B. DE BOCK JUN. *en* J. JONKHERT.

Oplossing van J. Bassan.

Omdat het middelpunt des omgeschreven' cirkels van eenen regthoekigen driehoek in het midden van de hypothenusa gelegen is, zoo zijn de zijden AB en AC, *Fig.* 97, de middellijnen van de cirkels, die om de driehoeken ABD en ACD beschreven kunnen worden, en dus zijn $AB = a$ en $AC = b$ reeds gegeven. Stellen wij nu de middellijn van den cirkel, om driehoek ABC beschreven, gelijk m, dan is bekend, dat men heeft $m \times AD = AB \times AC$, zoodat wij hebben $m \times AD = ab$ en dus $AD = \frac{ab}{m}$.

Hieruit volgt dan $BD = \sqrt{(a^2 - \frac{a^2 b^2}{m^2})} = \frac{a}{m}\sqrt{(m^2 - b^2)}$ en $DC = \sqrt{(b^2 - \frac{a^2 b^2}{m^2})} = \frac{b}{m}\sqrt{(m^2 - a^2)}$, waaruit dan voor de derde zijde gevonden wordt

$$BC = \frac{1}{m}\{a\sqrt{(m^2 - b^2)} + b\sqrt{(m^2 - a^2)}\}.$$

CLVI. VOORSTEL.

Door J. Bassan.

Uit den tophoek van eenen driehoek is eene loodlijn op de overstaande zijde nedergelaten. Om den driehoek en om een' der twee regthoekige driehoeken is een cirkel beschreven, terwijl in den anderen regthoekigen driehoek mede een cirkel beschreven is. Indien nu de stralen van deze drie cirkels gegeven zijn, vraagt men de zijden van den driehoek te vinden.

Opgelost *door* J. Bassan, J. Jonkheert *en* A. B. de Bock Jun.

Oplossing *van* J. Bassan.

Stellen wij, *Fig.* 97, de middellijn des omgeschreven' cirkels van driehoek ABD gelijk $2a$, de middellijn des omgeschreven' cirkels van driehoek $ABC = 2c$ en de middellijn des ingeschreven' cirkels van driehoek ADC gelijk $2b$, dan is vooreerst $AB = 2a$.

Verder is bekend, dat de middellijn des ingeschreven' cirkels van eenen driehoek gelijk is aan eene der zijden, gedeeld door den sinus van den overstaanden hoek, en wij hebben alzoo

AB

$$\frac{AB}{Sin.\ C}=2c \text{ of } \frac{2a}{Sin.\ C}=2c.$$

Hieruit volgt dus $Sin.\ C=\frac{a}{c}$ en $Cos.\ C=\sqrt{(1-\frac{a^2}{c^2})}$, zoodat wij, $AC=x$ stellende, hebben

$$AD=x\ Sin\ C=\frac{a}{c}x,\quad DC=x\ Cos.\ C=\frac{x}{c}\sqrt{(c^2-a^2)}.$$

De omtrek van driehoek ADC is alzoo

$$O=x+\frac{a}{c}x+\frac{x}{c}\sqrt{(c^2-a^2)}=\frac{x}{c}\{c+a+\sqrt{(c^2-a^2)}\},$$

en de inhoud van dezen driehoek is

$$I=\tfrac{1}{2}AD\times DC=\frac{ax^2}{2c^2}\sqrt{(c^2-a^2)}.$$

Daar nu de straal des ingeschreven' cirkels van eenen driehoek gelijk is aan deszelfs dubbelen inhoud, gedeeld door den omtrek, zoo hebben wij

$$\frac{\frac{ax^2}{c^2}\sqrt{(c^2-a^2)}}{\frac{x}{c}\{a+c+\sqrt{(c^2-a^2)}\}}=b,$$

of

$$\frac{ax\sqrt{(c^2-a^2)}}{c\{a+c+\sqrt{(c^2-a^2)}\}}=b,$$

waaruit

$$x=\frac{bc\{a+c+\sqrt{(c^2-a^2)}\}}{a\sqrt{(c^2-a^2)}},$$

of wanneer wij onder-en boven door $\sqrt{(c+a)}$ deelen

$$x=\frac{bc\{\sqrt{(a+c)}+\sqrt{(c-a)}\}}{a\sqrt{(c-a)}};$$

dat is

$$AC=x=\frac{bc}{a}\{1+\sqrt{\frac{c+a}{c-a}}\}.$$

Ten einde ook de derde zijde in a, b en c uit te drukken, hebben wij

$$DC=\frac{x}{c}\sqrt{(c^2-a^2)}=\frac{b}{a}\{c+a+\sqrt{(c^2-a^2)}\},$$

en

$$AD=\frac{a}{c}x=b\{1+\sqrt{\frac{c+a}{c-a}}\},$$

 dus

dus $BD = \sqrt{(AB^2 - AD^2)} = \sqrt{\left\{4a^2 - b^2\left(1+\sqrt{\frac{c+a}{c-a}}\right)^2\right\}}$,

zoodat $BC = \frac{b}{a}\{c+a+\sqrt{(c^2-a^2)}\} + \sqrt{\left\{4a^2 - b^2\left(1+\sqrt{\frac{c+a}{c-a}}\right)^2\right\}}$.

CLVII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Eenen driehoek door eene loodlijn in twee regthoekige driehoeken verdeeld hebbende, is om elk dezer regthoekige driehoeken een cirkel beschreven, terwijl in den oorspronkelijken driehoek mede een cirkel beschreven is. Men vraagt, de stralen van deze cirkels gegeven zijnde, de zijden van den driehoek te vinden?

OPGELOST *door* J. JONKHERT, J. BASSAN *en* A. B. DE BOCK JUN.

OPLOSSING *van* J. JONKHERT.

De zijden AB en AC, *Fig.* 97, tevens de middellijnen van den omgeschreven cirkel der regthoekige driehoeken zijnde, zoo zijn dezelve bekend, en wij hebben dus $AB = a$ en $AC = b$. Stellen wij nu $BC = x$, dan is de omtrek van driehoek ABC

$$O = a + b + x,$$

terwijl de inhoud van dezen driehoek is

$$I = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+x)(a+b-x)(a-b+x)(-a+b+x)}.$$

Stellen wij dus de middellijn des ingeschreven cirkels van driehoek ABC gelijk c', dan is

$$\tfrac{1}{2}c = \frac{\tfrac{1}{2}\sqrt{(a+b+x)(a+b-x)(a-b+x)(-a+b+x)}}{a+b+x},$$

of
$$c = \sqrt{\frac{(a+b-x)(a-b+x)(-a+b+x)}{a+b+x}},$$

zoodat $c^2(a+b+x) = (a+b-x)(a-b+x)(-a+b+x)$,
of $c^2\{x+(a+b)\} = \{-x+(a+b)\}\{x+(a-b)\}\{x-(a-b)\}$,
dat is $c^2\{x+(a+b)\} = \{-x+(a+b)\}\{x^2-(a-b)^2\}$,
hetwelk ontwikkeld en volgens de magten van x gerangschikt zijnde, geeft

$$x^3 - (a+b)x^2 + \{c^2 - (a-b)^2\}x + \{c^2 + (a-b)^2\}(a+b) = 0,$$

uit welke de derde zijde $BC = x$ zal kunnen gevonden worden, zoodra a, b en c in getallen gegeven zijn.

CLVIII.

CLVIII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Een' driehoek door eene loodlijn in twee regthoekige driehoeken verdeeld hebbende, is in den oorspronkelijken driehoek en in eenen der regthoekigen een cirkel beschreven, terwijl om den anderen regthoekigen driehoek een cirkel beschreven is. Wanneer nu de stralen van deze cirkels gegeven zijn, vraagt men de zijden van den driehoek te vinden?

OPGELOST *door* A. B. DE BOCK JUN. *en* J. BASSAN.

OPLOSSING *van* A. B. DE BOCK JUN.

Laat de straal des ingeschreven' cirkels van driehoek ABC, *Fig.* 97, zijn a en die van driehoek ABD gelijk b, dan is de derde der gegevens de middellijn van den omgeschreven' cirkel des driehoeks ADC, dat is de zijde AC, en wij kunnen dus stellen AC $= c$.

Stellen wij nu de hoeken BAC en BCA van den driehoek door A en C voor, dan is, in VOORSTEL XVI van dit Deel, voor den straal van den ingeschreven' cirkel gevonden

$$a = \frac{c}{Cot.\tfrac{1}{2}A + Cot.\tfrac{1}{2}C} \quad \ldots\ldots\ldots (1),$$

terwijl wij, BAD $= \phi$ stellende, voor den straal des ingeschreven' cirkels van driehoek BAD, uit dit zelfde voorstel hebben

$$b = \frac{AD}{1 + Cot\,\tfrac{1}{2}\phi} = \frac{c\,Sin.\,C}{1 + Cot.\,\tfrac{1}{2}\phi} \quad \ldots\ldots (2).$$

Nu is $\phi = A - DAC = A - (90^\circ - C) = A + C - 90$, dus $\tfrac{1}{2}\phi = \tfrac{1}{2}(A + C) - 45^\circ$, en bij gevolg

$$Cot.\tfrac{1}{2}\phi = \frac{Tang\,\tfrac{1}{2}(A + C) + 1}{Tang.\tfrac{1}{2}(A + C) - 1},$$

welke waarde in (2) gesubstitueerd, geeft

$$b = \frac{c\,Sin.\,C}{1 + \dfrac{Tang.\tfrac{1}{2}(A+C)+1}{Tang.\tfrac{1}{2}(A+C)-1}} = \frac{c\,Sin\,C\left\{Tang.\tfrac{1}{2}(A+C) - 1\right\}}{2\,Tang.\tfrac{1}{2}(A + C)} \quad . \quad (3).$$

Nu is $Sin.\,C = \dfrac{2\,Sin.\tfrac{1}{2}C\,Cos.\tfrac{1}{2}C}{1} = \dfrac{2\,Sin.\tfrac{1}{2}C\,Cos.\tfrac{1}{2}C}{Cos^2.\tfrac{1}{2}C + Sin^2.\tfrac{1}{2}C}$

$$= \frac{2}{Cot.\tfrac{1}{2}C + Tang.\tfrac{1}{2}C} = \frac{2\,Tang.\tfrac{1}{2}C}{1 + Tang^2.\tfrac{1}{2}C},$$

en

en $$Tang.\tfrac{1}{2}(A+C)=\frac{Tang.\tfrac{1}{2}A+Tang.\tfrac{1}{2}C}{1-Tang.\tfrac{1}{2}A\,Tang.\tfrac{1}{2}C},$$

welke waarde in (3) gesubstitueerd, gaven

$$b=\frac{c\,Tang.\tfrac{1}{2}C}{1+Tang^{2}.\tfrac{1}{2}C}\times\frac{Tang.\tfrac{1}{2}A\,Tang.\tfrac{1}{2}C+Tang.\tfrac{1}{2}A+Tang.\tfrac{1}{2}C-1}{1-Tang.\tfrac{1}{2}A\,Tang.\tfrac{1}{2}C}$$

$$\ldots\ldots\times\frac{1-Tang.\tfrac{1}{2}A\,Tang.\tfrac{1}{2}C}{Tang.\tfrac{1}{2}A+Tang.\tfrac{1}{2}C},$$

of $$b=\frac{c\,Tang.\tfrac{1}{2}C(Tang.\tfrac{1}{2}A\,Tang.\tfrac{1}{2}C+Tang.\tfrac{1}{2}A+Tang.\tfrac{1}{2}C-1)}{(1+Tang^{2}.\tfrac{1}{2}C)(Tang.\tfrac{1}{2}A+Tang.\tfrac{1}{2}C)}\quad .\ (4).$$

Stellen wij dus kortheidshalve $Tang.\tfrac{1}{2}C=x$ en $Tang.\tfrac{1}{2}A=y$, dan gaan de vergelijkingen (1) en (4) over in

$$a=\frac{cxy}{x+y}\quad\text{en}\quad b=\frac{cx(xy+x+y-1)}{(1+x^{2})(x+y)}.$$

Uit de eerste dezer vergelijkingen vinden wij

$$y=\frac{ax}{cx-a}\quad\ldots\ldots\ (5),$$

en brengende dit over in de tweede, dan komt er

$$b=\frac{cx\left\{(x+1)\times\frac{ax}{cx-a}+x-1\right\}}{(1+x^{2})\left(x+\frac{ax}{cx-a}\right)},$$

of $$b=\frac{c\left\{(x+1).\frac{ax}{cx-a}+x-1\right\}}{(1+x^{2})\left(1+\frac{a}{cx-a}\right)},$$

dat is $$b=\frac{ax(x+1)+(cx-a)(x-1)}{x(1+x^{2})},$$

dus $$bx(1+x^{2})=ax(x+1)+(cx-a)(x-1);$$

hetgeen ontwikkeld zijnde, geeft

$$bx+bx^{3}=(a+c)x^{2}-cx+a,$$

zoodat $$bx^{3}-(a+c)x^{2}+(b+c)x-a=0,$$

of $$x^{3}-\frac{a+c}{b}x^{2}+\frac{b+c}{b}x-\frac{a}{b}=0.$$

Zoodra dus a, b en c in getallen gegeven zijn, wordt uit deze vergelijking x, dat is $Tang.\tfrac{1}{2}C$ en dus ook C bekend, waardoor dan A gevonden wordt uit de vergelijking (5), dat is uit

Tang.

$$Tang.\,\tfrac{1}{2}A = \frac{a\,Tang.\,\tfrac{1}{2}C}{c\,Tang.\,\tfrac{1}{2}C - a} = \frac{a}{c - a\,Cot.\,\tfrac{1}{2}C}.$$

Men heeft alzoo in den driehoek ABC de zijde $AC = c$ met de twee aanliggende hoeken A en C bekend, waaruit dan de overige zijden door den bekenden regel der sinussen gevonden worden.

CLIX. VOORSTEL

Door J. BASSAN.

In eenen cirkel is een driehoek beschreven, waarvan de hoeken gegeven zijn. Bovendien is bekend, dat de drie cirkelsegmenten, welke, met het vlak van den driehoek te zamen genomen, het geheele cirkelvlak vervullen, achtervolgens met de gegevene lijnen a, b en c vermenigvuldigende, de som der producten gelijk is aan den cubus van den straal des cirkels. Men vraagt de zijden van dezen driehoek te vinden?

OPGELOST *door* J. BASSAN, L. J. ULMAN, A. B. DE BOCK JUN. *en* J. JONKHEERT.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Stellen wij de zijden van den driehoek α, β en γ en de overstaande hoeken A, B en C. Indien wij dan den straal van den omgeschreven' cirkel r stellen, zoo is

$$\frac{\alpha}{Sin.\,A} = \frac{\beta}{Sin.\,B} = \frac{\gamma}{Sin.\,C} = 2r$$ (LA CROIX, *Trig.* § 39.)

Hieruit volgt dus terstond

$$\alpha = 2r\,Sin.\,A,\quad \beta = 2r\,Sin.\,B,\quad \gamma = 2r\,Sin.\,C,$$

en daar A, B en C gegeven zijn, zal men, ter berekening der zijden, alleen r behoeven te kennen.

De hoeken A, B en C zijnde, zoo zijn de overeenkomstige hoeken aan het middelpunt 2A, 2B en 2C, en de inhouden der segmenten, welke hierdoor bepaald worden, zijn dus (*Idem*, § 46)

$$\tfrac{1}{2}r^2(2A - Sin.\,2A),\ \tfrac{1}{2}r^2(2B - Sin.\,2B),\ \tfrac{1}{2}r^2(2C - Sin.\,2C).$$

Deze alzoo achtervolgens met a, b en c vermenigvuldigende, verkrijgen wij, door de opgaaf van het vraagstuk

$$\tfrac{1}{2}r^2a(2A - Sin.\,2A) + \tfrac{1}{2}r^2b(2B - Sin.\,2B) + \tfrac{1}{2}r^2c(2C - Sin.\,2C) = r^3,$$

of door r^2 deelende,

$r =$

$$r = \tfrac{1}{2}a(2A - Sin.2A) + \tfrac{1}{2}b(2B - Sin.2B) + \tfrac{1}{2}c(2C - Sin.2C),$$

of $r = aA + bB + cC - \tfrac{1}{2}(a\,Sin.2A + b\,Sin.2B + c\,Sin.2C)$,

en hierdoor r berekend zijnde, worden de zijden α, β en γ door de boven-opgegevene formulen gevonden.

CLX. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Van eenen regthoekigen driehoek is bekend, dat de ſom der regthoekszijden, gedeeld door het vierkant van derzelver verſchil, gelijk 3½ is. Voorts is het vierkant van de ſchuinſche zijde, verminderd met de ſom der regthoekszijden, gelijk 8C. *Vrage naar de zijden van dezen driehoek?*

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, A. B. DE BOCK JUN., J. BASSAN, G. BRANDSTEDER *en* J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

Stel de regthoekszijden $x+y$ en $x-y$, dan is de ſchuinſche zijde $\sqrt{\{(x+y)^2+(x-y)^2\}}$ of $\sqrt{2(x^2+y^2)}$; terwijl de ſom en het verſchil der regthoekszijden zijn $2x$ en $2y$. Het vraagſtuk geeft ons alzoo de twee volgende vergelijkingen

$$\frac{2x}{4y^2} = 3\tfrac{1}{2} \quad \text{en} \quad 2x^2 + 2y^2 - 2x = 86,$$

of

$$\frac{x}{2y^2} = 3\tfrac{1}{2} \quad \text{en} \quad x^2 + y^2 - x = 43.$$

Uit de eerſte is $x = 7y^2$ of $y^2 = \tfrac{1}{7}x$, en hierdoor wordt de tweede

$$x^2 + \tfrac{1}{7}x - x = 43,$$

dat is

$$x^2 - \tfrac{6}{7}x = 43,$$

waaruit

$$x = \tfrac{3}{7} \pm \sqrt{(43 + \tfrac{9}{49})},$$

dat is

$$x = \frac{3 \pm 46}{7} = 7 \text{ of } -\tfrac{43}{7},$$

waarvan de tweede niet kan worden gebruikt, omdat zij $y = \sqrt{\tfrac{1}{7}x} = \tfrac{1}{7}\sqrt{-43}$ en dus onbeſtaanbaar maakt. Wij hebben alzoo alleen $x = 7$, dus $y = \sqrt{\tfrac{1}{7}x} = 1$; de regthoekszijden zijn alzoo $x + y = 8$ en $x - y = 6$, terwijl de hypothenuſa $\sqrt{2(x^2+y^2)} = 10$ is.

CLXI.

CLXI. VOORSTEL.

Door S. KLYNSMA.

Twee cirkels, van willekeurigen straal, raken elkander uitwendig, en uit het midden van de som der middellijnen, die door het raakpunt gaan, is een derde cirkel beschreven, welke mede eenen willekeurigen straal heeft, en groot genoeg is om de twee anderen in te sluiten. Wanneer men nu door het raakpunt der twee eerste cirkels eene willekeurige regte lijn trekt, dan zullen de stukken van deze lijn, begrepen tusschen den laatsten cirkel en het bolronde gedeelte van de twee eerste cirkels, even groot wezen. Men vraagt deze stelling te bewijzen?

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, S. KLYNSMA, J. JONKHEERT, J. BASSAN *en* A. B. DE BOCK JUN.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

Zij A, *Fig.* 114, het raakpunt der beide cirkels, wier middelpunten in B en C liggen. Alsdan is het punt P, dat ED midden door deelt, het middelpunt van den grootsten cirkel, welke de twee anderen insluit; trekkende dus door A de willekeurige lijn FG, dan moeten wij bewijzen, dat FH = IG is.

Hiertoe trekken wij EH en DI, en deze staan dan beide loodregt op FG; omdat de hoek in den halven cirkel regt is. Trekkende dus PK loodregt op FG, dan maken EH, PK en ID een stelsel van drie evenwijdige lijnen uit, en daar deze door de lijnen FG en ED gesneden worden, zoo is, volgens eene algemeen bekende stelling, EP : PD = HK : KI; maar volgens de onderstelling is EP = PD, en bij gevolg is dan ook HK = KI.

Omdat eindelijk PK loodregt op de koorde FG staat, zoo is FK = KG, en trekkende hiervan HK = KI af, dan blijft er FH = IG, hetgeen bewezen moest worden.

AANMERKING. Deze stelling en het opgegeven bewijs blijven woordelijk doorgaan, welke ook de straal van den derden cirkel mag zijn, uit P als middelpunt beschreven. Men kan zich hiervan overtuigen, door ons bewijs na te lezen op den gestipten cirkel van *Fig.* 114; de voorwaarde, dat deze cirkel de twee anderen moet insluiten, is dus overtollig.

CLXII. Voorstel.

Door S. Klynsma.

Van eenen gelijkbeenigen driehoek is de som der zijden benevens de inhoud bekend, men vraagt de zijden van dezen driehoek te vinden?

Opgelost *door* S. Klynsma, L. J. Ulman, J. Bassan, A. B. de Bock Jun. *en* H. Strootman.

Oplossing *van* S. Klynsma.

Stel den omtrek van den gelijkbeenigen driehoek s en deszelfs inhoud gelijk a^4 gegeven; noemt men dan de onbekende bazis x, dan is de hoogte

$$y=\frac{2a^2}{x},$$

waaruit voor de schuinsche zijde, dat is, voor elk der gelijke beenen gevonden wordt

$$z=\surd(y^2+\tfrac{1}{4}x^2)=\surd(\frac{4a^4}{x^2}+\tfrac{1}{4}x^2).$$

Daar echter de omtrek s en de bazis x is, wordt elk der gelijke beenen ook uitgedrukt door

$$z=\tfrac{1}{2}(s-x);$$

stellende dus deze twee waarden van z aan elkander gelijk, dan verkrijgen wij de vergelijking

$$\tfrac{1}{2}(s-x)=\surd(\frac{4a^4}{x^2}+\tfrac{1}{4}x^2),$$

of $$\tfrac{1}{4}(s-x)^2=\frac{4a^4}{x^2}+\tfrac{1}{4}x^2,$$

dat is $$s^2-2sx=\frac{16a^4}{x^2},$$

of $$x^3-\tfrac{1}{2}sx^2+\frac{8a^4}{s}=0 \;.\;.\;.\;.\;.\; (a),$$

uit welke derde magtsvergelijking x gevonden kan worden, waardoor dan ook y en z bepaald zijn.

Aanmerking *door* I. R. Schmidt.

Vermits eene derdemagtsvergelijking altijd ten minste éénen bestaanbaren wortel heeft, zoo volgt hieruit, dat het opgegeven vraagstuk altijd mogelijk is, en hetzelve zal dus, wanneer de vergelijking (a) drie bestaanbare wortels heeft, ook drie verschil-

schillende oplossingen toelaten. Dit besluit moet bij den eersten opslag vreemd schijnen; want indien de omtrek zeer klein en de inhoud van aanmerkelijke grootte gegeven is, blijkt het zoo niet terstond, hoe er een gelijkbeenige driehoek kan worden gedacht, welke met deze gegevens overeenstemt. Ten einde deze schijnstrijdigheid uit den weg te ruimen, lette men op, dat vermits in de vergelijking (α) s en a^2 altijd positief ondersteld worden, deze vergelijking, indien zij drie bestaanbare wortels heeft, twee positieve en eenen negatieven wortel zal hebben; want welk teeken men ook voor den ontbrekenden term denkt, vindt men in beide gevallen twee afwisselingen van teekens. Onderstellen wij dan, dat de drie wortels van (α) bestaanbaar zijn, dan maken de twee positieve waarden van x ook $y = \frac{2a^2}{x}$ positief, en deze twee wortels zullen alzoo regtstreeks aan het vraagstuk voldoen, dat is, zij zullen driehoeken aantoonen, waarvan werkelijk de omtrek s en de inhoud a^2 is. De derde of negatieve wortel daarentegen maakt ook de hoogte y negatief, en offchoon dus de inhoud hierdoor a^2 zal blijven, voldoet de driehoek, die hieruit ontstaat, niet meer regtstreeks aan het vraagstuk; want daar de bazis x nu negatief is, en de gelijke beenen $z = \frac{1}{2}(s - x)$ hierdoor positief worden, zoo is eigenlijk niet meer de omtrek gelijk s, maar het is de som der gelijke beenen vermeêrdérd met de bazis, welke hier het gegeven getal s voortbrengt.

Onze vergelijking lost dus eigenlijk het volgende vraagstuk op: *eenen gelijkbeenigen driehoek te vinden, waarvan de inhoud a^2 is, zoodanig, dat de som der gelijke beenen, vermeerderd of verminderd met de bazis, gelijk s zij*, en de positieve wortels van (α) lossen het eerste gedeelte van de vraag op, dat eigenlijk in de opgaaf bedoeld was, terwijl de negatieve wortel het laatste gedeelte van dit meer algemeene vraagstuk oplost.

Heeft de vergelijking (α) twee gelijke wortels, dan geven de twee positieve wortels denzelfden driehoek, en deze is dan de grootst mogelijke, welke onder den gegevenen omtrek s kan plaats hebben. Het is genoegzaam bekend, dat deze grootste driehoek de gelijkzijdige is; doch wij zullen dit zoo aanstonds door onze

for-

formulen bevestigd zien. De negatieve wortel moet alsdan even als boven worden verklaard.

Zijn eindelijk twee wortels van de vergelijking (α) onbestaanbaar, dat is, wordt a^2 grooter gegeven dan de grootste driehoek, die onder den omtrek s bestaan kan, dan is het vraagstuk voor geene regtstreeksche oplossing vatbaar, doch dan blijft altijd de negatieve wortel bestaan, welke een' driehoek aantoont, waarvan de inhoud a^2 is, en waarin de som der gelijke beenen, verminderd met de bazis, gelijk is aan de gegevene lijn of het gegeven getal s.

Volgens de bekende theorie der vergelijkingen van den derden graad (LACROIX, *Beg. der Stelk.*, *tweede druk*, *bl.* 396) zal de vergelijking

$$u^3+pu+q=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

twee gelijke wortels hebben, wanneer men heeft $p=-3\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}q^2}$, en deze gelijke wortels zullen wezen $u=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q}$, terwijl de derde wortel zal zijn $u'=-2\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q}$.

Om dit op ons vraagstuk toe te passen, merken wij op, dat (α) den vorm van (A) niet heeft; doch schrijven wij in (α) $x=\dfrac{2a^2}{y}$, dat is, zoeken wij de vergelijking ter bepaling van de hoogte des gevraagden driehoeks, dan komt er

$$y^3-\tfrac{1}{4}s^2y+a^2s=0 \quad \ldots\ldots \quad (\beta),$$

en deze met (A) vergelijkende, hebben wij

$$p=-\tfrac{1}{4}s^2 \quad \text{en} \quad q=a^2s,$$

en dezelve zal dus gelijke wortels hebben, wanneer $-\tfrac{1}{4}s^2=-3\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}a^4s^2}$ is, of $s^2=12\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}a^4s^2}$, dat is $s^6=\dfrac{1728}{4}a^4s^2$, of $a^4=\dfrac{1}{432}s^4$, waaruit

$$a^2=\tfrac{1}{36}s^2\sqrt{3} \quad \text{of} \quad a=\tfrac{1}{6}s\sqrt[4]{3};$$

heeft dus deze betrekking tusschen de gegevens plaats, dan zal de driehoek de grootste wezen, welke onder den omtrek s kan bestaan.

De twee gelijke wortels zullen, ingevolge het bovenstaande, zijn

$y=$

$$y = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q} = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}a^2 s} = \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}s \times \tfrac{1}{36}s^2\sqrt{3})} = \tfrac{1}{6}s\sqrt[3]{(3\sqrt{3})}$$
$$= \tfrac{1}{6}s\sqrt[3]{(\sqrt{3})^3} = \tfrac{1}{6}s\sqrt{3};$$

dus $$x = \frac{2a^2}{y} = \tfrac{1}{18}s^2\sqrt{3} \times \frac{6}{s\sqrt{3}} = \tfrac{1}{3}s,$$

en $z = \frac{1}{2}(s - x) = \frac{1}{3}s$, en de driehoek is dus gelijkzijdig, waardoor het vroeger gezegde volkomen bevestigd is.

De derde of negatieve wortel wordt voor dit geval $y = -\frac{1}{3}s\sqrt{3}$, dus $x = -\frac{1}{6}s$ en $z = \frac{7}{12}s$.

Neemt men tot willekeurig voorbeeld $s = 16$, en $a^2 = 12$, dan is de vergelijking (α)

$$x^3 - 8x^2 + 72 = 0,$$

en de drie wortels van deze vergelijking zijn:

$$x = 6, \quad x = 1 + \sqrt{13} \quad \text{en} \quad x = 1 - \sqrt{13},$$

dus, uit hoofde van $y = \dfrac{2a^2}{x}$,

$$y = 4, \quad y = -2 + \sqrt{13} \quad \text{en} \quad y = -2 - \sqrt{13},$$

en daar $z = \frac{1}{2}(s - x)$ is,

$$z = 5, \quad z = \tfrac{1}{2}(15 - \sqrt{13}) \quad \text{en} \quad z = \tfrac{1}{2}(15 + \sqrt{13}).$$

In elken dezer driehoeken is de inhoud 12, doch alleen van de twee eerste is de som der zijden of liever de omtrek 16; want offchoon van den derden de algebraïsche som der zijden mede 16 is, zoo is, wanneer men alleen de wezenlijke lengte der lijnen in aanmerking neemt, zonder op de teekens te letten, niet de omtrek, maar de som der beenen, verminderd met de bazis, gelijk 16.

CLXIII. VOORSTEL.

Door S. KLYNSMA.

Men begeert een trapezium in twee andere trapeziums te verdeelen, die tot elkander in gegevene reden zijn, door eene lijn, die eenen gegevenen hoek maakt met de twee evenwijdige zijden?

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, J. JONKHEERT, J. BASSAN, S. KLYNSMA *en* A. B. DE BOCK JUN.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

Zij ABCD, *Fig.* 115, het trapezium, P de hoek, welken de deellijn met de evenwijdige zijden moet maken, en r en s twee lijnen, die de gegevene reden van de deelen des trapeziums uitdrukken. Omdat dan de deelen wederom trapeziums moeten

zijn, zal de deellijn de twee evenwijdige zijden van het gegeven trapezium onder den hoek P moeten doorsnijden, en wij zullen bovendien moeten hebben *Trap.* ADML : *Trap.* LMCB $= r : s$.

Hiertoe verlengen wij AD en BC tot zij elkander snijden in F; deelen DC zoodanig in G, dat DG : GC $= r : s$ zij, en trekken vervolgens FGE. Alsdan is ook AE : EB $= r : s$, en dus ook

AE + DG : EB + GC $= r : s$,

of, wanneer wij de termen der eerste reden met de halve hoogte vermenigvuldigen,

Trap. AEGD : *Trap.* EGCB $= r : s$ . . . . (α).

Deelen wij dan EG midden door in H, en trekken wij door H eene lijn LM, die met DC den gegeven' hoek P maakt, dan is het duidelijk in te zien, dat LM de gevraagde deellijn zal zijn; want dezelve voldoet nu aan de voorwaarde, om met de evenwijdige zijden den gegeven' hoek te maken, en ten andere zijn de driehoeken HGM en HEL, als eene zijde met de hoeken op deze zijde aan elkander gelijk hebbende, even groot, waaruit volgt

Trap. DMLA $=$ *Trap.* DGEA

en *Trap.* LMCB $=$ *Trap.* GCBE,

hetwelk, in (α) overgebragt, geeft

Trap. DMLA : *Trap.* LMCB $= r : s$.

Hieruit blijkt dan, dat men alleen DC en AB, door de lijn GE, beide in deelen moet snijden, die tot elkander in reden zijn als $r : s$, en vervolgens door het midden H, van de lijn GE, de lijn LM zoodanig moet trekken, dat zij met DC den gegeven' hoek P maakt, zullende alsdan deze lijn LM de begeerde zijn.

AANMERKINGEN. 1°. Men kan de lijn M′L′ ook zoodanig trekken, dat zij, aan de andere zijde van G eenen hoek M′, gelijk den hoek P, met de lijn DC maakt; men heeft dan eveneens *driehoek* HM′G $=$ *driehoek* HL′E; waaruit blijkt, dat de deellijn M′L′ even goed als de deellijn ML aan de vraag beantwoordt.

2°. Men ziet echter duidelijk in, dat de deellijn M′L′ slechts zoo lang aan de vraag kan voldoen, als GM′ kleiner dan GD blijft; want viel het punt M′ op het verlengde van GD, dan zou DM′L′A geen deel meer zijn van ABDC. In zulk geval

zou

zou dan alleen LM in den ſtrikſten zin aan de vraag voldoen.

3°. De hoek P kan ook zoo klein gegeven zijn, dat geene der punten M of M′ op DC valt, maar dat zij beide op het verlengde van DC komen te liggen, de eene ter regter zijde van C en de andere ter linker zijde van D. In dit geval kan er alzoo geene ſnijlijn getrokken worden, welke het gegeven trapezium in twee andere trapeziums verdeelt, welke aan het gevraagde voldoen.

4°. Men moet hieruit echter geenszins opmaken, dat er in het laatſte geval geene lijn zou kunnen beſtaan, die het trapezium in twee ſtukken verdeelt, welke aan het gevraagde beantwoorden; want wanneer men deellijnen toelaat, die eene der evenwijdige en eene der onevenwijdige zijden, of zulke, die de beide onevenwijdige zijden doorſnijden, dan blijft de vraag altijd mogelijk. Daar echter in zulke gevallen de ſtukken geene trapeziums zouden zijn, zoo als in de opgaaf gevorderd wordt, gaan wij dezelve met ſtilzwijgen voorbij, en merken alleen op, dat ingevalle de deellijn door eene der evenwijdige en eene der onevenwijdige zijden moet gaan, het vraagſtuk als van zelf terug gebragt wordt tot Voorſtel XXX van het 2e deel dezer Verzameling.

CLXIV. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK JUN.

Wanneer men van de reeks $\frac{x}{1-y} + \frac{x^3 y^{3(n+1)}}{1.2.3(1-y^3)} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5(1-y^5)} + \frac{x^7 y^{7(n+1)}}{1.2.3.4.5.6.7(1-y^7)} +$ *enz., de reeks* $\frac{xy^{(n+1)}}{1-y} + \frac{x^3}{1.2.3(1-y^3)} + \frac{x^5 y^{5(n+1)}}{1.2.3.4.5(1-y^5)} + \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7(1-y^7)} +$ *enz. aftrekt, welke reekſen, waarin n een geheel poſitief getal verbeeldt, beide tot in het oneindige voortloopen, dan vraagt men dit verſchil tot een eindig aantal termen te herleiden?*

OPGELOST *door* A. B. DE BOCK JUN. *en* L. J. ULMAN.

OPLOSSING *van* A. B. DE BOCK JUN.

Trekt men de reekſen werkelijk van elkander af, en rangſchikt-

men hierbij de termen volgens de magten van x, dan heeft men, de uitkomst door S voorstellende,

$$S=\frac{x(1-y^{n+1})}{1-y}-\frac{x^3(1-y^{3(n+1)})}{1.2.3(1-y^3)}+\frac{x^5(1-y^{5(n+1)})}{1.2.3.4.5(1-y^5)}$$
$$-\frac{x^7(1-y^{7(n+1)})}{1.2.3.4.5.6.7(1-y^7)}+\textit{enz.}$$

Voeren wij verder al de aangewezene deelingen ten opzigte van y uit, dan komt er

$$S=\frac{x(1+y+y^2+y^3+\textit{enz.}\ \ldots\ +y^n)}{1}$$
$$-\frac{x^3(1+y^3+y^6+y^9+\textit{enz.}\ \ldots\ +y^{3n})}{1.2.3}$$
$$+\frac{x^5(1+y^5+y^{10}+y^{15}+\textit{enz.}\ \ldots\ +y^{5n})}{1.2.3.4.5}$$
$$-\frac{x^7(1+y^7+y^{14}+y^{21}+\textit{enz}\ \ldots\ +y^{7n})}{1.2.3.4.5.6.7}$$
$$+\textit{enz.}$$

en deze reeks bestaat nu nog uit een oneindig aantal termen, waarvan echter elke term, omdat n een geheel positief getal is, uit een eindig aantal en wel uit $n+1$ termen bestaat.

Deze uitdrukking kan echter aldus geschreven worden:

$$S=x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\textit{enz.}$$
$$+xy-\frac{x^3y^3}{1.2.3}+\frac{x^5y^5}{1.2.3.4.5}-\frac{x^7y^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\textit{enz.}$$
$$+xy^2-\frac{x^3y^6}{1.2.3}+\frac{x^5y^{10}}{1.2.3.4.5}-\frac{x^7y^{14}}{1.2.3.4.5.6.7}+\textit{enz.}$$
$$+xy^3-\frac{x^3y^9}{1.2.3}+\frac{x^5y^{15}}{1.2.3.4.5}-\frac{x^7y^{21}}{1.2.3.4.5.6.7}+\textit{enz.}$$
$$+\textit{enz.}$$
$$+xy^n-\frac{x^3y^{3n}}{1.2.3}+\frac{x^5y^{5n}}{1.2.3.4.5}-\frac{x^7y^{7n}}{1.2.3.4.5.6.7}+\textit{enz.}$$

en deze reeks heeft nu $n+1$ termen, van welke echter ieder in het bijzonder een oneindig aantal termen heeft.

Elke

Elke dezer oneindige reeksen in het bijzonder kan zeer gemakkelijk gesommeerd worden; want schrijven wij onze formule aldus:

$$S = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + enz.$$
$$+ xy - \frac{(xy)^3}{1.2.3} + \frac{(xy)^5}{1.2.3.4.5} - \frac{(xy)^7}{1.2.3.4.5.6.7} + enz.$$
$$+ xy^2 - \frac{(xy^2)^3}{1.2.3} + \frac{(xy^2)^5}{1.2.3.4.5} - \frac{(xy^2)^7}{1.2.3.4.5.6.7} + enz.$$
$$+ xy^3 - \frac{(xy^3)^3}{1.2.3} + \frac{(xy^3)^5}{1.2.3.4.5} - \frac{(xy^3)^7}{1.2.3.4.5.6.7} + enz.$$
$$+ enz.$$
$$+ xy^n - \frac{(xy^n)^3}{1.2.3} + \frac{(xy^n)^5}{1.2.3.4.5} - \frac{(xy^n)^7}{1.2.3.4.5.6.7} + enz.$$

en vergelijken wij elke dezer reeksen met de algemeen bekende reeks

$$Sin.\,\phi = \phi - \frac{\phi^3}{1.2.3} + \frac{\phi^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\phi^7}{1.2.3.4.5.6.7} + enz.$$

dan verkrijgen wij klaarblijkelijk

$$S = Sin\,x + Sin.\,xy + Sin.\,xy^2 + Sin.\,xy^3 + enz. \ldots Sin.\,xy^n,$$

en de opgegevene formule is alzoo de som van $n+1$ sinussen, waarvan de bogen in eene meetkunstige reeks opklimmen.

CLXV. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK JUN.

Men vraagt de waarde van ϕ *te vinden uit de vergelijking*

$$Cos\,(a-\phi) - Cos.(a+\phi) = \frac{1}{a} Sec.\tfrac{1}{2}(\phi-a)\,Cosec.\tfrac{1}{2}(\phi+a)?$$

OPGELOST *door* A. B. DE BOCK JUN., L. J. ULMAN, J. JONKHERT *en* J. BASSAN.

OPLOSSING *van* A. B. DE BOCK JUN.

Vermenigvuldigen wij de vergelijking met $Sin.\tfrac{1}{2}(\phi+a)\,Cos.\tfrac{1}{2}(\phi-a)$, dan komt er

$$\{Cos.(a-\phi) - Cos.(a+\phi)\}\,Sin.\tfrac{1}{2}(\phi+a)\,Cos.\tfrac{1}{2}(\phi-a) = \frac{1}{a},$$

maar door de bekende goniometrische formulen is

$$Cos.(a-\phi) - Cos.(a+\phi) = 2\,Sin.\,a\,Sin.\,\phi,$$

 en

en $Sin.\frac{1}{2}(\alpha+\phi)\ Cos.\frac{1}{2}(\phi-\alpha)=\frac{1}{2}(Sin.\phi+Sin.\alpha)$,
waardoor onze vergelijking overgaat in

$$Sin.\alpha\ Sin.\phi\,(Sin.\alpha+Sin.\phi)=\frac{1}{a},$$

of door $Sin.\alpha$ deelende en ontwikkelende, in

$$Sin^2.\phi+Sin.\alpha\ Sin.\phi=\frac{1}{a\,Sin.\alpha},$$

waaruit $Sin.\phi=-\frac{1}{2}Sin.\alpha\pm\sqrt{(\frac{1}{4}Sin^2.\alpha+\frac{1}{a\,Sin.\alpha})}$,

dat is $Sin.\phi=\frac{1}{2}Sin.\alpha\{-1\pm\sqrt{(1+\frac{4}{a\,Sin^3.\alpha})}\}$.

Aanmerking. Het vraagstuk zal onmogelijk zijn, wanneer het tweede lid van de laatste vergelijking grooter dan de eenheid is. Voor de mogelijkheid zal men dus moeten hebben

$$1>-\frac{1}{2}Sin.\alpha\pm\sqrt{(1+\frac{4}{a\,Sin^3.\alpha})},$$

waaruit men gemakkelijk komt tot

$$a>\frac{1}{Sin.\alpha(1+Sin.\alpha)}.$$

Neemt men a gelijk de laatstgevondene waarde, dan vindt men $\phi=90°$.

CLXVI. VOORSTEL.

Door A. B. de Bock Jun.

Van eenen bolvormigen driehoek twee zijden gegeven zijnde, benevens de boog, die de derde zijde midden door deelt, en door het tegenoverstaande hoekpunt gaat, vraagt men de derde zijde te berekenen?

Opgelost *door* A. B. de Bock Jun., J. Bassan *en* J. Jonkhert.

Oplossing *van* A. B. de Bock Jun.

Zij ABC, *Fig.* 116, de driehoek, waarin gegeven is $BC=a$, $AC=b$, $AD=DB$ en $CD=c$. Stellende dan $AD=DB=x$, dan is, door den bekenden regel der bolvormige driehoeksmeting, in den driehoek BCD

$$Cos.B=\frac{Cos.c-Cos.a\ Cos.x}{Sin.a\ Sin.x},$$

en in den driehoek ABC

Cos.

$$-Cos\ B = \frac{Cos.\ b - Cos.\ a\ Cos.\ 2x}{Sin.\ a\ Sin.\ 2x},$$

Stellende dus deze waarden aan elkander gelijk, dan is

$$\frac{Cos.\ c - Cos.\ a\ Cos.\ x}{Sin.\ a\ Sin.\ x} = \frac{Cos.\ b - Cos.\ a\ Cos.\ 2x}{Sin.\ a\ Sin.\ 2x},$$

of $$\frac{Cos\ c - Cos.\ a\ Cos.\ x}{Sin.\ a\ Sin.\ x} = \frac{Cos.\ b - Cos.\ a\ (2\ Cos^2.\ x - 1)}{2\ Sin.\ a\ Sin.\ x\ Cos.\ x},$$

dat is, wanneer wij met $2\ Sin.\ a\ Sin.\ x\ Cos.\ x$ vermenigvuldigen,

$$2\ Cos.\ x\ (Cos.\ c - Cos.\ a\ Cos.\ x) = Cos.\ b - Cos.\ a\ (2\ Cos^2.\ x - 1)$$

of, na ontwikkeling en herleiding,

$$2\ Cos.\ c\ Cos.\ x = Cos.\ b + Cos.\ a,$$

waaruit $$Cos.\ x = \frac{Cos.\ b + Cos.\ a}{2\ Cos.\ c},$$

dat is in woorden: *in elken bolvormigen driehoek is de cosinus van de helft eener zijde gelijk de som der cosinussen van de twee overige zijden, gedeeld door den dubbelen cosinus van den boog, welke de eerstgenoemde zijde midden door deelt en door het tegenoverstaande hoekpunt gaat.*

De waarde van $Cos.\ x$ wordt echter nog gemakkelijker berekend door de formule

$$Cos.\ x = \frac{Cos.\ \tfrac{1}{2}(b+a)\ Cos.\ \tfrac{1}{2}(b-a)}{Cos.\ c},$$

welke beter geschikt is voor de berekening door logarithmen. Deze formule volgt onmiddellijk uit de voorgaande, en kan even gemakkelijk in woorden worden uitgedrukt.

Den boog x en dus ook de zijde $AB = 2x$ berekend hebbende, worden de hoeken, door de genoegzaam bekende formulen, uit de zijden afgeleid.

CLXVII. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Men vraagt een gegeven getal a in twee deelen te verdeelen, wier product een quadraat is? (*)

OPGELOST door G. BRANDSTEDER, L. J. ULMAN, A. B. DE BOCK JUN., J. BASSAN, H. STROOTMAN en J. JONKHEER.

Stel

(*) PRIMSEN, *Algebra voor Scholen*, bl. 156. No. 1.

Stel het eene deel x, dan is het andere $a-x$, zoodat $x(a-x)$ of $ax-x^2$ een quadraat moet zijn. Stel den wortel van dit quadraat nx, dan is

$$ax-x^2=n^2x^2,$$

of $$a-x=n^2x,$$

dat is $$(n^2+1)x=a,$$

waaruit $$x=\frac{a}{n^2+1},$$

en hierin kan nu voor n elk getal naar welgevallen genomen worden.

Is, bij voorbeeld, $a=10$ en neemt men $n=2$, dan is $x=2$ en $a-x=8$.

CLXVIII. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Mijne vrouw en ik zijn zoo lang getrouwd geweest, dat haar ouderdom het omgekeerde is geworden van dien bij het aangaan van onze echtverbindtenis, en wanneer wij zoo lang zullen gehuwd zijn, als zij bij het voltrekken van ons huwelijk oud was, dan zal mijn ouderdom het dubbel wezen van den tijd, dien wij nu steeds getrouwd zijn. Wanneer wij eindelijk zoo lang vereenigd zullen wezen als ik tegenwoordig oud ben, dan zal mijne vrouw zoo oud zijn als het omgekeerde van mijne jaren toen wij trouwden, en ik zal zoo oud wezen als het omgekeerde van de jaren mijner vrouw, bij het voltrekken van ons huwelijk. Hoe oud zijn wij thans?

Opgelost *door* B. Lubbers, L. J. Ulman, A. B. de Bock Jun., J. Bassan *en* H. Strootman.

Oplossing *van* B. Lubbers.

Het is klaar, dat de gevraagde ouderdommen, bij de verschillende tijdperken, waarvan in het voorstel gewag gemaakt is, getallen van twee cijferletters moeten zijn, en wij stellen alzoo, dat bij het eerste tijdperk, dat is bij het voltrekken van het huwelijk, de ouderdom van de vrouw is $10x+y$ en die van den man $10v+z$ jaren.

Volgens de eerste voorwaarde is de vrouw alzoo op den tegenwoordigen oogenblik oud $10y+x$ jaren.

Trekkende hiervan af haren ouderdom bij het trouwen, dat is

$y+10x$

$y + 10x$ jaren, dan blijft er voor den tijd, federt het huwelijk tot nu toe verloopen, $9y - 9x$.

Tellende bij den ouderdom, welken de man en de vrouw bij het trouwen bereikt hadden, den ouderdom, dien de vrouw alstoen had, dat is $10x + y$ jaren, dan vindt men voor den verkregen' ouderdom van de vrouw $20x + 2y$ en voor dien van den man $10v + z + 10x + y$, en dit is dan nu de ouderdom van ieder bij het derde tijdperk, waarvan in de opgaaf wordt gewag gemaakt.

Nu moet op dezen oogenblik de ouderdom van den man het dubbel zijn van den tijd, welken zij bij het tweede tijdperk getrouwd waren, dat is het dubbel van $9y - 9x$. Dit geeft ons

$$10v + z + 10x + y = 18y - 18x,$$

waaruit

$$10v + z = 17y - 28x.$$

en daar $10v + z$ de ouderdom des mans, bij het voltrekken van het huwelijk, is, zoo blijkt hieruit, dat deze zelfde ouderdom ook kan worden uitgedrukt door $17y - 28x$.

Tellende hierbij $9y - 9x$, dat is de tijd, dien zij werkelijk gehuwd zijn, dan komt er nog voor den tegenwoordigen ouderdom van den man $26y - 37x$.

Het vierde tijdperk, waarvan in de opgaaf gesproken wordt, heeft plaats, wanneer de personen zoo lang gehuwd zijn, als de man, op het oogenblik, waarvan gesproken wordt, jaren bereikt heeft. Volgens het bovengestelde en gevondene, zijn nu de ouderdommen, bij het aangaan van het huwelijk, voor de vrouw $10x + y$ en voor den man $17y - 28x$. Tellende dus hierbij den tegenwoordigen ouderdom van den man, dat is $26y - 37x$, dan volgt hieruit, dat bij dit vierde tijdperk de ouderdom van de vrouw zal zijn $27y - 27x$, en die van den man $43y - 65x$.

Nu moet deze ouderdom van den man in het vierde tijdperk het omgekeerde zijn van den ouderdom der vrouw bij het trouwen, dat is het omgekeerde van $10x + y$, en wij hebben dus

$$43y - 65x = 10y + x,$$

of

$$33y = 66x,$$

dat is

$$y = 2x.$$

Vermits wij den ouderdom van man en vrouw, in elk der vier tijdperken, reeds in x en y hebben uitgedrukt, kunnen wij, door

 de

de laatste vergelijking, al deze ouderdommen in x alleen uitdrukken, en wij zullen vinden:

I. Eerste tijdvak, dat is, bij het aangaan van het huwelijk,

de man $17y - 28x$ of $6x$ jaren,

de vrouw $10x + y$ of $12x$ jaren.

II. Tweede tijdperk, dat is, den tegenwoordigen of gevraagden ouderdom,

de man $26y - 37x$ of $15x$ jaren,

de vrouw $19y + x$ of $21x$ jaren.

III. Derde tijdperk, dat is, wanneer de personen zoo lang zijn getrouwd geweest, als de vrouw oud was bij het trouwen,

de man $18y - 18x$ of $18x$ jaren,

de vrouw $20x + 2y$ of $24x$ jaren.

IV. Vierde tijdperk, dat is, wanneer de personen zoo lang zijn getrouwd geweest, als de tegenwoordige ouderdom van den man bedraagt,

de man $43y - 65x$ of $21x$ jaren,

de vrouw $27(y - x)$ of $27x$ jaren,

waarbij wij nog kunnen voegen, dat de tijd, sedert het trouwen tot den tegenwoordigen oogenblik verloopen, is $9x$ jaren.

De eenigste voorwaarde, waaraan nog voldaan moet worden, is deze, dat de ouderdom van de vrouw bij het vierde tijdperk het omgekeerde moet wezen van den ouderdom des mans in het eerste tijdperk, en dus moet $27x$ het omgekeerde zijn van $6x$. Stellende dus $6x = 10t + u$, dan moet $27x = 10u + t$ wezen, en hiervan is het verschil $21x = 9u - 9t$, waaruit $u - t = \frac{7x}{3}$.

Daar nu u en t, als de cijfers van een getal voorstellende, geene gebrokens kunnen zijn, zoo moet ook $u - t$ een geheel getal wezen, en hieruit volgt, dat x deelbaar moet zijn door 3, zoodat men voor x zou kunnen nemen 3, 6, 9, 12, enz.

Eindelijk merken wij op, dat x en y, als de cijfers van een getal voorstellende, niet grooter dan 9 mogen zijn, en hieruit volgt, dat 3 de eenigste waarde is, die wij voor x kunnen aannemen, omdat $x = 6$ reeds $y = 12$ zou maken. Wij hebben dus $x = 3$ en $y = 6$, waaruit volgt, dat bij het trouwen de man 18

en

en de vrouw 36 jaren oud was; dat zij op het tegenwoordige oogenblik 27 jaren zijn getrouwd geweest, en dat thans de man 45 en de vrouw 63 jaren bereikt heeft.

Aanmerking. Bij het derde tijdperk was de man 54 en de vrouw 72 jaar, en bij het vierde is de man 63 en de vrouw 81 jaar. Deze getallen aan de opgaaf van het vraagstuk toetsende, zal men niet alleen zien, dat zij aan alle voorwaarden voldoen, maar bovendien nog bevinden, dat de ouderdom van den man in het derde tijdperk het omgekeerde is van zijnen ouderdom in het tweede tijdperk, en dat de tijd, welke er sedert het aangaan van het huwelijk tot het tweede tijdperk verloopen is, het omgekeerde is van den ouderdom der vrouw in het derde tijdperk. Deze omstandigheden konden echter niet als voorwaarden worden opgegeven, daar de overige tot het bepalen der onbekenden genoegzaam waren.

CLXIX. VOORSTEL.

Door G. Brandsteder.

Van eenen regthoekigen driehoek is de som der zijden 36, *en deszelfs inhoud, gevoegd bij het vierkant der grondlijn,* 198, *vrage naar de lengte van elke zijde?*

Opgelost *door* G. Brandsteder, L. J. Ulman, J. Bassan, H. Strootman, J. Jonkeert *en* A. B. de Bock Jun.

Oplossing *van* G. Brandsteder.

Stel de basis x en de andere regthoekszijde y, dan is de schuinsche zijde $36-(x+y)$, en men heeft alzoo, naar aanleiding van het voorstel, de twee volgende vergelijkingen:

$$\sqrt{(x^2+y^2)} = 36-(x+y),$$

en

$$\tfrac{1}{2}xy + x^2 = 198.$$

De eerste vergelijking quadraterende en de gelijke termen weglatende, komt er

$$1296 - 72(x+y) + 2xy = 0,$$

of

$$xy - 36y = 36x - 648,$$

waaruit

$$y = \frac{36(x-18)}{x-36},$$

en brengende deze waarde van y over in de tweede vergelijking, dan komt er

$$\frac{18x(x-18)}{x-36} + x^2 = 198,$$

of $\quad 18x(x-18) + (x^2-198)(x-36) = 0;$

ontwikkelende dan deze vergelijking en rangschikkende dezelve naar de magten van x, zoo komt er

$$x^3 - 18x^2 - 522x + 198 \times 36 = 0,$$

of stellende $x = 3u$,

$$u^3 - 6u^2 - 58u + 264 = 0.$$

Door de leerwijze voor de meetbare wortels vindt men uit deze vergelijking

$$u = 4;$$

deelende dus door $u-4$, dan komt er, ter bepaling van de twee overige wortels,

$$u^2 - 2u - 66 = 0,$$

waaruit $\quad u = 1 \pm \sqrt{67};$

daar eindelijk $x = 3u$ is, zoo vinden wij voor x de 3 volgende waarden

$$x = 12, \quad x = 3 + 3\sqrt{67}, \quad x = 3 - 3\sqrt{67}.$$

De eerste dezer waarden geeft voor de zijden $x = 12$, $y = 9$ en $\sqrt{(x^2+y^2)} = 15$.

Neemt men $x = 3 + 3\sqrt{67}$, dan vindt men $y = -4(2+\sqrt{67})$ en $\sqrt{(x^2+y^2)} = 41 + \sqrt{67}$. Deze driehoek voldoet dus niet in den eigenlijken zin aan de opgaaf, daar hier de som van twee der zijden verminderd met de derde gelijk 36 wordt, en zoo is het ook met de derde gelegen, bij welke x negatief en y positief is.

CLXX. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

De drie zijden van eenen driehoek a, b en c stellende, vraagt men de stukken te berekenen, waarin de loodlijnen, die uit de hoekpunten op de overstaande zijden vallen, elkander verdeelen, benevens den inhoud der zes driehoeken, waarin de gegeven driehoek door de loodlijn verdeeld wordt?

OPGELOST *door* I. R. SCHMIDT, L. J. ULMAN, A. B. DE BOCK JUN., J. JONKHERT *en* J. BASSAN.

OPLOSSING *van* I. R. SCHMIDT.

§. 1. Stellen wij, *Fig.* 117, BC $= a$, AC $= b$ en AB $= c$, dan

dan heeft men terstond door de bekende eigenschap der segmenten

$$AC' = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}, \qquad BC' = \frac{a^2+c^2-b^2}{2c},$$

$$BA' = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}, \qquad CA' = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a},$$

$$CB' = \frac{b^2+a^2-c^2}{2b}, \qquad AB' = \frac{b^2+c^2-a^2}{2b},$$

waaruit men terstond trekt

$$AC' \times BA' \times CB' = BC' \times CA' \times AB' = \frac{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}{8abc}.$$

De gelijkheid dezer producten hangt echter niet af van de loodregtheid der lijnen AA′, BB′ en CC′; want dezelfde gelijkheid blijft plaats grijpen, zoo lang de lijnen AA′, BB′ en CC′ door een zelfde punt D binnen of buiten den driehoek getrokken worden (*).

§ 2. Wij zullen kortheidshalve stellen

$$(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)(-a^2+b^2+c^2) = N,$$

of $-a^6-b^6-c^6+a^4b^2+a^4c^2+b^4a^2+b^4c^2+c^4a^2+c^4b^2 = N.$

Verder zullen wij nog stellen

$$\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2) = S$$

dus $\quad \tfrac{1}{2}(a^2+b^2-c^2) = S-c^2,$

$\quad \tfrac{1}{2}(a^2-b^2+c^2) = S-b^2,$

en $\quad \tfrac{1}{2}(-a^2+b^2+c^2) = S-a^2,$

en hierdoor wordt dan

$$N = 8(S-a^2)(S-b^2)(S-c^2),$$

zoodat de gelijke producten van § 1. nu zijn

$$AC' \times BA' \times CB' = BC' \times CA' \times AB' = \frac{(S-a^2)(S-b^2)(S-c^2)}{abc}.$$

§ 3. Ter berekening van de loodlijnen hebben wij

$$CC' = \sqrt{(BC^2 - BC'^2)} = \sqrt{\left\{a^2 - \frac{(a^2+c^2-b^2)^2}{4c^2}\right\}}$$

=

(*) Men vindt het bewijs van deze stelling bij J. DE GELDER, Handl. tot de besch. en werkd. Meetk.

$$=\frac{\sqrt{\{4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2\}}}{2c}=\frac{\sqrt{\{(a+c)^2-b^2\}\{b^2-(a-c)^2\}}}{2c}$$

$$=\frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}{2c}.$$

Stellen wij nu kortheidshalve

$$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)=M,$$

of $-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2=M;$

en $\frac{1}{2}(a+b+c)=s,$

waaruit $\frac{1}{2}(a+b-c)=s-c,$

$\frac{1}{2}(a-b+c)=s-b,$

en $\frac{1}{2}(-a+b+c)=s-a,$

dan is $M=16s(s-a)(s-b)(s-c),$

waaruit dan voor de drie loodlijnen volgt

$$CC'=\frac{\sqrt{M}}{2c}=\frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c},$$

$$BB'=\frac{\sqrt{M}}{2b}=\frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{b},$$

$$AA'=\frac{\sqrt{M}}{2a}=\frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}.$$

§ 4. Daar de inhoud van den driehoek ABC is, $CC'\times\frac{1}{2}AB$, zoo komen wij hierdoor neder op de bekende formule

$$I=\tfrac{1}{4}\sqrt{M}=\tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$
$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

§ 5. Om de ftukken DA′, DB′ en DC′ te berekenen, hebben wij uit de gelijkvormige driehoeken AA′B, AC′D

$$AA' : A'B=AC' : DC',$$

of $$\frac{\sqrt{M}}{2a} : \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c} : DC',$$

dus $$DC'=\frac{(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}{2c\sqrt{M}}\ (*).$$

Wij hebben alzoo, door de formulen in § 2,

DC′ =

(*) Berekent men DC′ uit de gelijkvormige driehoeken BB′A en BC′D, dan vindt men denzelfden uitkomst, en hieruit blijkt, dat de drie loodlijnen elkander werkelijk in een zelfde punt D fnijden.

$$DC' = \frac{(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}{2c\sqrt{M}} = \frac{2(S-b^2)(S-a^2)}{c\sqrt{M}},$$

$$DB' = \frac{(b^2+a^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)}{2b\sqrt{M}} = \frac{2(S-c^2)(S-a^2)}{b\sqrt{M}},$$

$$DA' = \frac{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)}{2a\sqrt{M}} = \frac{2(S-c^2)(S-b^2)}{a\sqrt{M}}.$$

§ 6. Vermenigvuldigen wij de uitkomsten van de voorgaande § achtervolgens met $\frac{1}{2}c$, $\frac{1}{2}b$ en $\frac{1}{2}a$, dan verkrijgen wij voor den inhoud der driehoeken ADB, ADC en BDC.

$$\textit{drieh.}\,ADB = \frac{(S-b^2)(S-a^2)}{\sqrt{M}} = \frac{N}{8\sqrt{M}} \times \frac{1}{S-c^2},$$

$$\textit{drieh.}\,ADC = \frac{(S-a^2)(S-c^2)}{\sqrt{M}} = \frac{N}{8\sqrt{M}} \times \frac{1}{S-b^2},$$

$$\textit{drieh.}\,BDC = \frac{(S-b^2)(S-c^2)}{\sqrt{M}} = \frac{N}{8\sqrt{M}} \times \frac{1}{S-a^2}.$$

De ſom dezer drie driehoeken moet noodzakelijk gelijk den geheelen driehoek zijn. Onderzoeken wij dan, of onze formulen aan deze voorwaarde voldoen. Derzelver ſom geeft ons

$$I = \frac{(S-b^2)(S-a^2)+(S-a^2)(S-c^2)+(S-c^2)(S-b^2)}{\sqrt{M}}$$

$$= \frac{3S^2-2(a^2+b^2+c^2)S+a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{\sqrt{M}},$$

of, omdat $a^2+b^2+c^2=2S$ is,

$$I = \frac{-S^2+a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{\sqrt{M}} = \frac{-(a^2+b^2+c^2)^2+4(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}{4\sqrt{M}}$$

$$= \frac{-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2}{4\sqrt{M}} = \frac{M}{4\sqrt{M}} = \frac{1}{4}\sqrt{M},$$

even zoo als in § 4. gevonden is.

§ 7. Door middel van DC′ met $\frac{1}{2}$AC′ of $\frac{1}{2}$BC′ te vermenigvuldigen, en zoo met de overige, vinden wij uit § 5 en § 1,

$$\textit{drieh.}\,ADC' = \frac{(S-b^2)(S-a^2)^2}{c^2\sqrt{M}},\quad \textit{drieh}\,BDC' = \frac{(S-a^2)(S-b^2)^2}{c^2\sqrt{M}},$$

$$\textit{drieh.}\,BDA' = \frac{(S-c^2)(S-b^2)^2}{a^2\sqrt{M}},\quad \textit{drieh.}\,CDA' = \frac{(S-b^2)(S-c^2)^2}{a^2\sqrt{M}},$$

$$\textit{drieh.}\,CDB' = \frac{(S-a^2)(S-c^2)^2}{b^2\sqrt{M}},\quad \textit{drieh.}\,ADB' = \frac{(S-c^2)(S-a^2)^2}{b^2\sqrt{M}},$$

en

en tellende deze twee aan twee bij elkander, dan verkrijgen wij dezelfde formule van de voorgaande §.

§ 8. De formulen van de voorgaande § geven ons nog

$$drieh.\,ADC' \times drieh.\,BDA' \times drieh.\,CDB' =$$

$$drieh.\,BDC' \times drieh.\,CDA' \times drieh.\,ADB' = \frac{N^3}{512\,a^2b^2c^2\,M^{\frac{3}{2}}}.$$

§ 9. Ten einde de stukken AD, BD en CD te berekenen, kunnen wij de formulen, in § 5 gevonden, van de loodlijnen aftrekken, waarvoor wij de formulen in § 3 hebben opgegeven. Zulks geeft ons

$$CD = CC' - DC' = \frac{\sqrt{M}}{2c} - \frac{2(S-b^2)(S-a^2)}{c\sqrt{M}}$$

$$= \frac{M - 4(S-b^2)(S-a^2)}{2c\sqrt{M}}.$$

Nu is $4(S-b^2)(S-a^2) = (c^2+a^2-b^2)(c^2-a^2+b^2)$

$$= c^4 - a^4 - b^4 + 2a^2b^2,$$

en $M = -(a^4+b^4+c^4) + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2,$

dus $M - 4(S-b^2)(S-a^2) = 2c^2(a^2+b^2-c^2) = 4c^2(S-c^2),$

waaruit dan volgt, dat wij hebben

$$CD = \frac{c(a^2+b^2-c^2)}{\sqrt{M}} = \frac{2c(S-c^2)}{\sqrt{M}},$$

$$BD = \frac{b(a^2+c^2-b^2)}{\sqrt{M}} = \frac{2b(S-b^2)}{\sqrt{M}},$$

$$AD = \frac{a(b^2+c^2-a^2)}{\sqrt{M}} = \frac{2a(S-a^2)}{\sqrt{M}}.$$

Wij kunnen echter deze uitdrukkingen nog gemakkelijker door de gelijkvormige driehoeken vinden, die in de figuur voorkomen; want wij hebben uit CDA′ en CC′B terstond

$$CC' : BC = CA' : CD,$$

of $$\frac{\sqrt{M}}{2c} : a = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a} : CD,$$

waaruit voor CD dezelfde waarde als boven gevonden wordt.

§ 10. Nemen wij het product der formulen van § 5, dan verkrijgen wij

$$DA' \times DB' \times DC' = \frac{8(S-a^2)^2(S-b^2)^2(S-c^2)^2}{abc\,M\sqrt{M}} = \frac{N^2}{8abc\,M^{\frac{3}{2}}}.$$

Ter-

Terwijl het product der formulen van § 9 ons geeft

$$DA \times DB \times DC = \frac{8abc(S-a^2)(S-b^2)(S-c^2)}{M\sqrt{M}} = \frac{abcN}{M^{\frac{3}{2}}},$$

waaruit nog volgt

$$\frac{DA' \times DB' \times DC'}{DA \times DB \times DC} = \frac{N}{8a^2b^2c^2}.$$

§ 11. Nemen wij in aanmerking, dat

$$AA' \times BB' \times CC' = \frac{M^{\frac{3}{2}}}{8abc}$$

is, dan geven ons de formulen van de voorgaande § nog

$$DA' \times AA' \times DB' \times BB' \times DC' \times CC' = \frac{N^2}{64a^4b^2c^2} \quad . \quad . \quad (\alpha),$$

$$DA \times AA' \times DB \times BB' \times DC \times CC' = \tfrac{1}{8}N \quad . \quad . \quad . \quad (\beta).$$

Deze twee laatste formulen kunnen echter nog op eene andere wijze verkregen worden; want door vermenigvuldiging der vroeger gevondene waarden hebben wij klaarblijkelijk

$$DA' \times AA' = \frac{(S-c^2)(S-b^2)}{a^2},$$

$$DB' \times BB' = \frac{(S-c^2)(S-a^2)}{b^2},$$

$$DC' \times CC' = \frac{(S-a^2)(S-b^2)}{c^2},$$

van welke het product overeenkomt met de vergelijking (α).

Eveneens vinden wij door vermenigvuldiging van de waarden in § 9 en § 3 gevonden,

$$DA \times AA' = S - a^2 = \tfrac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2),$$

$$DB \times BB' = S - b^2 = \tfrac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2),$$

$$DC \times CC' = S - c^2 = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2),$$

welke formulen, vermenigvuldigd zijnde, niet alleen de vergelijking (β) voortbrengen, maar bovendien alle opmerking verdienen, daar zij ons de volgende eigenschap der driehoeken leeren kennen.

In elken driehoek is de dubbele regthoek van de loodlijn, die uit een der hoekpunten op de overstaande zijde valt, met het stuk van deze loodlijn, begrepen tusschen het hoekpunt en het punt, waar de drie loodlijnen elkander snijden, gelijk aan de som der vierkan-

ten van de zijden, waar tusschen deze loodlijn valt, verminderd met het vierkant van de derde zijde.

§ 12. Nemen wij verder in aanmerking, dat men heeft

$$Cos. A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{S - a^2}{bc},$$

$$Cos. B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{S - b^2}{ac},$$

$$Cos. C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{S - c^2}{ab},$$

dan volgt uit de voorgaande § nog

$$DA \times AA' = bc\,Cos.\,A,$$

$$DB \times BB' = ab\,Cos.\,B,$$

$$DC \times CC' = ab\,Cos.\,C.$$

De regthoek onder elke loodlijn en het stuk van dezelve, begrepen tusschen het hoekpunt en het snijpunt der loodlijnen, is dus gelijk aan het product der twee zijden, waar tusschen de loodlijn valt, vermenigvuldigd met den cosinus van den ingesloten hoek.

Wij merken nog op, dat, door deze invoering van de cosinussen der hoeken, de laatste vergelijking van § 10 overgaat in

$$\frac{DA' \times DB' \times DC'}{DA \times DB \times DC} = Cos.\,A\;Cos.\,B\;Cos.\,C.$$

§ 13. Vermenigvuldigen wij eindelijk de uitdrukkingen van § 5 met die van § 9, dan verkrijgen wij nog

$$DC \times DC' = DB \times DB' = DA \times DA' = \frac{N}{2M} = \frac{N}{32 I^2},$$

en men kan zich van de gelijkheid dezer producten ook overtuigen, door op te merken, dat de punten A′ en C′, uit hoofde van de loodregtheid der lijn AA′ en CC′ in den halven cirkel liggen op AC beschreven; want dan blijkt de gelijkheid dezer producten uit de bekende eigenschap der elkander snijdende koorden.

CLXXI. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Wanneer de voetpunten der loodlijnen, die uit de hoekpunten van eenen driehoek op de overstaande zijden vallen, door regte lijnen vereenigd worden, dan zijn deze lijnen gelijk aan de zijden van

den

den driehoek, elk vermenigvuldigd met den cosinus van den overstaanden hoek. Men vraagt dit te bewijzen.

OPGELOST *door* I. R. SCHMIDT, L. J. ULMAN, J. BASSAN, A. B. DE BOCK JUN. *en* J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* I. R. SCHMIDT.

§ 1. Omdat, alles zoo als in het voorgaande vraagstuk stellende, uit de driehoeken CAA' en CBB', *Fig.* 118, volgt

$$CA' = b\,Cos.\,C \quad \text{en} \quad CB' = a\,Cos.\,C,$$

zoo is $CA' : CB' = b : a = CA : CB$,

waaruit volgt, dat de driehoeken CA'B' en CAB, als tusschen de evenredige zijden denzelfden hoek bevattende, gelijkvormig zijn.

Daar dan $CA' = b\,Cos.\,C$ en $CB' = a\,Cos.\,C$ is, zoo hebben wij ook $A'B' = c\,Cos.\,C$.

Op dezelfde wijze blijkt dan ook, dat de driehoeken A'BC' en AB'C' gelijkvormig zijn met den geheelen driehoek ABC, en dat men heeft $A'C' = b\,Cos.\,B$ en $B'C' = a\,Cos.\,A$, waardoor de stelling reeds bewezen is.

§ 2. Stellen wij in plaats van *Cos.* A, *Cos.* B en *Cos.* C derzelver waarden, dan vinden wij voor de zijden A'B', A'C' en B'C', uitgedrukt in de zijden van den oorspronkelijken driehoek

$$A'B' = c\,Cos.\,C = \frac{c(a^2+b^2-c^2)}{2ab} = \frac{c^2(S-c^2)}{abc},$$

$$B'C' = a\,Cos.\,A = \frac{a(b^2+c^2-a^2)}{2bc} = \frac{a^2(S-a^2)}{abc},$$

$$A'C' = b\,Cos\,B = \frac{b(a^2+c^2-b^2)}{2ac} = \frac{b^2(S-b^2)}{abc}. \text{ enz.}$$

§ 3. Vermenigvuldigen wij deze uitdrukkingen met elkander, dan komt er

$$A'B' \times B'C' \times A'C' = \frac{(S-a^2)(S-b^2)(S-c^2)}{abc},$$

en vergelijkende dit met het bewezene in § 2 van het voorgaande vraagstuk, dan ziet men, dat men in elken driehoek zal hebben

$$A'B' \times B'C' \times A'C' = AC' \times BA' \times CB' = BC' \times CA' \times AB'.$$

§ 4. Tellen wij de formulen van § 2 bij elkander, dan vinden wij voor den omtrek van driehoek A'B'C'

$$A'C' + B'C' + A'B' = a\,Cos.\,A + b\,Cos.\,B + c\,Cos.\,C,$$

 of

of $A'C' + B'C' + A'B' = \frac{a^2(S - a^2) + b^2(S - b^2) + c^2(S - c^2)}{abc}$.

Deze formule kan echter nog onder eene andere merkwaardige gedaante worden gebragt; want wij kunnen den teller aldus schrijven

$$(a^2+b^2+c^2)S - (a^4+b^4+c^4) = \tfrac{1}{2}\{(a^2+b^2+c^2)^2 - 2(a^4+b^4+c^4)\}$$
$$= \tfrac{1}{2}(-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2).$$

Ingevolge van § 3 des voorgaanden vraagstuks is dus deze teller gelijk $\tfrac{1}{2}M$, en wij hebben dus

$$a^2(S - a^2) + b^2(S - b^2) + c^2(S - c^2) = \tfrac{1}{2}M \quad . \quad (\delta),$$

waaruit volgt

$$A'C' + B'C' + A'B' = \frac{M}{2abc} = \frac{8I^2}{abc},$$

of $A'C' + B'C' + A'B' = \frac{8s(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$.

CLXXII. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Het snijpunt der loodlijnen, die uit de hoekpunten van eenen driehoek op de overstaande zijden vallen, is het middelpunt des ingeschreven' cirkels van den driehoek, welken men verkrijgt, door de voetpunten van deze loodlijnen te vereenigen. Men vraagt naar het betoog?

OPGELOST *door* I. R. SCHMIDT, L. J. ULMAN, A. B. DE BOCK JUN., J. BASSAN *en* J. JONKHEERT.

OPLOSSING *van* I. R. SCHMIDT.

§ 1. De stelling in de opgaaf begrepen kan op verschillende wijzen bewezen worden; want dezelve zal vooreerst betoogd zijn, wanneer wij kunnen aantoonen, dat de loodlijnen AA′, BB′ en CC′, *Fig.* 118, de hoeken A′, B′ en C′ van driehoek A′B′C′ midden door deelen, of wel wanneer men kan aanwijzen, dat deze loodlijnen de overstaande zijden van driehoek A′B′C′ in stukken verdeelen, die evenredig met de aanliggende zijden zijn.

§ 2. Het eerste wordt gemakkelijk uit het bewezene in het voorgaande vraagstuk afgeleid. Wij hebben aldaar namelijk aangetoond, dat de driehoeken AB′C′, BA′C′ en CA′B′, met elkander en met den geheelen driehoek ABC gelijkvormig zijn;

daar

daar dan in onze driehoeken de gelijke hoeken over de evenredige zijden staan, zoo is $\angle CB'A' = \angle AB'C' = \angle ABC$; maar BB' loodregt op AC zijnde, zoo is $\angle CB'B = \angle AB'B$, en hiervan de voorgaande gelijke hoeken aftrekkende, blijft er $\angle A'B'B'' = \angle C'B'B''$, en dus deelt B'B den hoek A'B'C' midden door. Daar verder op dezelfde wijze blijkt, dat A'A en C'C de hoeken B'A'C' en B'C'A' midden door deelen, zoo is D werkelijk het middelpunt van den cirkel, die in driehoek A'B'C' beschreven kan worden.

§ 3. Wij zullen nu overgaan, om, onafhankelijk van het voorgaande bewijs, de stukken B'C'', A'C'', *enz.* waarin de loodlijnen AA', BB' en CC' de zijden van driehoek A'B'C' verdeelen, in de zijden a, b en c van den oorspronkelijken driehoek uit te drukken; hetgeen ons een ander bewijs voor dezelfde stelling zal verschaffen.

De driehoeken DBA' en DBC', dezelfde bazis DB hebbende, staan tot elkander als derzelver hoogten, dat is, als de loodlijnen, die uit A' en C' op DB kunnen worden nedergelaten; maar deze loodlijnen staan klaarblijkelijk tot elkander in reden, als de deelen A'B'' en C'B'' van de lijn A'C', en wij hebben dus

$$A'B'' : C'B'' = \textit{drieh.}\ DBA' : \textit{drieh.}\ DBC',$$

en daar wij voor de inhouden dezer driehoeken in Voorstel 170, § 7, gevonden hebben

$$\frac{(S-c^2)(S-b^2)^2}{a^2\sqrt{M}} \quad \text{en} \quad \frac{(S-a^2)(S-b^2)^2}{c^2\sqrt{M}},$$

zoo verkrijgen wij hierdoor

$$A'B'' : C'B'' = c^2(S-c^2) : a^2(S-a^2);$$

terwijl men volkomen op dezelfde wijze vindt

$$B'C'' : A'C'' = a^2(S-a^2) : b^2(S-b^2),$$

en $$C'A'' : B'A'' = b^2(S-b^2) : c^2(S-c^2).$$

Vergelijkt men nu deze evenredigheden met de formulen, die wij in § 2 van het voorgaande vraagstuk voor A'B', B'C' en A'C' vonden, dan komt er

$$A'B'' : C'B'' = A'B' : C'B',$$
$$B'C'' : A'C'' = B'C' : A'C',$$
$$C'A'' : B'A'' = C'A' : B'A',$$

waaruit volgt, dat AA', BB' en CC' de hoeken van driehoek

hoek $A'B'C'$ midden door deelen, en dat alzoo D het middelpunt des ingeschreven' cirkels van driehoek $A'B'C'$ is.

§ 4. De waarden van $A'B''$, $C'B''$, *enz.* kunnen nu gemakkelijk in a, b en c gevonden worden, want men heeft, door de voorgaande §, en het voorgaande voorstel

$$A'B'' : C'B'' = c^2(S-c^2) : a^2(S-a^2),$$

en

$$A'B''+C'B'' = b\,Cos.\,B = \frac{b(S-b^2)}{ac},$$

en zoo voor de overige; waaruit gemakkelijk gevonden wordt

$$A'B'' = \frac{bc(S-b^2)(S-c^2)}{a\{c^2(S-c^2)+a^2(S-a^2)\}},$$

$$C'B'' = \frac{ba(S-b^2)(S-a^2)}{c\{c^2(S-c^2)+a^2(S-a^2)\}},$$

$$B'C'' = \frac{ca(S-c^2)(S-a^2)}{b\{b^2(S-b^2)+a^2(S-a^2)\}},$$

$$A'C'' = \frac{cb(S-c^2)(S-b^2)}{a\{b^2(S-b^2)+a^2(S-a^2)\}},$$

$$C'A'' = \frac{ab(S-a^2)(S-b^2)}{c\{c^2(S-c^2)+b^2(S-b^2)\}},$$

$$B'A'' = \frac{ac(S-a^2)(S-c^2)}{b\{c^2(S-c^2)+b^2(S-b^2)\}}.$$

CLXXIII. VOORSTEL

Door I. R. SCHMIDT.

De lijnen, welke de voetpunten der loodlijnen vereenigen, die uit de hoekpunten op de overstaande zijden van eenen driehoek vallen, verdeelen dezen driehoek in vier andere driehoeken, van welke men den inhoud en de hoeken vraagt, indien de inhoud van den oorspronkelijken driehoek benevens deszelfs hoeken gegeven zijn.

OPGELOST door I. R. SCHMIDT, L. J. ULMAN, A. B. DE BOCK JUN., J. BASSAN en J. JONKHERT.

OPLOSSING van I. R. SCHMIDT.

§ 1. Vermits wij in Voorstel 171 reeds bewezen hebben, dat de driehoeken $A'CB'$, $B'AC'$ en $C'BA'$, *Fig.* 118, gelijkvormig zijn met den oorspronkelijken driehoek ABC, zoo zijn zij ook met denzelve gelijkhoekig, zoodat wij alleen de inhouden

van

van deze driehoeken behoeven te bepalen, hetgeen na het vroeger bewezene zeer gemakkelijk is; want daar gelijkvormige driehoeken tot elkander in reden zijn als de vierkanten van de evengens geplaatste zijden, zoo hebben wij, het bewezene in Voorstel 171 in aanmerking nemende,

$$\text{drieh. } ABC : \text{drieh. } A'CB' = c^2 : c^2 \, Cos^2. C = 1 : Cos^2. C,$$

en zoo voor de overige driehoeken, zoodat wij voor den inhoud dezer driehoeken verkrijgen

$$\triangle A'CB' = I \times Cos^2.C; \; \triangle B'AC' = I \times Cos^2.A; \; \triangle C'BA' = I \times Cos^2.B,$$

waardoor aan het eerste gedeelte van het vraagstuk voldaan is.

§ 2. Wil men den inhoud dezer driehoeken in de zijden a, b en c van den oorspronkelijken driehoek uitdrukken, dan zal men alleen voor I, $Cos^2. A$, $Cos^2. B$ en $Cos^2. C$ derzelver waarden moeten schrijven, en men zal vinden

$$\text{drieh. } A'CB' = \frac{(S - c^2)^2 \sqrt{M}}{4a^2 b^2} = c^2 (S - c^2)^2 \times \frac{\sqrt{M}}{4a^2 b^2 c^2},$$

$$\text{drieh. } A'BC' = \frac{(S - b^2)^2 \sqrt{M}}{4a^2 c^2} = b^2 (S - b^2)^2 \times \frac{\sqrt{M}}{4a^2 b^2 c^2},$$

$$\text{drieh. } B'AC' = \frac{(S - a^2)^2 \sqrt{M}}{4b^2 c^2} = a^2 (S - c^2)^2 \times \frac{\sqrt{M}}{4a^2 b^2 c^2}.$$

§ 3. Uit deze uitdrukkingen volgt nog

$$\triangle A'CB' : \triangle A'BC' : \triangle B'AC' = c^2(S-c^2)^2 : b^2(S-b^2)^2 : a^2(S-a^2)^2,$$

en daar uit Voorstel 170, § 9, volgt

$$CD : BD : AD = c(S - c^2) : b(S - b^2) : a(S - a^2),$$

zoo blijkt hieruit, dat men heeft

$$\triangle A'CB' : \triangle A'BC' : \triangle B'AC' = CD^2 : BD^2 : AD^2.$$

§ 4. Gaan wij nu over, om de hoeken en den inhoud van driehoek A'B'C' te vinden; en tevens de aanmerkingen en gevolgen op te teekenen, welke hieruit mogten voortspruiten.

Omdat, ingevolge het bewezene in Voorstel 172, de hoeken CB'A' en AB'C' beide gelijk den hoek ABC zijn, en zoo ook met de overige hoeken, hebben wij klaarblijkelijk

$$\angle A'B'C' = 180° - 2B, \; \angle B'C'A' = 180° - 2C, \; \angle C'A'B' = 180° - 2A,$$

waardoor dan de hoeken reeds in die van den oorspronkelijken driehoek zijn uitgedrukt.

De lijnen BB', CC' en AA' deze hoeken midden door deelende, zoo zijn deze halve hoeken achtervolgens

$$A'B'D = C'B'D = 90° - B,$$
$$B'C'D = A'C'D = 90° - C,$$
$$C'A'D = B'A'D = 90° - A.$$

§ 5. Hierdoor wordt ook gemakkelijk de ftraal van den ingefchreven' cirkel des driehoeks $A'B'C'$ gevonden; want, daar D het middelpunt van dezen cirkel is, zoo is deze ftraal

$$r = DB' \times Sin.\, C'B'D = DB' \times Cos.\, B;$$

maar in Voorftel 170 is gevonden

$$DB' = \frac{2(S-c^2)(S-a^2)}{b\sqrt{M}},$$

en bovendien is $Cos.\, B = \frac{S-b^2}{ac}$, en wij hebben dus

$$r = \frac{2(S-a^2)(S-b^2)(S-c^2)}{abc\sqrt{M}} = \frac{N}{4abc\sqrt{M}},$$

welke formule wij ook nog aldus kunnen fchrijven

$$r = \frac{2abc}{\sqrt{M}} Cos.\, A\, Cos.\, B\, Cos\, C.$$

§ 6. Vermenigvuldigen wij de helft van dezen ftraal achtervolgens met $A'B'$, $B'C'$ en $C'A'$, dat is met $c\, Cos\, C$, $a\, Cos.\, A$ en $b\, Cos.\, B$, of, wat hetzelfde is, met $\frac{c(S-c^2)}{ab}$, $\frac{a(S-a^2)}{bc}$ en $\frac{b(S-b^2)}{ac}$, dan komt er voor den inhoud van de driehoeken $A'B'D$, $B'C'D$ en $C'A'D$

$$\Delta A'B'D = \frac{(S-a^2)(S-b^2)(S-c^2)^2}{a^2b^2\sqrt{M}} = c^2(S-c^2) \times \frac{N}{8a^2b^2c^2\sqrt{M}},$$

$$\Delta B'C'D = \frac{(S-b^2)(S-c^2)(S-a^2)^2}{b^2c^2\sqrt{M}} = a^2(S-a^2) \times \frac{N}{8a^2b^2c^2\sqrt{M}},$$

$$\Delta A'C'D = \frac{(S-c^2)(S-a^2)(S-b^2)^2}{c^2a^2\sqrt{M}} = b^2(S-b^2) \times \frac{N}{8a^2b^2c^2\sqrt{M}}.$$

En men kan na het reeds verhandelde deze zelfde formulen op vele andere wijzen vinden; zoo zou men driehoek $A'B'D$ verkrijgen, door de fom der driehoeken CDA' en CDB' met den driehoek $A'B'C$ te verminderen, hetgeen echter tot lastiger herleidingen voert.

§ 7. Tellen wij de gevondene uitdrukkingen bij elkander, dan komt er voor den inhoud van driehoek $A'B'C'$

$\Delta A'$

$$\triangle A'B'C' = \frac{\{a^2(S-a^2)+b^2(S-b^2)+c^2(S-c^2)\} N}{8a^2b^2c^2\sqrt{M}},$$

maar wij hebben, VOORSTEL 171, § 4, *verg.* (δ), gevonden

$$a^2(S-a^2)+b^2(S-b)+c^2(S-c^2) = \tfrac{1}{2}M,$$

en hierdoor verkrijgen wij alzoo

$$\triangle A'B'C' = \frac{N\sqrt{M}}{16a^2b^2c^2} \quad \ldots\ldots (\alpha).$$

Verder volgt uit de waarden van *Cos.* A, *Cos.* B en *Cos.* C, dat men heeft

$$Cos.A\,Cos.B\,Cos.C = \frac{(S-a^2)(S-b^2)(S-c^2)}{a^2b^2c^2} = \frac{N}{8a^2b^2c^2},$$

en daar bovendien vroeger gevonden is

$$\triangle ABC = I = \tfrac{1}{4}\sqrt{M},$$

zoo vinden wij, door deze waarden in (α) te substitueren,

$$\triangle A'B'C' = 2\,Cos.A\,Cos.B\,Cos.C \times \triangle ABC,$$

waardoor dan aan het laatste gedeelte van de vraag voldaan is.

§ 8. De inhoud der driehoeken A′CB′, A′BC′ en B′AC′, in § 2 gevonden, kunnen ook aldus geschreven worden

drieh. A′CB′ = *Cos*². C × *drieh.* ABC,
drieh. A′BC′ = *Cos*². B × *drieh.* ABC,
drieh. B′AC′ = *Cos*². A × *drieh.* ABC,

zoodat nu de inhouden van de vier driehoeken in den inhoud en de hoeken van den oorspronkelijken driehoek zijn uitgedrukt.

§ 9. De som dezer vier driehoeken moet noodzakelijk den geheelen driehoek ABC voortbrengen. Deze optelling verrigtende, en de som gelijk driehoek ABC stellende, verkrijgen wij

$$Cos^2.A + Cos^2.B + Cos^2.C + 2\,Cos.A\,Cos.B\,Cos.C = 1,$$

welke vergelijking ook volkomen met de waarheid overeenkomstig is, en hierin derzelver grond heeft, dat A, B en C de hoeken van eenen driehoek zijnde, A+B+C = 180° is. Hieruit volgt namelijk

$$Cos.A = Cos.(180^\circ - C - B) = -Cos.(B+C)$$

en $\quad Cos.B = Cos.(180^\circ - C - A) = -Cos\,(A+C),$

dat is $\quad Cos^2 A = Sin.B\,Sin.C\,Cos.A - Cos.B\,Cos.C\,Cos.A,$

en $\quad Cos^2.B = Sin.A\,Sin.C\,Cos.B - Cos.A\,Cos.C\,Cos.B,$

waarvan de som ons geeft

$Cos^2. A + Cos^2. B + 2 Cos. A Cos. B Cos. C = Sin. C Sin. (A + B)$,

of, omdat $Sin. (A + B) = Sin. (180^0 - C) = Sin. C$ is,

$Cos^2. A + Cos^2. B + 2 Cos. A Cos. B Cos. C = Sin^2. C = 1 - Cos^2. C$,

zoodat $Cos^2. A + Cos^2. B + Cos^2. C + 2 Cos. A Cos. B Cos. C = 1$,

hetgeen dezelfde vergelijking is, waarop wij boven nederkwamen.

§ 19. Daar wij de voornaamste deelen berekend hebben, die in de figuur voorkomen, zullen wij, ten einde dit onderwerp meer volledigheid te geven, ook de stukken berekenen, waarin de loodlijnen AA′, BB′ en CC′, door de zijden A′B′, B′C′ en A′C′, verdeeld worden.

De driehoeken A′B′C en A′B′D op dezelfde bazis A′B′ staande, zijn evenredig met de loodlijnen, die uit C en D op A′B′ vallen, en dus ook met CC′ en DC′, zoodat wij hebben

$$CC' : DC' = \Delta A'B'C : \Delta A'B'D,$$

en daar wij in § 2 en § 6 gevonden hebben

$$\Delta A'B'C = \frac{(S-c^2)^2 \sqrt{M}}{4a^2b^2},$$

en $$\Delta A'B'D = (S-c^2) \times \frac{N}{8a^2b^2\sqrt{M}},$$

zoo volgt hieruit

$$CC' : DC' = (S-c^2)\sqrt{M} : \frac{N}{2\sqrt{M}},$$

of $$CC' : DC' = 2(S-c^2)M : N,$$

dat is $$CC' : DC' = M : 4(S-a^2)(S-b^2),$$

maar wij hebben bovendien in VOORSTEL 170, § 9, gevonden

$$CC' + DC' = \frac{2c(S-c^2)}{\sqrt{M}},$$

en uit deze twee vergelijkingen wordt gemakkelijk gevonden

$$CC' = \frac{M}{M+4(S-a^2)(S-b^2)} \times \frac{2c(S-c^2)}{\sqrt{M}},$$

en $$DC' = \frac{4(S-a^2)(S-b^2)}{M+4(S-a^2)(S-b^2)} \times \frac{2c(S-c^2)}{\sqrt{M}},$$

of $$CC' = \frac{2c(S-c^2)\sqrt{M}}{M+4(S-a^2)(S-b^2)} = \frac{c(S-c^2)\sqrt{M}}{2a^2(S-a^2)+2b^2(S-b^2)},$$

en $$DC' = \frac{cN}{(M+4(S-a^2)(S-b^2))\sqrt{M}} = \frac{cN}{4\{a^2(S-a^2)+b^2(S-b^2)\}\sqrt{M}},$$

en

en daar wij voor de twee overige loodlijnen op dezelfde berekeningen nederkomen, zoo verkrijgen wij de volgende formulen

$$CC' = \frac{c(S-c^2)\sqrt{M}}{2\{a^2(S-a^2)+b^2(S-b^2)\}},$$

$$BB' = \frac{b(S-b^2)\sqrt{M}}{2\{c^2(S-c^2)+a^2(S-a^2)\}},$$

$$AA' = \frac{a(S-a^2)\sqrt{M}}{2\{b^2(S-b^2)+c^2(S-c^2)\}},$$

terwijl wij voor DC', DB' en DA' zullen vinden

$$C'D = \frac{cN}{4\{a^2(S-a^2)+b^2(S-b^2)\}\sqrt{M}},$$

$$B'D = \frac{bN}{4\{c^2(S-c^2)+a^2(S-a^2)\}\sqrt{M}},$$

$$A'D = \frac{aN}{4\{b^2(S-b^2)+c^2(S-c^2)\}\sqrt{M}}.$$

§ 11. Tellen wij C'D bij C'D, en zoo met de overige, dan zullen wij de formulen voor de lijnen C'C', B'B' en A'A' verkrijgen. De laatstgevondene formulen, benevens de formulen in VOORSTEL 170, § 5, gevonden, geven ons hiertoe

$$C'C' = \frac{cN}{4\{a^2(S-a^2)+b^2(S-b^2)\}\sqrt{M}} + \frac{2(S-b^2)(S-a^2)}{c\sqrt{M}}$$

$$= \frac{c^2N+8(S-b^2)(S-a^2)\{a^2(S-a^2)+b^2(S-b^2)\}}{4c\{a^2(S-a^2)+b^2(S-b^2)\}\sqrt{M}},$$

of, wanneer wij voor N derzelver waarde schrijven,

$$C'C' = \frac{8(S-b^2)(S-a^2)\{a^2(S-a^2)+b^2(S-b^2)+c^2(S-c^2)\}}{4c\{a^2(S-a^2)+b^2(S-b^2)\}\sqrt{M}},$$

maar in VOORSTEL 171, § 4, *Form.* (*b*) is gevonden

$$a^2(S-a\ )+b^2(S-b^2)+c^2(S-c^2)=\frac{1}{2}M,$$

en wij verkrijgen alzoo

$$C'C' = \frac{(S-b^2)(S-a^2)\sqrt{M}}{c\{a^2(S-a^2)+b^2(S-b^2)\}},$$

$$B'B' = \frac{(S-a^2)(S-c^2)\sqrt{M}}{b\{c^2(S-c^2)+a^2(S-a^2)\}},$$

A'

$$A'A'' = \frac{(S-c^2)(S-b^2)\sqrt{M}}{a\{b^2(S-b^2)+c^2(S-c^2)\}}.$$

§ 12. Wij eindigen deze oplossing met nog op te geven, onder welke hoeken de loodlijnen AA′, BB′ en CC′ van den oorspronkelijken driehoek, de zijden van den driehoek A′B′C′ doorsnijden.

De hoek CDA′, het complement van DCA′ zijnde, is gelijk B; maar wij vonden in § 4, dat hoek B′A′A het complement van den hoek A is. Daar nu $\angle CC''A' = CDA' + \angle B'A'A$ is, zoo hebben wij, op dezelfde wijze voor de overige hoeken redenerende,

$$\angle CC''A' = 90^\circ + (B - A),$$
$$\angle CC''B' = 90^\circ - (B - A),$$
$$\angle AA''B' = 90^\circ + (C - B),$$
$$\angle AA''C' = 90^\circ - (C - B),$$
$$\angle BB''C' = 90^\circ + (A - C),$$
$$\angle BB''A' = 90^\circ - (A - C),$$

en niets zou gemakkelijker zijn, dan hierbij nog verscheidene andere formulen te voegen, bij voorbeeld die voor den driehoek CB′C″, CA′C″, *enz.* hetgeen echter zoo gemakkelijk uit het voorgaande te vinden is, dat wij er ons niet bij ophouden.

CLXXIV. VOORSTEL.

Door S. KLYNSMA.

Wanneer men door de voetpunten der loodlijnen, die uit de hoekpunten eens driehoeks op de overstaande zijden van denzelven vallen, eenen cirkel laat gaan, zal de straal van dezen cirkel de helft des straals zijn van den cirkel, die om den oorspronkelijken driehoek kan worden beschreven. Men vraagt dit te bewijzen?

OPGELOST *door* I. R. SCHMIDT, L. J. ULMAN, J. BASSAN *en* A. B. DE BOCK JUN.

§ 1. Het is genoegzaam bekend, dat de straal des omgeschreven' cirkels van eenen driehoek gelijk is aan het product der zijden, gedeeld door viermaal den inhoud (LACROIX, *Beg. der Trigon. Nederd. uitg.* 2e druk, § 46); stellende dus den straal des omgeschreven' cirkels van driehoek ABC, *Fig.* 118, gelijk R en den inhoud I, dan hebben wij

R =

$$R = \frac{abc}{4I}.$$

Stellende dus de zijden van driehoek A′B′C′ gelijk $a'b'c'$, den inhoud I′ en den straal van den omgeschreven' cirkel R′, dan is eveneens

$$R' = \frac{a'b'c'}{4I'}.$$

Nu hebben wij, VOORSTEL 171, bewezen, dat men heeft

$$a' = a\ Cos.\ A,\quad b' = b\ Cos.\ B,\quad c' = c\ Cos.\ C,$$

en wij hebben, door het voorgaande voorstel, § 7,

$$I' = 2\,I\ Cos.\ A\ Cos.\ B\ Cos.\ C,$$

substituerende dus deze waarden in R′, dan komt er

$$R' = \frac{abc}{8I} = \tfrac{1}{2} \times \frac{abc}{4I} = \tfrac{1}{2}\,R,$$

hetgeen bewezen moest worden.

§ 2. Het bewezene in de voorgaande voorstellen geeft verschillende andere betoogen voor deze stelling aan de hand. Zie hier nog eene van dezelve. De straal des omgeschreven' cirkels gelijk zijnde aan eene der zijden, gedeeld door den dubbelen sinus van den overstaanden hoek (LACROIX, *Idem*, § 39. *pag.* 40), zoo hebben wij, alles zoo als boven stellende,

$$R = \frac{a}{2\,Sin.\ A} \quad \text{en} \quad R' = \frac{a'}{2\,Sin.\ A'},$$

nu is $a' = a\ Cos.\ A$, en volgens VOORSTEL 173, § 4, is $Sin.\ A' = Sin.\ (180° - 2\ A) = Sin.\ 2\ A = 2\ Sin.\ A\ Cos.\ A$; welke waarden in R′ gesubstitueerd zijnde, geven

$$R' = \frac{a\ Cos.\ A}{4\,Sin.\ A\ Cos.\ A} = \frac{a}{4\ Sin.\ A} = \tfrac{1}{2} \times \frac{a}{2\ Sin.\ A} = \tfrac{1}{2}\,R,$$

even als boven.

§ 3. De cirkel, welke door A′, B′ en C′ gaat, heeft nog andere merkwaardige eigenschappen, welke te belangrijk zijn, om met stilzwijgen voorbij te gaan.

Uit de eigenschap der snijlijnen heeft men namelijk

$$CB' \times CB_1 = CA' \times CA_1,$$

maar $CB' = BC\ Cos.\ C$ en $CA' = AC \times Cos.\ C$ zijnde, zoo volgt hieruit

BC

$$BC \times CB_1 = AC \times CA_1,$$

of $$CB_1 : CA_1 = CA : CB,$$

waaruit volgt, dat $B_1 A_1$ evenwijdig met AB loopt.

Op dezelfde wijze blijkt dan ook, dat $A_1 C_1$ evenwijdig is mel AC, en dat $C_1 B_1$ evenwijdig is met CB.

Uit de evenwijdigheid dezer zijden volgt dan $AC_1 = B_1 A_1$ en $C_1 B = B_1 A_1$, zoodat $AC_1 = C_1 B$. Op dezelfde wijze blijkt dan ook, dat $AB_1 = B_1 C$ en $CA_1 = A_1 B$ is. *De cirkel, welke door de voetpunten der loodlijnen van eenen driehoek gaat, deelt dus de zijden van dezen driehoek midden door.*

§ 4. De eigenschap der snijlijnen geeft ons ook

$$CC_2 \times CC' = CA_1 \times CA' \quad \ldots\ldots \quad (a).$$

Nu is $CC' = CA \times Sin.\, A = b\, Sin.\, A$, verder is uit § 3, $CA_1 = \frac{1}{2}a$, eindelijk is $CA' = b\, Cos.\, C$, en deze waarden in (a) substituerende, komt er

$$CC_2 \times b\, Sin.\, A = \tfrac{1}{2} a \times b\, Cos.\, C,$$

waaruit $$CC_2 = \tfrac{1}{2} a \frac{Cos.\, C}{Sin.\, A}.$$

Nu is in driehoek CDB', de zijde

$$CD = CB' \times Sec.\, B' \; CD = CB' \times Cosec.\, A = a \frac{Cos.\, C}{Sin.\, A},$$

en hieruit volgt dus $CC_2 = \frac{1}{2} CD$.

Eveneens wordt bewezen, dat $AA_2 = \frac{1}{2} AD$ en $BB_2 = \frac{1}{2} BD$ is, en hieruit blijkt dus, *dat de cirkel, welke door de voetpunten der loodlijnen van eenen driehoek gaat, de lijnen midden door deelt, die de hoekpunten met het snijpunt der loodlijnen vereenigen.*

Hieruit volgt dan nog, *dat in elken driehoek de voetpunten der drie loodlijnen, het midden der drie zijden en het midden der drie lijnen, welke de hoekpunten met het snijpunt der loodlijnen vereenigen, in den omtrek van eenen zelfden cirkel gelegen zijn.*

§ 5. Zie hier hoe men de afstanden berekenen kan, op welke het middelpunt M van dezen cirkel, van de hoekpunten A, B en C gelegen is. Stellen wij $CM = x$, dan is uit de eigenschap der snijlijnen

$$(x - R')(x + R') = CA_1 \times CA',$$

of $$x^2 - R'^2 = \tfrac{1}{2} a b\, Cos.\, C,$$

waaruit $$x = \sqrt{(R'^2 + \tfrac{1}{2} a b\, Cos.\, C)},$$

en

en wij hebben alzoo, omdat $R' = \frac{1}{2}R$ is,

$$CM = \sqrt{(\tfrac{1}{4}R^2 + \tfrac{1}{2}ab\,Cos.\,C)},$$
$$BM = \sqrt{(\tfrac{1}{4}R^2 + \tfrac{1}{2}ac\,Cos.\,B)},$$
$$AM = \sqrt{(\tfrac{1}{4}R^2 + \tfrac{1}{2}bc\,Cos.\,A)}.$$

Schrijvende hierin voor R, *Cos.* A, *Cos.* B en *Cos.* C derzelver waarden, dan komt er nog

$$CM = \tfrac{1}{2}\sqrt{(\frac{a^2b\,c^2}{M} + a^2 + b^2 - c^2)},$$

$$BM = \tfrac{1}{2}\sqrt{(\frac{a^2b^2c^2}{M} + a^2 + c^2 - b^2)},$$

$$AM = \tfrac{1}{2}\sqrt{(\frac{a^2b^2c^2}{M} + b^2 + c^2 - a^2)}.$$

CLXXV. VOORSTEL.

Door S. KLYNSMA.

De waarden van x, y en z te vinden uit de vergelijkingen $x - y - z = a$, $xy - xz - yz = b$ *en* $x^2 + y^2 + z^2 = c$?

OPGELOST *door* S. KLYNSMA, J. BASSAN, A. B. DE BOCK JUN., L. J. ULMAN, H. STROOTMAN *en* J. JONKHEER.

OPLOSSING *van* S. KLYNSMA.

De drie vergelijkingen zijn

$$x - y - z = a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$
$$xy - xz - yz = b \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2),$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = c \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

tellende nu het dubbel van (2) bij de vergelijking (3), dan komt er

$$x^2 + 2xy + y^2 - 2(x+y)z + z^2 = 2b + c,$$

dat is $\quad (x + y - z)^2 = 2b + c,$

waaruit $\quad x + y - z = \pm\sqrt{(2b + c)};$

maar in (1) $\quad x - y - z = a,$

dus $\quad 2(x - z) = a \pm \sqrt{(2b + c)}$

en $\quad 2y = -a \pm \sqrt{(2b + c)},$

zoodat $\quad x - z = \tfrac{1}{2}a \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(2b + c)},$

en $\quad y = -\tfrac{1}{2}a \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(2b + c)}.$

Verder is uit de vergelijking (2)

$$xz = (x - z)y - b,$$

en brengende hierin de zoo even gevondene waarden van $x - z$ en y over

xz

$$xz = -\tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}(2b+c) - b,$$

dat is $$4xz = -a^2 - 4b + 2b + c.$$

Eindelijk is het vierkant van $x - z$

$$x^2 - 2xz + z^2 = \tfrac{1}{4}(a^2 + 2b + c \pm 2a\sqrt{(2b+c)}),$$

tellende dus hierbij de gevondene waarde van $4xz$, dan komt er

$$(x+z)^2 = \tfrac{1}{4}(-3a^2 - 6b + 5c \pm 2a\sqrt{(2b+c)}),$$

zoodat $$(x+z) = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\{-3a^2 - 6b + 5c \pm 2a\sqrt{(2b+c)}\}},$$

maar $$x - z = \tfrac{1}{2}a \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(2b+c)},$$

dus $$x = \tfrac{1}{4}[\{a \pm \sqrt{(2b+c)}\} \pm \sqrt{\{-3a^2 - 6b + 5c \pm 2a\sqrt{(2b+c)}\}}],$$

en $$z = \tfrac{1}{4}[-(a \pm \sqrt{(2b+c)}\} \pm \sqrt{\{-3a^2 - 6b + 5c \pm 2a\sqrt{(2b+c)}\}}].$$

Hieruit blijkt dan dat y slechts voor twee verschillende waarden vatbaar is, doch dat x en z vier verschillende waarden zullen verkrijgen, zoodat het vraagstuk in het algemeen voor vier oplossingen vatbaar is.

Laat, bij voorbeeld, gegeven zijn $a = 0$, $b = 1$ en $c = 14$, dan vindt men de volgende antwoorden

I°. . . .	$x = 3,$	$y = 2,$	$z = 1.$
II°. . . .	$x = -1,$	$y = 2,$	$z = -3.$
III°. . . .	$x = 1,$	$y = -2,$	$z = 3.$
IV°.	$x = -3,$	$y = -2,$	$z = -1.$

CLXXVI. VOORSTEL.

Door S. KLYNSMA.

Van eenen vierhoek, in eenen cirkel beschreven, zijn drie der zijden bekend; indien nu ook de straal van dezen cirkel gegeven is, vraagt men den inhoud des vierhoeks te vinden?

OPGELOST *door* A. B. DE BOCK JUN., S. KLYNSMA, J. BASSAN *en* J. JONKHEERT.

OPLOSSING *van* A. B. DE BOCK JUN.

Stelt men, *Fig.* 119, AB $= a$, BC $= b$ en CD $= c$, dan is in VOORSTEL 51 van dit deel voor den Inhoud gevonden

$$I = \tfrac{1}{2}\{ab\,Sin.B + bc\,Sin.C - ac\,Sin.(B+C)\} \quad \ldots \quad (1),$$

zoodat er nog overblijft $Sin.B$, $Sin.C$ en $Sin.(B+C)$ in a, b, c en den straal EA $= r$ uit te drukken.

Daar nu in elken driehoek de straal van den omgeschreven cirkel gelijk is aan eene der zijden naar welgevallen gedeeld door

de

de dubbele sinus van den overstaanden hoek, zoo hebben wij, in driehoek ACB,

$$r = \frac{AC}{2\,Sin.\,B} \text{ en dus } AC = 2\,r\,Sin.\,B,$$

maar wij hebben bovendien

$$AC = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,Cos.\,B)};$$

stellende de waarden van AC aan elkander gelijk, dan komt er

$$4\,r^2\,Sin^2.\,B = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,Cos.\,B,$$

of $$4\,r^2(1 - Cos^2.\,B) = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,Cos.\,B,$$

dus $$Cos^2.\,B - \frac{2\,a\,b}{4\,r^2}\,Cos.\,B = \frac{4\,r^2 - a^2 - b^2}{4\,r^2},$$

waaruit $$Cos.\,B = \frac{a\,b}{4\,r^2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2\,b^2}{16\,r^4} + \frac{4\,r^2 - a^2 - b^2}{4\,r^2}\right)},$$

dat is $$Cos.\,B = \frac{a\,b \pm \sqrt{(16\,r^4 - 4\,(a^2 + b^2)\,r^2 + a^2\,b^2)}}{4\,r^2},$$

of wel $$Cos.\,B = \frac{a\,b \pm \sqrt{(4\,r^2 - a^2)\,(4\,r^2 - b^2)}}{4\,r^2} \quad . \; . \quad (II),$$

en op dezelfde wijze wordt gevonden

$$Cos.\,C = \frac{c\,b \pm \sqrt{(4\,r^2 - c^2)\,(4\,r^2 - b^2)}}{4\,r^2} \quad . \; . \quad (III).$$

Hierdoor B en C gevonden zijnde, is ook B + C bekend, waaruit dan I door de formule (I) gevonden wordt.

Door de formulen (II) en (III) vindt men voor elk der hoeken B en C twee verschillende waarden, en daar het teeken + of — van de eene niets ten opzigte van het teeken bepaalt, dat men voor de tweede moet gebruiken, zoo kunnen er vier antwoorden op het vraagstuk zijn. De figuren 119, 119*a*, 119*b* en 119*c* doen ook duidelijk inzien, dat de vierhoek bij dezelfde gegevens vier verschillende vormen kan hebben. Bij de twee laatste gaat eigenlijk de inhoud in het verschil van twee driehoeken over.

CLXXVII. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Wanneer een willekeurig cilindervlak door platte vlakken naar welgevallen gesneden wordt, dan zullen de zwaartepunten van al de doorsnijdingsvlakken in eene regte lijn liggen, die evenwijdig met

de beschrijvende lijnen van den cilinder loopt. Men vraagt deze stelling te bewijzen?

OPGELOST *door* I. R. SCHMIDT *en* A. B. DE BOCK JUN.

OPLOSSING *van* I. R. SCHMIDT.

Zij AB, *Fig.* 120, een vlak, dat al de beschrijvende lijnen van den cilinder loodregt doorsnijdt, en A′B′ een willekeurig snijdend plat vlak, het eerste in PQ onder eenen hoek α doorsnijdende. Laten MN M′N′ en $mn\,m'n'$ twee vlakken zijn, die loodregt op AB staan en evenwijdig met PQ loopen, dan is MNmn de differentiaal van het vlak AB en M′N′$m'n'$ de differentiaal van het vlak A′B′. Laat eindelijk SQR een vlak zijn, dat loodregt op PQ staat, en stellen wij, na MN in O midden door gedeeld te hebben, QI $= x$, OI $= u$ en ON $=$ OM $= y$. Alsdan is MN$mn = 2y\delta x$, en stellende het zwaartepunt van AB in Z, dan is, volgens de regels voor het vinden van dit zwaartepunt,

$$ZK = HQ = \frac{\int y\,x\,\delta x}{\int y\,\delta x} \quad \text{en} \quad ZH = \frac{\int y\,u\,\delta x}{\int y\,\delta x}.$$

Zij QS′ de doorsnede van het vlak A′B′ met het vlak SQR, dat wij loodregt op de doorsnede PQ der vlakken AB en A′B′ gesteld hebben. Omdat nu de vlakken MN′ en mn' evenwijdig met de doorsnede PQ loopen, zoo loopen ook M′N′ en $m'n'$ evenwijdig met PQ en dus met MN en mn; zoodat MM′ $=$ NN′ $=$ II′ $= z$ stellende, QI′ $= x\,Sec.\,\alpha$ en I′i' $= \delta x\,Sec.\,\alpha$ zal zijn, waardoor M′N′$m'n' = 2\,y\delta x\,Sec.\,\alpha$. Onderstellen wij dus, dat het zwaartepunt van het vlak A′B′ in Z′ gelegen is, dan zal de ligging van dit zwaartepunt, ten opzigte der assen PQ en QS′, volgens den bekenden regel worden uitgedrukt door de formulen

$$H'Q = \frac{\int 2\,y\,\delta x\,Sec.\,\alpha \times x\,Sec.\,\alpha}{\int 2\,y\,\delta x\,Sec.\,\alpha} = Sec.\,\alpha . \frac{\int y\,x\,\delta x}{\int y\,\delta x},$$

en

$$Z'H' = \frac{\int 2\,y\,\delta x\,Sec.\,\alpha \times u}{\int 2\,y\,\delta x\,Sec.\,\alpha} = \frac{\int y\,u\,\delta x}{\int y\,\delta x}.$$

Daar nu al deze integralen tusschen dezelfde grenzen moeten worden genomen, zoo is

$$Z'H' = ZH \quad \text{en} \quad H'Q = HQ\,Sec.\,\alpha.$$

De

De eerste dezer vergelijkingen toont aan, dat de lijn ZZ′ evenwijdig met het vlak SQS′ loopt, en de tweede, dat H′H loodregt op SQ staat, en hieruit volgt dan, dat Z′Z loodregt op het vlak AB staat. De zwaartepunten van alle mogelijk snijdende vlakken A′B′ liggen dus in de lijn ZZ′, die door Z loodregt op AB gaat, en dus evenwijdig aan de beschrijvende lijnen loopt, waardoor het gezegde bewezen is.

Aanmerking. Men kan nog vragen, of deze stelling blijft doorgaan, wanneer het grondvlak eene zamengestelde figuur is, en uit verschillende stukken bestaat, voor elk van welke y en u verschillende functiën van x zijn. Laat, om dit te onderzoeken, *Fig.* 121, PQ wederom de doorsnede van een willekeurig vlak A′B′ met een vlak AB voorstellen, dan kan men het grondvlak altijd door lijnen CD, CE, EF, FG, *enz.* in zulke stukken verdeelen, dat op elk van dezelve het gegeven bewijs letterlijk kan worden toegepast. Stellen wij nu de inhouden van deze stukken g, g', g'', *enz.* en het geheele grondvlak G, dan is vooreerst

$$G = g + g' + g'' + \text{enz.},$$

verder zijn de overeenkomstige stukken van het vlak A′B′, bij deze onderstelling, $g\,Sec.\,a$, $g'\,Sec.\,a$, $g''\,Sec.\,a''$ *enz.* en dus het geheele vlak A′B′,

$$G' = (g + g' + g'' + \text{enz.})\,Sec.\,a = G\,Sec.\,a.$$

Stellende voorts de afstanden, die de zwaartepunten van deze stukken tot PQ en SQ hebben, a en b, a' en b', a'' en b'', *enz.*, en het zwaartepunt van het geheele grondvlak in Z, dan zijn de afstanden, die dit zwaartepunt van PQ en SQ heeft,

$$A = \frac{ag + a'g' + a''g'' + \text{enz.}}{g + g' + g'' + \text{enz.}} = \frac{ag + a'g' + a''g'' + \text{enz.}}{G},$$

$$\text{en } B = \frac{bg + b'g' + b''g'' + \text{enz.}}{g + g' + g'' + \text{enz.}} = \frac{bg + b'g' + b''g'' + \text{enz.}}{G}.$$

Ingevolge het boven bewezene zijn nu de afstanden, die de zwaartepunten der deelen van A′B′ tot S′Q en PQ hebben, b en $a\,Sec.\,a$, b' en $a'\,Sec.\,a$, b'' en $a''\,Sec.\,a$ *enz.* Stellende dus het zwaartepunt van A′B′ in Z′, dan zijn de afstanden Z′H′ en H′Q, op welke dit punt van S′Q en PQ staat,

$$H'Q = \frac{a\,Sec.\,\alpha\; g\,Sec.\,\alpha + a'\,Sec.\,\alpha\; g'\,Sec.\,\alpha + a''\,Sec.\,\alpha\; g''\,Sec.\,\alpha + \text{enz.}}{g\,Sec.\,\alpha + g'\,Sec.\,\alpha + g''\,Sec.\,\alpha + \text{enz.}}$$

$$= \frac{a g + a' g' + a'' g'' + \text{enz.}}{g + g' + g'' + \text{enz.}}\,Sec.\,\alpha = A\,Sec.\,\alpha,$$

$$Z'H = \frac{b g\,Sec.\,\alpha + b' g'\,Sec.\,\alpha + b'' g''\,Sec.\,\alpha + \text{enz.}}{g\,Sec.\,\alpha + g'\,Sec.\,\alpha + g''\,Sec.\,\alpha + \text{enz.}}$$

$$= \frac{b g + b' g' + b'' g'' + \text{enz.}}{g + g' + g'' + \text{enz.}} = B.$$

Hieruit volgt dan wederom, dat $H'I'$ loodregt op SQ ſtaat en evenwijdig met $Z'Z$ loopt, waaruit dan verder volgt, dat $Z'Z$ loodregt op AB ſtaat, en dus evenwijdig met de beſchrijvende lijnen van het cilindervlak loopt.

Gevolg. Hieruit volgt dan ook, dat wanneer een ligchaam, *Fig.* 122, door een willekeurig cilindervlak en twee platte vlakken $A'B'$ en $A''B''$ naar welgevallen begrensd is, de lijn $Z'Z''$, welke de zwaartepunten van het boven- en benedenvlak vereenigt, evenwijdig zal loopen met de beſchrijvende lijnen van het cilindervlak, en dat deze ſtelling even goed doorgaat, wanneer men het cilindervlak door een prismatisch vlak vervangt.

CLXXVIII. Voorstel.

Door I. R. Schmidt.

De inhoud van elk ligchaam, dat begrepen is tusſchen twee platte vlakken, en eenig gedeelte van een willekeurig cilindervlak, is gelijk de lijn, die het zwaartepunt van het boven- en benedenvlak vereenigt, vermenigvuldigd met den inhoud van het vlak, dat al de beſchrijvende lijnen loodregt doorſnijdt. Men vraagt het bewijs van deze ſtelling?

Opgelost *door* I. R. Schmidt *en* A. B. de Bock Jun.

Oplossing *van* I. R. Schmidt.

§ 1. Stellen wij alles, zoo als in het voorgaande vraagſtuk, *Fig.* 120, is aangewezen, en beroepen wij ons op hetgeen aldaar ten opzigte van deze figuur bewezen is, dan is

$$\delta I = 2 y \delta x \times z = 2 y x \delta x\, Tang.\,\alpha,$$

en dus
$$I = 2\, Tang.\,\alpha \int x y\, \delta x.$$

Laat nu Z en Z' de zwaartepunten van AB en $A'B'$ zijn, dan ſtaat, zoo als in het voorgaande vraagſtuk bewezen is, ZZ' lood-

regt

regt op AB, en dus is $ZZ' = ZK\,Tang.\,a$. Maar $ZK = \frac{\int x y \delta x}{\int y \delta x}$ zijnde, zoo is

$$ZZ' = \frac{\int x y \delta x}{\int y \delta x} \times Tang\ a.$$

Daar eindelijk het grondvlak G ſtellende, $\delta G = 2 y \delta x$ is, zoo is $G = 2 \int y \delta x$, en bij gevolg

$$G \times ZZ' = 2\,Tang.\,a \int x y \delta x,$$

en daar wij zoo even vonden

$$I = 2\,Tang.\,a \int x y \delta x,$$

zoo is
$$I = G \times ZZ'.$$

Zoodat de ſtelling bewezen is voor het geval, waarin het benedenvlak loodregt door de beſchrijvende lijnen gaat, en bovendien voor het geheele grondvlak y dezelfde functie van x blijft.

§ 2. Blijven wij nu het benedenvlak loodregt op de beſchrijvende lijnen onderſtellen; doch, *Fig.* 121, als uit verſchillende deelen beſtaand, voor elk van welke het boven bewezene doorgaat. Stellen wij de inhouden dezer ſtukken i, i', i'', *enz.*, derzelver grondvlakken g, g', g'', *enz.*, de lijnen, die de zwaartepunten der beneden- en bovenvlakken vereenigen h, h', h'', *enz.* en de afſtanden, die de zwaartepunten der deelen van het grondvlak met PQ hebben, a, a', a'', *enz.* terwijl wij deze zelfde grootheden, voor het geheele ligchaam, door I, G, H en A uitdrukken, dan is

$$I = i + i' + i'' + enz.,$$
$$G = g + g' + g'' + enz.$$

en
$$A = \frac{a g + a' g' + a'' g'' + enz.}{G}.$$

Verder is door het boven bewezene $i = g h$, $i' = g' h'$, *enz.*, dus

$$I = g h + g' h' + g'' h'' + enz.$$
$$= g\,a\,Tang.\,a + g'\,a'\,Tang.\,a + g''\,a''\,Tang.\,a + enz.,$$
$$= (g a + g' a' + g'' a'' + enz.)\,Tang.\,a,$$

dat is
$$I = A.\,G\,Tang.\,a.$$

Maar volgens het bewezene in de voorgaande formule is ook hier $Z'Z = H = A\,Tang.\,a$; en bij gevolg

$$I = H \times G.$$

De opgegevene ſtelling gaat dus voor alle cilindervormige of pris-

prismatisch gevormde figuren door, zoodra een der vlakken loodregt op de beschrijvende lijnen staat.

§ 3. Laat eindelijk $A'B'A''B''$, *Fig.* 122, een willekeurig gemaakte cilinder zijn, en AB een vlak, dat al de beschrijvende lijnen loodregt doorsnijdt, wanneer dan Z het zwaartepunt van het vlak AB is, en door Z eene lijn, evenwijdig aan de beschrijvende lijnen, getrokken wordt, dan gaat dezelve, ingevolge het voorgaande vraagstuk, ook door de zwaartepunten Z' en Z'' van het boven en benedenvlak. Of verder de vlakken $A'B'$ en $A''B''$ het vlak AB in eene zelfde lijn PQ, dan wel volgens twee verschillende lijnen snijden, zoo zijn toch de twee stukken, die boven- en beneden AB gelegen zijn, elk in het bijzonder in denzelfden toestand, waarin wij, § 1 en § 2, bewezen hebben, dat de stelling, in de opgaaf voorgedragen, met de waarheid overeenkomstig is, en wij zullen dus, het vlak $AB = G$ stellende, hebben

$$ABA'B' = G \times ZZ' \quad \text{en} \quad ABA''B'' = G \times ZZ'',$$

en deze inhouden optellende, komt er voor den geheelen inhoud

$$I = G \times Z'Z'',$$

waardoor dan de voorgedragene stelling zoo algemeen mogelijk bewezen is.

CLXXIX. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

De zijden en hoeken van eenen driehoek te vinden, wanneer gegeven is de inhoud, de bazis en de lijn, welke den tophoek midden door deelt.

OPGELOST *door* I. R. SCHMIDT, A. B. DE BOCK JUN., J. JONKHERT *en* J. BASSAN.

OPLOSSING *van* I. R. SCHMIDT.

Stellen wij, *Fig.* 123, de bazis $AB = a$, de deellijn $CD = b$ en den inhoud p^2, de gelijke deelen van den tophoek ϕ en den hoek, die de deellijn met de bazis maakt ψ, dan hebben wij $A = \psi - \phi$ en $B = 180° - (\phi + \psi)$, zoodat

$$b : BC = Sin.(\phi + \psi) : Sin.\psi,$$

$$b : BD = Sin.(\phi + \psi) : Sin.\phi,$$

$$b : AC = Sin.(\psi - \phi) : Sin.\psi,$$

$$b : AD = Sin.(\psi - \phi) : Sin.\phi,$$

waar-

waaruit wij vinden

$$BC = b \times \frac{Sin.\psi}{Sin(\psi + \phi)}, \quad AC = b \times \frac{Sin.\psi}{Sin.(\psi - \phi)},$$

$$BD = b \times \frac{Sin.\phi}{Sin.(\psi + \phi)}, \quad AD = b \times \frac{Sin.\phi}{Sin.(\psi - \phi)},$$

en daar wij moeten hebben

$$AD + BD = a \quad \text{en} \quad \tfrac{1}{2} AC \times BC \times Sin.2\phi = p^2,$$

zoo geeft ons dit de twee volgende vergelijkingen

$$\frac{Sin.\phi}{Sin.(\psi + \phi)} + \frac{Sin.\phi}{Sin.(\psi - \phi)} = \frac{a}{b} \quad \ldots \quad (1),$$

en

$$\frac{Sin^2.\psi\, Sin.2\phi}{Sin.(\psi + \phi)\, Sin.(\psi - \phi)} = \frac{2p^2}{b^2} \quad \ldots \quad (2).$$

De eerste dezer vergelijkingen geeft ons

$$\frac{Sin.\phi \{Sin(\psi - \phi) + Sin.(\psi + \phi)\}}{Sin.(\psi + \phi)\, Sin.(\psi - \phi)} = \frac{a}{b},$$

of

$$\frac{2\, Sin.\phi\, Cos.\phi\, Sin.\psi}{Sin.(\psi + \phi)\, Sin.(\psi - \phi)} = \frac{a}{b} \quad \ldots \quad (I),$$

terwijl de tweede alzoo kan worden geschreven

$$\frac{2\, Sin^2.\psi\, Sin.\phi\, Cos.\phi}{Sin.(\psi + \phi)\, Sin.(\psi - \phi)} = \frac{2p^2}{b^2} \quad \ldots \quad (II),$$

deelende dus (II) door (I) dan komt er

$$Sin.\psi = \frac{2p^2}{ab} \quad \ldots \quad (3),$$

waardoor de hoek ψ dus bekend is. (*)

De hoek ψ bekend zijnde, kan ϕ op de volgende wijze gevonden worden. Men deele (I) onder en boven door $Cos^2.\phi$, en er zal komen

$$\frac{2\, Sin.\psi\, Tang.\phi}{(Sin.\psi + Cos.\psi\, Tang.\phi)\,(Sin.\psi - Cos.\psi\, Tang.\phi)} = \frac{a}{b},$$

of

$$\frac{2\, Tang.\psi\, Tang.\phi}{(Tang.\psi + Tang.\phi)\,(Tang.\psi - Tang.\phi)} = \frac{a}{b}\, Cos.\psi,$$

dat

(*) Dezen hoek kan men ook op de volgende wijze vinden. Omdat $a \times CE = 2p^2$ is, zoo is $CE = \frac{2p^2}{a}$; maar $CE = b\, Sin.\psi$ zijnde, zoo is dus $b\, Sin.\psi = \frac{2p^2}{a}$ of $Sin.\psi = \frac{2p^2}{ab}$, even zoo als boven.

dat is $$\frac{Tang.\phi}{Tang^2.\psi - Tang^2.\phi} = \frac{a}{2b} \times \frac{Cos^2.\psi}{Sin.\psi},$$

dus $$Tang.\phi \times \frac{2b}{a} \times \frac{Sin.\psi}{Cos^2.\psi} = Tang^2.\psi - Tang^2.\phi,$$

of $$Tang^2.\phi + \frac{2b}{a} \times \frac{Sin.\psi}{Cos^2.\psi}\, Tang.\phi = Tang^2.\psi,$$

waaruit $$Tang.\phi = -\frac{b}{a} \times \frac{Sin.\psi}{Cos^2.\psi} \pm \surd\left(\frac{b^2}{a^2} \times \frac{Sin^2.\psi}{Cos^4.\psi} + Tang^2.\psi\right),$$

dat is $$Tang.\phi = \frac{b}{a} \times \frac{Sin.\psi}{Cos^2.\psi}\left\{-1 \pm \surd\left(1 + \frac{a^2}{b^2} Cos^2.\psi\right)\right\}.$$

Ten einde den voorgestelden driehoek te verkrijgen, waarin de gegevene lijn waarlijk den tophoek midden door deelt, moet men het bovenste teeken gebruiken, en dus nemen

$$Sin.\psi = \frac{2p^2}{ab},$$

en $$Tang.\phi = \frac{b}{a} \times \frac{Sin.\psi}{Cos^2.\psi}\left\{-1 + \surd\left(1 + \frac{a^2}{b^2} Cos^2.\psi\right)\right\}.$$

Want het benedenste teeken nemende, zou men *Tang.* ϕ negatief vinden, en dus ϕ negatief of in het tweede quadraat moeten nemen, waardoor de tophoek of negatief of grooter dan 180° zou worden.

Dit benedenste teeken heeft echter wel degelijk eene meetkunstige beteekenis, en toont eenen driehoek ABC, *Fig.* 124, aan, waarin de bazis AB $= a$, de inhoud p^2 en de lijn CD $= b$ is, welke het supplement van den tophoek midden door deelt.

Stelt men namelijk in *Fig.* 124 alles als in *Fig.* 123, dat is $\angle$CDF $= \psi$ en $\angle$ACD $= \phi$, dan is, omdat BCD $=$ DCG moet zijn, BCD $= 180° - \phi$, waaruit volgt $\angle$ CAD $= \psi - \phi$ en $\angle$CBD $= \psi + \phi - 180°$, zoodat *Sin.* CAD $=$ *Sin.* $(\psi - \phi)$ en *Sin.* CBD $= -$ *Sin.* $(\psi + \phi)$; voor deze figuur is dus AD $= b\,\frac{Sin.\phi}{Sin.(\psi - \phi)}$ en BD $= -b\,\frac{Sin.\phi}{Sin.(\psi + \phi)}$ en daar hier AD $-$ DB $= a$ moet zijn, zoo vinden wij

$$b\,\frac{Sin.\phi}{Sin.(\psi - \phi)} + b\,\frac{Sin.\phi}{Sin.(\psi + \phi)} = a,$$

en daar dit dezelfde vergelijking als (1) is, moet zij tot dezelfde eindvergelijking voeren.

CLXXX.

CLXXX. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

De vergelijking van de kromme te bepalen, welke de eigenschap heeft, dat de kromtestraal vermenigvuldigd met de cosinus van den hoek, welken dezelve met de as van de x maakt, eene standvastige grootheid is?

OPGELOST *door* I. R. SCHMIDT *en* A. B. DE BOCK JUN.

OPLOSSING *van* I. R. SCHMIDT.

Stellende den hoek, dien de raaklijn met de as van de x maakt, gelijk ϕ, [dan is *Tang.* $\phi = \frac{\partial y}{\partial x}$. De hoek, dien de kromtestraal met deze zelfde as maakt, ψ stellende, is derhalve *Tang.* $\psi = \frac{\partial x}{\partial y}$.

Stellende alzoo $\frac{\partial y}{\partial x} = z$, dan is *Tang* $\psi = \frac{1}{z}$ en bij gevolg

$$Cos\ \psi = \frac{1}{\sqrt{(1 + Tang^2.\ \psi)}} = \frac{z}{\sqrt{(1 + z^2)}}.$$

In deze onderstelling is verder $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial x}$ en dus de kromtestraal

$$R = -\frac{(1 + z^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial z}{\partial x}}.$$

Daar nu volgens de opgaaf $R . Cos. \psi$ eene standvastige grootheid moet zijn, hebben wij

$$-\frac{(1 + z^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial z}{\partial x}} \times \frac{z}{(1 + z^2)^{\frac{1}{2}}} = a,$$

of

$$(1 + z^2)\, z = -a \frac{\partial z}{\partial x},$$

dat is $\partial x = -a \frac{\partial z}{z(1 + z^2)} = -a \left(\frac{\partial z}{z} - \frac{z \partial z}{1 + z^2} \right)$,

zoodat $x = -a \left\{ Log.\ z - \tfrac{1}{2} Log.\ (1 + z^2) + Log.\ C \right\}$,

dat is

$$x = a\, Log. \frac{\sqrt{(1 + z^2)}}{Cz},$$

of tot de getallen overgaande

$$e^{\frac{x}{a}} = \frac{\sqrt{(1+z^2)}}{Cz},$$

of $$e^{\frac{2x}{a}} = \frac{1+z^2}{C^2z^2},$$

of $$C^2 z^2 e^{\frac{2x}{a}} = 1 + z^2,$$

of $$z^2 (C^2 e^{\frac{2x}{a}} - 1) = 1,$$

dus $$z = \frac{1}{\sqrt{(C^2 e^{\frac{2x}{a}} - 1)}},$$

of omdat $z = \frac{\partial y}{\partial x}$ is,

$$\partial y = \partial x \times \frac{1}{\sqrt{(C^2 e^{\frac{2x}{a}} - 1)}},$$

en $$y = \int \frac{\partial x}{\sqrt{(C^2 e^{\frac{2x}{a}} - 1)}}.$$

Stellen wij nu $C e^{\frac{x}{a}} = u$, dan is $\frac{x}{a} = Log. \frac{u}{C}$ of $x = a\, Log. \frac{u}{C}$ en $\partial x = a \frac{\partial u}{u}$, waardoor

$$y = a \int \frac{\partial u}{u \sqrt{(u^2 - 1)}} = a \{ Boog.\, Sec.\, u + C' \},$$

en hierin voor u derzelver waarde schrijvende,

$$y = a \{ Boog.\, Sec. (C e^{\frac{x}{a}}) + C' \}.$$

Daar er door het integreren, behalve de gegevene standvastige grootheid a, nog twee andere zijn ingevoerd, kunnen wij de kromme aan twee voorwaarden laten voldoen. Nemen wij hier-

toe

toe aan, dat voor $x=0$ ook $y=0$ moet zijn, en dat in dezen top de kromme loodregt door de as van de x moet gaan, hetgeen hierop neder komt, dat voor $x=0$, $z=\infty$ moet zijn, dan geeft de vergelijking

$$x = a\, Log. \frac{\sqrt{(1+z^2)}}{Cz},$$

omdat voor $z=\infty$, $\frac{\sqrt{(1+z^2)}}{z} = \sqrt{(\frac{1}{z^2}+1)} = 1$ is

$$0 = a\, Log. \frac{1}{C}, \text{ dus } \frac{1}{C} = 1 \text{ of } C = 1,$$

waardoor de vergelijking van de kromme reeds wordt

$$y = a \left\{C' + Boog.\, Sec.\, e^{\frac{x}{a}}\right\},$$

stellende dus $x=0$ en $y=0$, dan geeft dit

$$0 = aC' + Boog.\, Sec.\, 1 = aC' + 0,$$

zoodat $C'=0$, en bij gevolg is, bij deze onderstelling, de vergelijking

$$y = a\, Boog.\, Sec.\, e^{\frac{x}{a}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (I);$$

of wanneer men liever x in y wilde uitdrukken,

$$e^{\frac{x}{a}} = Sec. \frac{y}{a},$$

dat is

$$x = a\, Log.\, Sec. \frac{y}{a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (II).$$

Zij dan AX, *Fig.* 125, de as van de x en YY′ die van de y, dan zal bij de laatstgemaakte bepalingen de top in A liggen.

Omdat tot dezelfde secans twee gelijke bogen behooren, die alleen in teeken verschillen, zoo is de kromme ter wederzijde van AX symetriek en AX is dus eene middellijn.

Wordt x negatief genomen, dan is $y = a\, Boog.\, Sec.\, e^{-\frac{x}{a}}$ $= a\, Boog.\, Cos.\, e^{\frac{x}{a}}$, doch nu is x positief en dus $e^{\frac{x}{a}}$ grooter dan 1, en omdat geene *Cosinus* grooter dan 1 kan zijn, is y onbestaanbaar. Hieruit blijkt, dat de geheele kromme beneden YY′ ligt.

Wordt

Wordt $x = \infty$ genomen, dan is $y = a$ *Boog. Sec.* $\infty = a$ *Boog.* $90^\circ = \frac{1}{2} a \pi = 1,5708 . a$, de kromme heeft dus twee asymptoten, welke $AP = a$ zijnde, gevonden worden, door $AQ = AQ' = 1,5708 \times AE$ te nemen, en vervolgens QR en Q'R' evenwijdig met AX te trekken.

Voor elke waarde van x bestaan er oneindig veel waarden voor y, omdat de bogen ϕ en de bogen $\pm \{2 n \pi \pm \phi\}$ dezelfde secans hebben, en deze aanmerking is genoegzaam om te doen zien, dat de kromme een oneindig aantal gelijke en gelijkvormige takken ZAZ', $Z_1 A_1 Z'$, *enz.* heeft, welke elk tusschen twee asymptoten besloten zijn, die loodregt op YY' staan, en van elkander op eenen afstand $a \pi$ gelegen zijn, en dat beurteling een dezer vakken, begrepen tusschen deze achtervolgende asymptoten, ledig zal wezen en een tot de kromme zal behooren.

Zulks wordt ook bevestigd door de vergelijking

$$x = a \textit{ Nep. Log. Sec.} \frac{y}{a},$$

want dezelve toont weder aan, dat voor waarden van y, *die even groot zijn*, maar alleen in teekens verschillen, x even groot zal wezen, en dat dus AX eene middellijn is, en verder, dat van $y = -\frac{1}{2} a \pi$ tot $y = +\frac{1}{2} a \pi$, x bestaanbaar, van $y = \frac{1}{2} a \pi$ tot $y = \frac{3}{2} a \pi$, x onbestaanbaar, van $y = \frac{3}{2} a \pi$ tot $y = \frac{5}{2} a \pi$, x bestaanbaar zal zijn, enz.

Daar dus al de takken gelijkvormig zijn, zullen wij ons alleen met den tak ZAZ' bezig houden, dien wij in *Fig.* 126 op eene eenigzins grooter schaal geteekend hebben. Men zou derzelver constructie door punten uit die van de Logarithmische kromme kunnen afleiden; doch het is gemakkelijker voor elke waarde van $\frac{x}{a}$, de waarde van $\frac{y}{a}$ uit deze vergelijking te berekenen, en hierdoor een' der takken zuiver te teekenen, waardoor dan al de overige mede gevonden zijn. Dit zelfde kan ook door de vergelijking

$$\frac{x}{a} = \textit{Nep. Log. Sec.} \frac{y}{a}$$

bewerkstelligd worden.

Daar

Daar $\frac{\delta z}{\delta x} = -\frac{z(1+z^2)}{a}$ en $z = \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{1}{\sqrt{(e^{\frac{2x}{a}}-1)}}$ is, zoo hebben wij voor den kromteſtraal

$$R = -\frac{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\delta z}{\delta x}} = \frac{-(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{z}{a}(1+z^2)} = \frac{a\sqrt{(1+z^2)}}{z},$$

$$= a\sqrt{\left\{1+\frac{1}{e^{\frac{2x}{a}}-1}\right\}} \times \sqrt{(e^{\frac{2x}{a}}-1)},$$

dus is
$$R = ae^{\frac{x}{a}}.$$

Voor $x=0$ is dus $R=a$, waaruit blijkt, dat de gegeven ſtandvastige a de kromteſtraal van den top is.

Daar verder $R\,Cos.\,\psi = a$ zijnde, $Cos.\,\psi = \frac{a}{R}$ is, zoo is

$$Cos.\,\psi = e^{-\frac{x}{a}}.$$

Is GS de kromteſtraal van het punt G, dan is $SS = R\,Cos.\,\psi = a$, en dus

$$AS' = x' = x + a,$$

verder is $SS' = y' = FT = GT - GF = a\,Tang.\,\psi - y$,

of $y' = \frac{a}{z} - y = a\sqrt{(e^{\frac{2x}{a}}-1)} - a\,Boog.\,Sec.\,e^{\frac{x}{a}}$,

en brengende hierin $x = x' - a$ aan, dan komt er voor de vergelijking van de ontwondene

$$y' = a\left\{\sqrt{(e^{\frac{2(x'-a)}{a}}-1)} - Boog.\,Sec.\,e^{\frac{x'-a}{a}}\right\}.$$

Voor $x' = a$ is $y = 0$, en dit toont aan, dat P de top der ontwondene en dat a de kromteſtraal van den top is.

Aanmerking. Is ZAZ′ de middelſte welflijn van een gewelf, dat uit zich zelf in evenwigt is, dat is, de lijn, welke al de voegen MM′ midden door deelt, en ſtaan bovendien al deze voegen

gen loodregt op ZAZ′, dan is (I. R. SCHMIDT, *Statica*, 1e *Deel*, § 203) de lengte van eenige willekeurige voeg, die eenen hoek x met de verticaal maakt,

$$MM' = \frac{a\,d}{R\,Cos^2.x},$$

waarin d de dikte DD′ in den top, en a de kromtestraal van den top is, terwijl R de kromtestraal van het punt G beteekent.

Voor den normalen druk op deze voeg is verder (*Idem*, § 195) gevonden

$$N = \frac{V}{Sec.x},$$

waarin V het vlak DD′MM′ beteekent, en daar (*Idem*, § 195) voor dit voorvlak V gevonden is

$$V = C\,Tang.x,$$

waarin C de druk op de topvoeg is, zoo is de normale druk op de voeg MM′

$$N = \frac{C}{Cos.x}.$$

Neemt men nu in aanmerking, dat zoowel C als N de drukkingen zijn op een regthoekig vlak ter breedte DD′ of MM′, en ter lengte van eene lengteëenheid, zoo is het klaar, dat men, ten einde de drukking op eene vierkante eenheid te vinden, zal moeten deelen door d of MM′, en de drukking op elke vierkante eenheid van MM′ zal dus zijn

$$\frac{N}{MM'} = \frac{C}{Cos.x} \times \frac{R\,Cos^2.x}{a\,d} = \frac{CR\,Cos.x}{a\,d}.$$

Noemt men eindelijk den bekenden druk op eene vierkante eenheid in de topvoeg c, dan is $C = dc$ en bij gevolg de druk op eene vierkante eenheid van MM′

$$D = \frac{c}{a}\,R\,Cos.x.$$

Daar nu in onze kromme $R\,Cos.x$ standvastig gelijk a, dat is, gelijk de kromtestraal van den top is, zoo geeft dit, deze kromme tot middelste welflijn bezigende,

$$D = c,$$

dat is, wanneer een gewelf, volgens de bepaalde kromme als

mid-

middelste welflijn gebouwd is, dan zal de druk op de vierkante eenheid door het geheele gewelf standvastig zijn.

Neemt men deze kromme als middelste welflijn aan en dezelve is eenmaal zuiver geteekend, dan is het gemakkelijk de lengte der voeg voor elk punt G te berekenen of te construeren; want schrijvende in

$$MM' = \frac{a\,d}{R\,Cos^2.\,x},$$

voor $R\,Cos.\,x$ derzelver waarde a, dan komt er

$$MM' = \frac{d}{Cos.\,x} = d\,Sec.\,x,$$

welke zeer gemakkelijk te berekenen is.

De constructie is alsdan mede zeer gemakkelijk, want trekkende door G de normaal GS en de lijn NN' evenwijdig met de as, dan zal men alleen $GN = GN' = \frac{1}{2}d = AD$ behoeven te maken en NM en N'M' evenwijdig met YY' moeten trekken, want dan is $GM = GM' = \frac{1}{2}d\,Sec.\,x$ en dus $MM' = d\,Sec.\,x$. De dikte zou dan bij *Z* of *Z'* oneindig worden.

CLXXXI. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK JUN.

Men vraagt de waarde van ϕ bij benadering te vinden uit de vergelijking $Sin.\,\phi + Cos.\,\phi = \phi$?

OPGELOST *door* A. B. DE BOCK JUN., J. BASSAN *en* L. J. ULMAN.

OPLOSSING *van* A. B. DE BOCK JUN.

Onderstellen wij, dat men reeds eene waarde a voor ϕ gevonden hebbe, welke nabij aan de voorgestelde vergelijking voldoet, zoodat men bij dezen boog nog slechts eenen zeer kleinen boog x te voegen hebbe, om volkomen aan de vergelijking te voldoen, dan zal men hebben

$$Sin.(a+x) + Cos.(a+x) = a + x,$$

en in de ontwikkeling dezer vergelijking $Cos.\,x = 1$ en $Sin.\,x = x$ mogen stellen; waardoor de vergelijking verandert in

$$Sin.\,a + x\,Cos.\,a + Cos.\,a - x\,Sin.\,a = a + x,$$

waaruit volgt

$$x = \frac{a - Sin.\,a - Cos.\,a}{Cos.\,a - Sin.\,a - 1},$$

zoo-

zoodat wij voor den boog ϕ vinden als eerste benadering

$$\phi' = \alpha + x = \alpha + \frac{\alpha - Sin.\,\alpha - Cos.\,\alpha}{Cos.\,\alpha - Sin.\,\alpha - 1} = \alpha'.$$

Op dezelfde wijze voortgaande, vindt men voor de volgende benaderde waarden van ϕ

$$\phi'' = \alpha' + \frac{\alpha' - Sin.\,\alpha' - Cos.\,\alpha'}{Cos.\,\alpha' - Sin.\,\alpha' - 1} = \alpha'',$$

$$\phi''' = \alpha'' + \frac{\alpha'' - Sin.\,\alpha'' - Cos.\,\alpha''}{Cos.\,\alpha'' - Sin.\,\alpha'' - 1} = \alpha''',$$

enz. enz.

Men kan echter deze formulen herleiden, waardoor zij gemakkelijker door logarithmen kunnen berekend worden.

Volgens de *Trigon.* van LA CROIX door I. R. SCHMIDT (2e uitgave, bladz. 30) is

$$Sin.\,p + Cos.\,p = \sqrt{2}\,.\,Sin.\,(45^\circ + p).$$

Hierdoor verandert x in

$$x = \frac{\alpha - \sqrt{2}\,.\,Sin.\,(45^\circ + \alpha)}{Cos.\,\alpha - Sin.\,\alpha - 1},$$

$$= \frac{\alpha - \sqrt{2}\,.\,Sin.\,(45^\circ + \alpha)}{-2\,Sin.^2\,\tfrac{1}{2}\alpha - 2\,Sin.\,\tfrac{1}{2}\alpha\,Cos.\,\tfrac{1}{2}\alpha},$$

$$= -\frac{\alpha - \sqrt{2}\,.\,Sin.\,(45^\circ + \alpha)}{2\,Sin.\,\tfrac{1}{2}\alpha\,(Sin.\,\tfrac{1}{2}\alpha + Cos.\,\tfrac{1}{2}\alpha)},$$

$$= -\frac{\alpha - \sqrt{2}\,.\,Sin\,(45^\circ + \alpha)}{-2\sqrt{2}.Sin.\,\tfrac{1}{2}\alpha\,Sin.\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha)}.$$

Men heeft dus voor de opvolgende benaderde waarden van ϕ

$$\phi' = \alpha - \frac{\alpha - \sqrt{2}\,.\,Sin.\,(45^\circ + \alpha)}{2\sqrt{2}\,.Sin.\,\tfrac{1}{2}\alpha\,Sin.\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha)},$$

$$\phi'' = \alpha' - \frac{\alpha' - \sqrt{2}\,.\,Sin.\,(45^\circ + \alpha')}{2\sqrt{2}\,.\,Sin.\,\tfrac{1}{2}\alpha'\,Sin.\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha')},$$

enz. enz.

Om nu de eerste benaderde waarde α van ϕ te vinden, zoo merken wij op: dat voor $\phi = 0$ het eerste lid der voorgestelde vergelijking $= 1$, en het tweede $= 0$ wordt; dat voor $\phi = 45^\circ$ het eerste lid der voorgestelde vergelijking $= \sqrt{2}$, en het tweede $= \tfrac{1}{4}\pi$ wordt, dus het tweede lid nog altijd kleiner dan het eerste. Voor $\phi = 60^\circ$ wordt het eerste lid $= \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2} = 1,3610$ en

en het tweede $=1,0472$. Voor $\phi=90°$ eindelijk wordt het eerste lid $=1$ en het tweede lid $=\frac{1}{2}\pi=1,5708$. Er moet dus eene waarde van ϕ tusschen $60°$ en $90°$ aan de vergelijking voldoen; nemende dan voor eerste benadering $\alpha=72°$, dan vindt men uit de eerste benaderings-formule

$$\phi'=72°+7'\,11'',662=72°\,7'\,11'',662,$$

hierdoor wordt

$$\phi''=72°\,7'\,11'',7+1'',217=72°\,7'\,12'',879,$$

welke waarde tot het laatste cijfer naauwkeurig is.

CLXXXII. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK JUN.

Van eenen onregelmatigen vijfhoek de zijden benevens twee der overstaande hoeken gegeven zijnde, vraagt men eene formule voor den inhoud te vinden?

OPGELOST *door* A. B. DE BOCK JUN., J. BASSAN, J. JONKHEERT *en* L. J. ULMAN.

OPLOSSING *van* A. B. DE BOCK JUN.

Zij ABCD (*Fig.* 127) de gegevene vijfhoek, stellen wij de zijden $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DE=d$ en $AE=e$ en de hoeken $C=\alpha$, $B=\beta$, dan hebben wij door het trekken der diagonalen BD en AD

$$Inh.\ drieh.\ AED=\tfrac{1}{2}de\ Sin.\ \beta,$$

en

$$Inh.\ drieh.\ BCD=\tfrac{1}{2}bc\ Sin.\ \alpha.$$

Verder is

$$AD=\sqrt{\{d^2+e^2-2de\ Cos.\ \beta\}}=x,$$

en

$$BD=\sqrt{\{b^2+c^2-2bc\ Cos.\ \alpha\}}=y.$$

Nu wordt de inhoud van den driehoek ADB, gelijk bekend is, voorgesteld door de formule

$$\sqrt{\{\tfrac{1}{2}s(\tfrac{1}{2}s-x)(\tfrac{1}{2}s-y)(\tfrac{1}{2}s-a)\}},$$

waarin s de som der zijden voorstelt, dus $s=x+y+a$. De inhoud I van den vijfhoek wordt dus

$$I=\tfrac{1}{2}de\ Sin.\beta+\tfrac{1}{2}bc\ Sin.\alpha+\sqrt{\tfrac{1}{2}s}\sqrt{(\tfrac{1}{2}s-x)}\sqrt{(\tfrac{1}{2}s-y)}\sqrt{(\tfrac{1}{2}s-a)}$$

$$=\tfrac{1}{2}ed\ Sin.\beta+\tfrac{1}{2}bc\ Sin.\alpha+\ \ldots\ldots$$

$$\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{[b^2+c^2-2bc\ Cos.\ \alpha]}+\sqrt{[d^2+e^2-2de\ Cos.\beta]}+a)\}^{\frac{1}{2}}\times\ldots$$

$$\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{[b^2+c^2-2bc\ Cos.\ \alpha]}+\sqrt{[d^2+e^2-2de\ Cos\ \beta]}-a)\}^{\frac{1}{2}}\times\ldots$$

$$\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{[b^2+c^2-2bc\,Cos.\,\alpha]}-\sqrt{[d^2+e^2-2de\,Cos.\beta]}+a\}^{\frac{1}{2}}\times\ldots$$
$$\{\tfrac{1}{2}\,\sqrt{[b^2+c^2-2bc\,Cos.\,\alpha]}+\sqrt{[d^2+e^2-2de\,Cos.\beta]}+a\}^{\frac{1}{2}}.$$

CLXXXIII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Men vraagt uit een zelfde punt C (*Fig.* 128), *als middelpunt, twee cirkels te beschrijven, die de volgende eigenschappen hebben. Wanneer men aan eenig punt* B *van den buitensten cirkel eene raaklijn* BA *van gegevene lengte trekt, en de uiteinden* B *en* A *van deze raaklijn met het gemeenschappelijk middelpunt* C *vereenigt, de eerste van welke twee lijnen den binnensten cirkel in* F *snijdt, terwijl de tweede in* E *en* D *door den buitensten en binnensten cirkel gaat, dan moet vooreerst* CD = EA *zijn, en ten andere moet de lijn, die door de punten* E *en* F *gaat, de raaklijn aan den binnensten cirkel wezen.*

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, J. BASSAN, J. JONKBERT *en* A. B. DE BOCK JUN.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

Men onderstelle dat de figuur reeds geconstrueerd zij, *dan is* CD = AE = CF en EF loodregt op BC. Derhalve heeft men de evenredigheid

$$CA : CE = CB : CF = CE : AE,$$

waaruit volgt, dat AC in D en E in uiterste en middelste rede gedeeld is, en dat dus ook BC de zijde van den regelmatigen tienhoek is, welke in den cirkel met AC als straal beschreven, kan geconstrueerd worden. Deze eigenschap geeft dan aanleiding tot de volgende

I[e] CONSTRUCTIE. Uit A (*Fig.* 129) met de gegevene lijn AB als straal beschrijve men eenen cirkel BIG. Verleng BA tot in G en deel AG in H midden door. Verder make men IA loodregt op AB, trekke HI en make HK = HI. Dan is AK de zijde van den tienhoek voor den straal AB; makende dus AL = AK en trekkende LM loodregt op AI, dan zal de raaklijn BC, door den verlengden straal AM bepaald, de straal van den grootsten der gevraagde cirkels zijn, terwijl de straal van den kleinsten cirkel = AC — BC zal wezen.

II[e] CONSTRUCTIE. Het voorstel eigenlijk nederkomende op het con-

construeren van eenen regthoekigen driehoek, waarvan eene der regthoekszijden gelijk moet wezen aan het grootste stuk van de schuinsche zijde, wanneer deze in uiterste en middelste rede gedeeld wordt. Zoo neme men eene willekeurige lijn A′C (*Fig.* 130), deele haar in D′ in uiterste en middelste rede, en beschrijve op deze lijn eenen halven cirkel CB′A′; makende nu CB′ = CD′, dan is de driehoek CB′A′ gelijkvormig aan den driehoek ABC van *Fig.* 129. Makende dus OB′ gelijk aan de gegevene lijn AB en trekkende OA evenwijdig aan CB′ en AB evenwijdig aan A′B′, dan is CB wederom de straal van den grootsten cirkel en CF die van den kleinsten.

CLXXXIV. VOORSTEL.

Door J. Bassan.

Wanneer de som der zijden van eenen driehoek gelijk a, een der hoeken aan de bazis gelijk α, en de loodlijn uit den tophoek op de bazis nedergelaten gelijk de helft van deze bazis is, dan vraagt men dezen driehoek te bepalen?

Opgelost *door* J. Bassan, A. B. de Bock Jun. *en* J. Jonkbert.

Oplossing *van* J. Bassan.

Zij ABC (*Fig.* 131) de gevraagde driehoek, alwaar derhalve de loodlijn BD = ½ AC, *hoek* BAC = α en de som der zijden gelijk *a* is. Dan is het duidelijk, dat voor elken anderen gelijkvormigen driehoek A′B′C′, ook altijd B′D′ = ½ A′C′ en hoek B′A′C′ = α zal wezen. Wij gaan dan eerst de hoeken van den driehoek ABC berekenen, en dan hebben wij slechts vervolgens de lijn *a*, welke de som der zijden voorstelt, in rede van de sinussen der hoeken te verdeelen, om de gevraagde zijden te vinden.

Nu is in den regthoekigen driehoek ABD, AD = BD *Cot.* α en dus DC = AC − AD = 2 × BD − BD *Cot.* α = BD (2 − *Cot.* α). Nemende den hoek BCA = φ, dan zal uit den regthoekigen driehoek BDC volgen DC × *Tang.* φ = BD of BD = BD (2 − *Cot.* α) *Tang.* φ, waaruit volgt

$$Tang.\,\phi = \frac{1}{2 - Cot.\,\alpha}.$$

Hierdoor zijn dan de hoeken van den driehoek bekend en derhalve ook de zijden.

 Men

Men kan het voorstel ook nog oplossen door de volgende CONSTRUCTIE. Neem eene willekeurige lijn $A'C'$ en trek $E'B'$ evenwijdig aan $A'C'$ op eenen afstand gelijk aan de helft van $A'C'$. Trekkende dan uit A' eene lijn $A'B'$, die eenen gegevenen hoek α met $A'C'$ maakt, dan zal het snijpunt B' den top van den driehoek $A'B'C'$ bepalen, die gelijkvormig is aan den gevraagden driehoek. Verlengende nu $A'C'$ en makende $A'B = A'B'$ en $C'B'' = C'B'$, dan zal men door $BE = a$ te nemen, en de lijnen $A'A'$ en $C'C$ evenwijdig aan $B''E$ te trekken, de zijden BA, AC en CE van den gevraagden driehoek gevonden hebben.

CLXXXV. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Wanneer de loodlijn van eenen driehoek gelijk de helft van de basis is, en men bovendien weet, dat de tophoek gelijk α en de omtrek gelijk a is, vraagt men dezen driehoek te bepalen?

OPGELOST *door* J. BASSAN, A. B. DE BOCK JUN. *en* J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Even als in de oplossing van het voorgaande voorstel merken wij op, dat het genoegzaam zijn zal eenen driehoek te bepalen, wiens loodlijn gelijk aan de halve bazis en wiens tophoek $= \alpha$ is, omdat de gevraagde driehoek aan deze laatste gelijkvormig moet wezen.

Zij dan, *Fig.* 132, ABC een driehoek, waarin $AC = 2BC$ en *hoek* $ABC = \alpha$ is; en stellen wij *hoek* $ABD = \frac{1}{2}\alpha - \phi$ en $DBC = \frac{1}{2}\alpha + \phi$, dan zal de driehoek bepaald zijn, zoodra de hoek ϕ gevonden is, aangezien dan $BAC = 90 - (\frac{1}{2}\alpha - \phi)$ en *hoek* $BCA = 90 - (\frac{1}{2}\alpha + \phi)$ is.

Nu is verder $AD = BD\,Tang.(\frac{1}{2}\alpha - \phi)$ en $DC = BD\,Tang.(\frac{1}{2}\alpha + \phi)$, en daar $2BD = AD + DC$ is, zoo is ook

$$2 = Tang.(\tfrac{1}{2}\alpha - \phi) + Tang.(\tfrac{1}{2}\alpha + \phi),$$

of
$$2 = \frac{Sin\,(\frac{1}{2}\alpha - \phi)}{Cos.(\frac{1}{2}\alpha - \phi)} + \frac{Sin.(\frac{1}{2}\alpha + \phi)}{Cos.(\frac{1}{2}\alpha + \phi)},$$

of
$$2\,Cos.(\tfrac{1}{2}\alpha - \phi)\,Cos.(\tfrac{1}{2}\alpha + \phi) = Cos.(\tfrac{1}{2}\alpha + \phi)\,Sin.(\tfrac{1}{2}\alpha - \phi) + Sin.(\tfrac{1}{2}\alpha + \phi)\,Cos.(\tfrac{1}{2}\alpha - \phi),$$

en dus
$$Cos.\,2\phi + Cos.\,\alpha = Sin.\,\alpha,$$

waaruit volgt
$$Cos.\,2\phi = Sin.\,\alpha - Cos.\,\alpha.$$

Men

Men kan ook de ſinus van 2ϕ in rekening brengen; want uit de voorgaande vergelijking volgt

$$Cos^2.2\phi = 1 - 2\,Sin.\,a\,Cos.\,a,$$

of $$1 - Cos^2.2\phi = Sin^2.2\phi = 2\,Sin.\,a\,Cos\,a = Sin\,2\,a.$$

De hoeken van den gevraagden driehoek nu gevonden zijnde, zoo vindt men de zijden, door hunne gegevene ſom a in rede van de ſinusſen der hoeken te verdeelen.

Het voorſtel kan ook gemakkelijk door conſtructie worden opgelost; men heeft ſlechts even als bij het voorgaand voorſtel, *Fig.* 131, eene lijn B′E′ evenwijdig aan eene willekeurige lijn A′C′ te trekken op eenen afſtand $=\frac{1}{2}$ A′C′, en dan op A′C′ een cirkel-ſegment te beſchrijven, hetwelk den gegeven' top-hoek bevat; de ſnijding van dit ſegment met de lijn B′E′ zal dan de toppen van twee driehoeken doen kennen, die aan de vraag voldoen.

CLXXXVI. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

De lijn, welke den tophoek van eenen driehoek midden door deelt, is gelijk aan de helft van de bazis. Wanneer nu de omtrek gelijk a en een van de hoeken aan de bazis gelijk α is, vraagt men dezen driehoek te bepalen?

OPGELOST *door* J. BASSAN.

Zij ABC (*Fig.* 133) de gevraagde driehoek, waarin *hoek* BAD $=\alpha$, *hoek* ABD $=$ *hoek* DBC $=\phi$ en 2 BD $=$ AC is. Dan heeft men dadelijk uit den driehoek ABD

$$AD : BD = Sin.\,\phi : Sin.\,\alpha,$$

of $$AD = BD\,\frac{Sin.\,\phi}{Sin.\,\alpha},$$

en uit den driehoek BDC

$$DC : BD = Sin.\,\phi : Sin.\,(2\phi+\alpha),$$

of $$DC = BD\,\frac{Sin.\,\phi}{Sin.\,(2\phi+\alpha)};$$

en omdat DC + AD = 2 BD

$$2\,BD = BD\,\frac{Sin\,\phi}{Sin.\,\alpha} + \frac{Sin.\,\phi}{Sin.\,(2\phi+\alpha)}\,BD,$$

waaruit volgt

$$Sin.\,\phi\,\{Sin.\,(2\phi+\alpha) + Sin.\,\alpha\} = 2\,Sin.\,\alpha\,Sin.\,(2\phi+\alpha),$$

 of

of wel

$$Sin.\,\phi\,\{Sin.(\alpha+\phi+\phi)+Sin.(\alpha+\phi-\phi)\}=2\,Sin.\,\alpha\,Sin.(2\phi+\alpha),$$

of ook $2\,Sin.\phi\,Cos.\phi\,Sin.(\alpha+\phi)=2\,Sin.\,\alpha\,Sin.(2\phi+\alpha)$.

Deze vergelijking ontwikkeld, geeft

$$Sin.\phi\,Cos.\phi\,(Sin.\,\alpha\,Cos.\phi+Cos.\,\alpha\,Sin.\phi)=Sin.\,\alpha\times\ldots$$
$$\{Sin.\,2\phi\,Cos.\,\alpha+Cos.\,2\phi\,Sin.\,\alpha\},$$

hierin $Sin.\,2\phi$ en $Cos.\,2\phi$ ontwikkelende, en beide leden door $Cos^3\,\phi$ deelende, komt er

$$Tang.\phi\,(Sin.\,\alpha+Cos.\,\alpha\,Tang.\,\phi)=Sin.\alpha\{2\,Cos.\alpha\,Tang.\phi+Sin.\alpha\ldots$$
$$\ldots(1-Tang^2.\,\phi)\}\frac{1}{Cos.\,\phi},$$

of wel door $Cos^2.\alpha$ deelende

$$Tang.\phi\,(Tang.\,\alpha+Tang.\,\phi)\frac{1}{Cos.\,\alpha}=Tang.\,\alpha\{2\,Tang\,\phi+Tang\,\alpha\times\ldots$$
$$(1-Tang^2.\,\phi)\}\frac{1}{Cos.\,\phi}.$$

Deze vergelijking in het vierkant verheffende en voor $\frac{1}{Cos^2.\alpha}$ en $\frac{1}{Cos^2.\,\phi}$, $1+Tang^2.\,\alpha$ en $1+Tang^2.\phi$ schrijvende, komt er

$$Tang^2.\phi\,(Tang.\,\alpha+Tang.\,\phi)^2\,(1+Tang^2.\,\alpha)=\ldots$$
$$Tang^2.\,\alpha\,(1+Tang^2.\,\phi)\,(2\,Tang.\phi+Tang\,\alpha\,(1-Tang^2.\,\phi))^2.$$

Stellende nu in deze vergelijking $Tang.\alpha=n$ en $Tang.\phi=x$, dan vindt men

$$x^2\,(n+x)^2\,(1+n^2)=n^2\,(1+x^2)\,(2\,x+n\,(1-x^2))^2.$$

Deze vergelijking ontwikkeld en volgens de magten van x gerangschikt, geeft

$$n^4\,x^6-4\,n^3\,x^5-(1-3\,n^2+n^4)\,x^4-2\,n\,(1+n^2)\,x^3\ldots$$
$$+n^2\,(3-2\,n^2)\,x^2+4\,n^3\,x+n^4=0.$$

Uit deze vergelijking x oplossende, is de tangens van den halven tophoek gevonden en daardoor al de hoeken van den driehoek bekend. De zijden worden even als in de oplossing van het voorstel CLXXXIV gevonden.

CLXXXVII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Wanneer de lijn, die den tophoek van eenen driehoek midden door

door deelt, gelijk de halve basis is en bovendien de omtrek $= a$ en de tophoek $= \alpha$ gegeven is, dan vraagt men dezen driehoek te bepalen?

Opgelost *door* J. Bassan *en* J. Jonkhert.

Oplossing *van* J. Bassan.

Dit voorstel slechts van het voorgaande daarin onderscheiden zijnde, dat hier de hoek BAD, *Fig.* 133, aan de bazis onbekend en daarentegen de tophoek ABC gegeven is, zoo is het klaar, dat men slechts in de eindvergelijking n of de tangens van den hoek aan de bazis als onbekend en x of de tangens van den halven tophoek als bekend te beschouwen heeft. Schrijvende dan voor x in de genoemde vergelijking m en voor n, y, dan heeft men de vergelijking

$$m^6 y^4 - 4m^5 y^3 m^4 (1 - 3y^2 + y^4) - 2m^3 y (1 + y^4) \;.\;. \\ + m^2 y^2 (3 - 2y^4) + 4y^3 m + y^4 = 0,$$

en deze vergelijking volgens de magten van y rangschikkende, vindt men

$$(m^6 - m^4 - 2m^2 + 1) y^4 - 2m(2m^4 + m^2 - 2) y^3 \;.\;. \\ + 3m^2 (1 + m^2) y^2 - 2m^3 y - m^4 = 0,$$

waarin nu y de tangens van den hoek aan de bazis en m de tangens van den halven tophoek voorstelt. Uit deze vergelijking de hoeken van den driehoek bekend hebbende, zoo worden de zijden gevonden op dezelfde wijze, als in de oplossing van het voorstel CLXXXIV is aangewezen.

CLXXXVIII. VOORSTEL.

Door J. Bassan.

Van eenen driehoek is de omtrek gelijk a en een der hoeken aan de bazis gelijk α. Wanneer nu de lijn, die het toppunt met het midden der bazis vereenigt, gelijk de helft van de bazis is, vraagt men dezen driehoek te bepalen?

Opgelost *door* J. Bassan, L. J. Ulman, A. B. de Bock Jun. *en* J. Jonkhert.

Oplossing *van* J. Bassan.

Zij ABC (*Fig.* 134) de gevraagde driehoek, dan zal, ingevolge het voorstel, AD $=$ DB $=$ DC zijn, en derhalve moeten de punten A, B en C in den omtrek van eenen halven cirkel liggen; waaruit dan al dadelijk volgt, dat de hoek ABC regt is,

 en

en dus ook, dat de hoek BCA gelijk aan het complement van den gegeven' hoek a is. De hoeken van den driehoek gevonden zijnde, zoo is het duidelijk uit hetgeen bij de oplossing van het voorstel CLXXXIV is opgemerkt, dat de zijden van den driehoek gevonden worden door de volgende vergelijkingen

$$AB = a \times \frac{Cos.\,a}{1 + Sin.\,a + Cos.\,a},$$

$$BC = a \times \frac{Sin.\,a}{1 + Sin.\,a + Cos.\,a},$$

en $$CA = a \times \frac{1}{1 + Sin.\,a + Cos.\,a}.$$

CLXXXIX. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Men begeert den hoek te construeren, waarvan de sinus is $\sqrt{(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{-1})}+\sqrt{(-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{-1})}$?

OPGELOST *door* J. BASSAN, L. J. ULMAN, J. JONKHEERT *en* A. B. DE BOCK JUN.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Stel den gezochten hoek $=\phi$, dan is volgens het voorstel

$$Sin.\,\phi = \sqrt{(-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}+-1)}+\sqrt{(-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-1})},$$

waaruit volgt

$$Sin^2.\,\phi = -\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{5},$$

en $$Sin.\,\phi = \sqrt{\{-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{5}\}},$$

en $$Cos.\,\phi = \sqrt{\{\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{5}\}}.$$

Deze laatste vergelijking door den bekenden regel herleidende, vindt men

$$Cos.\,\phi = -\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{5}.$$

De hoek ϕ heeft dus de eigenschap, dat deszelfs sinus midden evenredig is tusschen den straal en den cosinus. Maar uit de vergelijking

$$Sin^2.\,\phi = Cos.\,\phi,$$

volgt ook $$Tang^2.\,\phi = \frac{1}{Cos.\,\phi}.$$

De gezochte hoek heeft dus ook de eigenschap, dat zijne tangens midden evenredig is tusschen den straal en de secans.

Laat in *Fig.* 135 EAB de gevraagde hoek zijn, dan moet, ingevolge het bewezene,

BE²

$$BE^2 = AB \times AE,$$
$$= AD \times AE,$$

zijn. De oplossing van het vraagstuk is dus terug gebragt tot dat van het 183e Voorstel (*Fig.* 130), en het blijkt derhalve, dat AE in D in uiterste en middelste rede moet gedeeld zijn; waartoe dan de constructiën, bij het aangehaalde voorstel opgegeven, dienen kunnen. De hoek ϕ is derhalve de middelpuntshoek van den regelmatigen tienhoek of gelijk aan 36°. Uit de vergelijking van dit voorstel met het aangehaalde 183ste zal men tevens ontwaren, dat AD = BE en DE = AC moet zijn, en dat dus de gezochte hoek de eigenschap heeft van de som der cosinus en straal gelijk aan de secans te hebben.

CXC. VOORSTEL.

Door S. KLYNSMA.

Van eenen driehoek is bekend de tophoek, de bazis en de som der overige zijden. Men vraagt dezen driehoek te berekenen en te construeren?

OPGELOST *door* J. BASSAN, L. J. ULMAN, J. JONKHERT *en* A. B. DE BOCK JUN.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Zij ABC, *Fig.* 136, de gevraagde driehoek, waarin AC = a' gelijk aan den gegevenen bazis, *hoek* ABC = α en AB + BC = b is. Men verlenge nu AB, zoodat BD = BC zij, en trekke DC; dan is de driehoek BCD gelijkbeenig, waaruit volgt *hoek* BDC = *hoek* DCB = ½ *hoek* ABC = ½ α. Deze opmerking brengt ons op de volgende

CONSTRUCTIE. Op de gegevene bazis AC beschrijve men een cirkel-segment ADC, hetwelk den halven top bevatten kan; uit A met de gegevene som der zijden AD beschrijve men eenen cirkelboog, snijdende het cirkel-segment in D; trekkende nu DC en makende *hoek* BCD = BDC, dan is ABC de gevraagde driehoek.

Voor de berekening van dezen driehoek volgt uit den driehoek ADC

$$Sin.\, DCA = \frac{AD}{AC}\, Sin.\, ADC,$$
$$= \frac{b}{a}\, Sin.\, \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Verder is hoek BAC het ſupplement van de ſom der hoeken ADC en DCA, noemende dezen hoek ϕ, zoo is dan

$$Sin.(\phi+\tfrac{1}{2}a)=\frac{b}{a}\,Sin.\tfrac{1}{2}a.$$

Uit welke formule de hoek ϕ gevonden zijnde, het overige door de bekende regels gevonden wordt.

CXCI. VOORSTEL.

Door S. KLYNSMA.

Men vraagt den vorm van eenen driehoek te bepalen, welke de eigenſchap heeft, dat twee der zijden tot elkander in reden zijn als p tot q, en dat de ſom der n^{de} magten van deze zijden gelijk zij aan de n^{de} magt van de derde zijde?

OPGELOST *door* A. B. DE BOCK JUN. *en* J. JONKHEERT.

OPLOSSING *van* A. B. DE BOCK JUN.

Zij ABC, *Fig.* 137, de gevraagde driehoek, en ſtelle daarin $AB=px$ en $AC=qx$, dan is reeds aan de eerſte voorwaarde voldaan; voor de derde zijde hebben wij dan nog

$$BC^n=p^n x^m+q^n x^n,$$

of

$$BC=x\,(p^n+q^n)^{\frac{1}{n}}.$$

Volgens den bekenden regel is nu

$$Cos.\,A=\frac{BA^2+AC^2-BC^2}{2.BA.AC},$$

$$=\frac{p^2x^2+q^2x^2-x^2(p^n+q^n)^{\frac{2}{n}}}{2.p.q.x^2},$$

$$=\frac{p^2+q^2-(p^n+q^n)^{\frac{2}{n}}}{2pq}.$$

Op dezelfde wijze vindt men

$$Cos.\,B=\frac{p+(p^n+q^n)^{\frac{2}{n}}-q^2}{2p(p^n+q^n)^{\frac{1}{n}}},$$

en

en $$\text{Cos. } C = \frac{q^2 + (p^n + q^n)^{\frac{2}{n}} - p^2}{2q(p^n + q^n)^{\frac{2}{n}}},$$

waardoor dan de driehoek volkomen bepaald is.

CXCII. VOORSTEL.

Door S. KLYNSMA.

Men vraagt onder alle de driehoeken, die in eene gegevene ellips kunnen beschreven worden, en waarvan eene der zijden evenwijdig loopt met eene gegevene lijn, diegene te bepalen, waarvan de inhoud de grootste is?

OPGELOST *door* A. B. DE BOCK JUN.

Onderstellen wij, dat in de ellips CDQA, *Fig.* 138, de middellijn AB evenwijdig loopt aan de gegevene lijn, en dat CD derzelver toegevoegde middellijn is; als men dan QR evenwijdig aan AB trekt, dan is deze zijde van den driehoek PQR evenwijdig aan de gegevene lijn. Laat nu ter bepaling van de ellips gegeven zijn *hoek* CMA $= \alpha$, AM $=$ MB $= a$ en CM $=$ MD $= b$, dan is het uit de evenwijdigheid van QR met AB en van ER en GQ met MD klaar, dat GM $=$ ME en ER $=$ GQ is. Men stelle verder de coördinaten van het punt P,, x en y, die van het punt Q, x' en y', en trekke de loodlijn PI, dan wordt de inhoud van den driehoek PQR voorgesteld door

$$I = \tfrac{1}{2}\, QR \times PI = \tfrac{1}{2} \times 2x'(y+y')\, Sin.\, \alpha$$
$$= x'(y+y')\, Sin.\, \alpha.$$

Maar volgens eene eigenschap der ellips is

$$x' = \frac{a}{b}\sqrt{(b^2 - y'^2)},$$

dus $$I = \frac{a}{b}\, Sin.\, \alpha\, .\, (y+y')\sqrt{(b^2 - y'^2)},$$

welke uitdrukking nu tot een maximum moet gemaakt worden.

In deze laatste vergelijking is y of de ordinaat van P geheel onafhankelijk van y' of de ordinaat van Q; en daar het nu duidelijk is, dat voor $y =$ CM $= b$ deze ordinaat zijne grootste waarde verkrijgt, zoo blijkt reeds daaruit, dat de gezochte driehoek zijnen top in het uiteinde C der toegevoegde middellijn moet hebben. De laatstgevondene vergelijking gaat dan over in

I =

$$I = \frac{a}{b} Sin.\alpha (b+y')\sqrt{(b^2-y'^2)};$$

uit dezelve volgt

$$\frac{\partial I}{\partial y'} = \frac{a}{b} Sin.\alpha \left\{ -\frac{(b+y')y'}{\sqrt{(b^2-y'^2)}} + \sqrt{(b^2-y'^2)} \right\},$$

en dus

$$-\frac{(b+y')y'}{\sqrt{(b^2-y'^2)}} + \sqrt{(b^2-y'^2)} = 0,$$

of
$$(b+y')y' = b^2 - y'^2;$$

Beide leden dezer vergelijking deelbaar zijnde door $b+y'$, zoo wordt deze vergelijking voldaan door

$$b+y' = 0,$$

en door
$$+y' = b - y',$$

of door
$$y' = \tfrac{1}{2} b.$$

De eerste waarde toont geen maximum, maar wel een minimum aan, dewijl voor $y' = -b$ de bazis van den driehoek gelijk nul wordt. Dat de tweede waarde voor y' een maximum aantoont, volgt uit de waarde van het tweede differentiaal quotient; waartoe wij eerst het eerste quotient schrijven onder den vorm

$$\frac{\partial I}{\partial y'} = \frac{a}{b} Sin.\alpha \left\{ \frac{(b+y')(-y'-y'+b)}{\sqrt{(b^2-y'^2)}} \right\},$$

$$= \frac{a}{b} Sin.\alpha \frac{(b+y')(b-2y')}{\sqrt{(b^2-y'^2)}},$$

en dus

$$\frac{\partial^2 I}{\partial y'} = \frac{a}{b} Sin.\alpha \left\{ (b-2y')\partial \frac{b+y'}{\sqrt{(b^2-y'^2)}} - \frac{b+y'}{\sqrt{(b^2-y'^2)}} . 2\partial y' \right\}.$$

Stellende nu $b - 2y' = 0$, dan gaat deze vergelijking over in

$$\frac{\partial^2 I}{\partial y'} = -\frac{3b}{\sqrt{3b^2}} \partial y' = -\partial y' \sqrt{3},$$

waaruit dan blijkt, dat werkelijk de gevondene waarde $ER = \frac{1}{2} MD$ een maximum aanwijst.

De inhoud van den grootsten driehoek is dus

$$I = \frac{a}{b} Sin.\alpha . \tfrac{3}{2} b . \tfrac{1}{2} b \sqrt{3}$$

$$= \tfrac{3}{4} a b \, Sin.\alpha \times \sqrt{3}.$$

Onder al de toegevoegde middellijnen eener ellips maken de asfen den grootsten hoek, zijnde aldaar $\alpha = 90^\circ$ en $Sin.\alpha = 1$;

waar-

waaruit volgt, dat de grootst mogelijke driehoek, welke in eene ellips kan beschreven worden, zijnen top in het einde van eene der assen heeft en met zijne bazis evenwijdig aan de andere as loopt, de halve eerste as midden door deelende.

CXCIII. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK JUN.

Men vraagt in het ligchaam, geboren door de omwenteling van eene cicloïde om derzelver bazis, de grootst mogelijke paraboloïde te beschrijven; in de onderstelling, dat de top van deze paraboloïde in een der uiteinden van de bazis der cicloïde ligt?

OPGELOST *door* A. B. DE BOCK JUN.

Zij ACB (*Fig.* 139) de cicloïde en AK de halve parabool welke de beschrijvende lijn der paraboloïde voorstelt; zij verder $AG = y$ en $KG = x$, dan volgt hieruit, dat de vergelijking van de cicloïde voorgesteld wordt door

$$y = r \, Boog \; Sin.vers. \frac{x}{r} - \sqrt{(2rx - x^2)}$$ . . (*Diff. en Int. Rek.* van I. R. SCHMIDT, § 119).

zijnde r de straal van den voortbrengenden cirkel CEF.

De inhoud der paraboloïde wordt, gelijk bekend is, voorgesteld door

$$I = \pi x^2 y,$$

of voor y zijne waarde stellende

$$I = \pi x^2 \left\{ r \, Boog.Sin.vers. \frac{x}{r} - \sqrt{(2rx - x^2)} \right\},$$

of wel stellende $\frac{x}{r} = Sin.\;vers.\;\phi,$

$$= 1 - Cos.\,\phi;$$

welke onderstelling geoorloofd is, doordien $\frac{x}{r}$ nooit grooter dan 2 wordt, terwijl buitendien ϕ den boog voorstelt, welke in elk punt der cicloïde door den voortbrengenden cirkel is afgeloopen. Door deze onderstelling hebben wij dan

$$I = \pi r^3 (1 - Cos.\,\phi)^2 (\phi - Sin.\,\phi),$$

$$= 4\pi r^3 \, Sin^4.\tfrac{1}{2}\phi \, (\phi - Sin.\,\phi),$$

Deze vergelijking gedifferentiëerd, geeft

$$\frac{\partial I}{\partial \phi} = 4\pi r^3 \left\{2\,Sin^3.\tfrac{1}{2}\phi.\,Cos.\tfrac{1}{2}\phi(\phi - Sin.\phi) + Sin^4.\tfrac{1}{2}\phi(1 - Cos.\phi)\right\}$$

$$= 4\pi r^3 Sin^3.\tfrac{1}{2}\phi\left\{2\,Cos.\tfrac{1}{2}\phi\,(\phi - Sin.\phi) + Sin.\tfrac{1}{2}\phi(1 - Cos.\phi)\right\}$$

$$= 4\pi r^3.\,2\,Sin^3.\tfrac{1}{2}\phi\left\{Cos.\tfrac{1}{2}\phi(\phi - Sin.\phi) + Sin^3.\tfrac{1}{2}\phi\right\} \;.\;.\; (1).$$

Dit quotient wordt $=0$ voor $Sin.\tfrac{1}{2}\phi = 0$ of voor $\tfrac{1}{2}\phi = 0$ en $\tfrac{1}{2}\phi = 180$. De eerste waarde behoort blijkbaar niet tot een maximum, en even zoo min de tweede, daar voor $\phi = 360^\circ$ de bazis der paraboloïde $=0$ wordt. Wij hebben dan nog de vergelijking

$$Cos.\tfrac{1}{2}\phi(\phi - Sin.\phi) + Sin^3.\tfrac{1}{2}\phi = 0 \;.\;.\;.\; (2)$$

te onderzoeken.

Omdat nu $\phi - Sin.\phi$ altijd positief is, zoo kan aan deze vergelijking niet voldaan worden, ten zij $Sin.\tfrac{1}{2}\phi$ of $Cos.\tfrac{1}{2}\phi$ negatief wordt. Het eerste zou vereischen, dat $\tfrac{1}{2}\phi$ in het derde kwadrant viel, en dat ϕ grooter dan 360° wierd, hetgeen voor een' enkelen tak der cicloïde onmogelijk is. De tweede onderstelling vereischt, dat $\tfrac{1}{2}\phi$ in het tweede en dus ϕ in het vierde kwadrant valle; en hierdoor hebben wij reeds eene benaderde waarde van ϕ. Dat zulk eene waarde tot een maximum behoort, kan men gemakkelijk uit (1) afleiden; want dezelve differentiërende, vindt men

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \phi^2} = 8\pi r^3.\left\{\tfrac{3}{2}.Sin^2.\tfrac{1}{2}\phi\,Cos.\tfrac{1}{2}\phi\left[Cos.\tfrac{1}{2}\phi(\phi - Sin\,\phi) + Sin^3.\tfrac{1}{2}\phi\right]\right.$$
$$\left. + Sin^3.\tfrac{1}{2}\phi\,\partial\left[Cos.\tfrac{1}{2}\phi(\phi - Sin.\phi) + Sin^3.\tfrac{1}{2}\phi\right]\right\},$$

welke vergelijking door de vergelijking (2) overgaat in

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \phi^2} = 12\pi r^3\,Sin^2.\tfrac{1}{2}\phi\,Cos\,\tfrac{1}{2}\phi,$$

hetgeen eene negative waarde oplevert, wanneer $Cos.\tfrac{1}{2}\phi$ negatief wordt.

Het valt nu verder niet moeijelijk, de waarde van ϕ uit (1) door eenige beproevingen naauwkeurig te vinden; doch daar dit niets merkwaardigs oplevert, houden wij er ons niet bij op.

CXCIV. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK JUN.

Van eenen bolvormigen driehoek gegeven zijnde de drie bogen, welke uit de hoekpunten naar het midden van de overstaande zijden gaan,

gaan, vraagt men, hoe hierdoor de zijden van den driehoek gevonden kunnen worden?

OPGELOST *door* A. B. DE BOCK JUN., J. BASSAN *en* J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* A. B. DE BOCK JUN.

Laat in driehoek ABC (*Fig.* 140) AF $= a$, BE $= b$ en CD $= c$ de gegevene bogen voorstellen, die de overstaande zijden midden door deelen, en stellen wij AD $=$ DB $= x$, AE $=$ EC $= y$ en BF $=$ FC $= z$, dan is, ingevolge een' bekenden regel,

$$Cos.\,x = \frac{Cos.\,2\,y + Cos.\,2\,z}{2\,Cos.\,c}, \quad Cos.\,y = \frac{Cos.\,2\,x + Cos.\,2\,z}{2\,Cos.\,b},$$

en $$Cos.\,z = \frac{Cos.\,2\,x + Cos.\,2\,y}{2\,Cos.\,a}.$$

De cosinus der dubbele bogen herleidende tot die der enkele bogen door de formule $Cos.\,2\,\phi = 2\,Cos^2.\,\phi - 1$, zoo veranderen de drie voorgaande vergelijkingen in

$$Cos.\,x\,Cos.\,c = Cos^2.\,y + Cos^2.\,z - 1 \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

$$Cos.\,y\,Cos.\,b = Cos^2.\,x + Cos^2.\,z - 1 \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

en $$Cos.\,z\,Cos.\,a = Cos^2.\,x + Cos^2.\,y - 1 \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

of wel stellende $Cos.\,x = u$, $Cos.\,y = v$, $Cos.\,z = w$, $Cos.\,a = a'$, $Cos.\,b = b'$ en $Cos.\,c = c'$,

$$u\,c' = v^2 + w^2 - 1 \quad . \quad (4), \qquad v\,b' = u^2 + w^2 - 1 \quad . \quad (5),$$

en $$w\,a' = u^2 + v^2 - 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Uit (4) volgt

$$u = \frac{v^2 + w^2 - 1}{c'},$$

hetwelk in (4) en (5) gesteld geeft

$$v\,b' - w^2 + 1 - \left(\frac{v^2 + w^2 - 1}{c'}\right)^2 = 0 \quad . \quad . \quad (7),$$

en $$w\,a' - v^2 + 1 - \left(\frac{v^2 + w^2 - 1}{c'}\right)^2 = 0 \quad . \quad . \quad (8).$$

Uit (7) volgt weder

$$c'^2\,v\,b' - w^2\,c'^2 + c'^2 - (v^2 - 1)^2 - 2\,w^2\,(v^2 - 1) - w^4 = 0,$$

of $$w^4 + 2\,w^2\,(v^2 - 1 + \tfrac{1}{2}c'^2) = c'^2\,v\,b' + c'^2 - (v^2 - 1)^2,$$

waaruit

$$w^2 = -(v^2 - 1 + \tfrac{1}{2}c'^2) \pm \sqrt{\{c'^2(v\,b' + 1) - (v^2 - 1)^2 + (v^2 - 1 + \tfrac{1}{2}c'^2)^2\}}$$

$= -$

$$= -(v^2 - 1 + \tfrac{1}{2}c'^2) \pm \sqrt{\{c'^2 b' v + c'^2 v^2 + \tfrac{1}{4}c'^4\}}$$

$$= -(v^2 - 1 + \tfrac{1}{2}c'^2) \pm c'\sqrt{\{b' v + v^2 + \tfrac{1}{4}c'^2\}} \quad . \quad . \quad (9).$$

Uit (8) volgt

$$w a' - v^2 + 1 - \left(\frac{v^2 - 1}{c'}\right)^2 - 2\frac{w^2}{c'^2}(v^2 - 1) - \frac{w^4}{c'^2} = 0,$$

hierin voor w^2 zijne waarde uit (9) schrijvende, komt er

$$w a' - v^2 + 1 - \left(\frac{v^2 - 1}{c'}\right)^2 - \frac{w^4}{c'^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$+ 2\frac{v^2 - 1}{c'^2}\{v^2 - 1 + \tfrac{1}{2}c'^2 \mp c'\sqrt{(b' v + v^2 + \tfrac{1}{4}c'^2)}\} = 0,$$

of

$$w a' + \left(\frac{v^2 - 1}{c'}\right)^2 - \frac{w^4}{c'^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\mp 2\frac{v^2 - 1}{c'}\sqrt{(b' v + v^2 + \tfrac{1}{4}c'^2)} = 0.$$

In deze vergelijking voor w^4 zijne waarde uit (9) stellende, komt er

$$a' w + \left(\frac{v^2 - 1}{c'}\right)^2 \mp 2\frac{v^2 - 1}{c'}\sqrt{(b' v + v^2 + \tfrac{1}{4}c'^2)} \quad . \quad . \quad .$$

$$-\frac{(v^2 - 1 + \tfrac{1}{2}c'^2)^2}{c'^2} - (b' v + v^2 + \tfrac{1}{4}c'^2) \pm 2\frac{v^2 - 1 + \tfrac{1}{2}c'^2}{c'}\sqrt{(b' + v^2 + \tfrac{1}{4}c'^2)} = 0,$$

of $\quad a' w - (v^2 - 1) - \tfrac{1}{4}c'^2 - (b' v + v^2 + \tfrac{1}{4}c'^2) \pm \quad . \quad . \quad .$

$$\pm c'\sqrt{(b' v + v^2 + \tfrac{1}{4}c'^2)} = 0,$$

of $\quad a' w - b' v - 2v^2 - \tfrac{1}{2}c'^2 + 1 \pm c'\sqrt{(b' v + v^2 + \tfrac{1}{4}c'^2)} = 0,$

waaruit volgt

$$a'^2 w^2 = \{b' v + 2v^2 + \tfrac{1}{2}c'^2 - 1 \mp c'\sqrt{(b' v + v^2 + \tfrac{1}{4}c'^2)}\}^2,$$

en hierin wederom voor w^2 zijne waarde uit (9) schrijvende, vindt men

$$-a'^2(v^2 - 1 + \tfrac{1}{2}c'^2 \mp c'\sqrt{(b' v + v^2 + \tfrac{1}{4}c'^2)}) = \quad . \quad . \quad .$$

$$. \{b' v + 2v^2 + \tfrac{1}{2}c'^2 - 1 \mp c'\sqrt{(b' v + v^2 + \tfrac{1}{4}c'^2)}\}^2.$$

Het tweede lid ontwikkelende en de wortelgrootheid in het eene lid der vergelijking brengende, komt er

$$a'^2(v^2 - 1 + \tfrac{1}{2}c'^2) + (b' v + 2v^2 + \tfrac{1}{2}c'^2 - 1)^2 + c'^2(b' v + v^2 + \tfrac{1}{4}c'^2)$$

$$= \pm\{a'^2 c' + 2c'(b' v + 2v^2 + \tfrac{1}{2}c'^2 - 1)\}\sqrt{(b' v + v^2 + \tfrac{1}{4}c'^2)}.$$

Deze vergelijking in het vierkant verheffende, verkrijgt men

$$\left\{a'^2(v^2-1+\tfrac{1}{2}c'^2)+(b'v+2v^2+\tfrac{1}{2}c'^2-1)^2+c'^2(b'v+v^2+\tfrac{1}{4}c'^2)\right\}^2$$
$$=c'^2(4v'^2+2b'v+c'^2-2+a'^2)^2(b'v+v^2+\tfrac{1}{4}c'^2),$$

of wel ontwikkelende

$$a'^4(v^2-1+\tfrac{1}{2}c'^2)^2+(b'v+2v^2+\tfrac{1}{2}c'^2-1)^4+c'^4(b'v+v^2+\tfrac{1}{4}c'^2)^2$$
$$+2a'^2(v^2-1+\tfrac{1}{2}c'^2)(b'v+2v^2+\tfrac{1}{2}c'^2-1)^2+2a'^2c'^2(v^2-1+\tfrac{1}{2}c'^2)$$
$$(b'v+v^2+\tfrac{1}{4}c'^2)+2c'^2(b'v+2v^2+\tfrac{1}{2}c'^2-1)^2(b'v+v^2+\tfrac{1}{4}c'^2)=$$
$$4c'^2\left\{(2v^2+b'v+\tfrac{1}{2}c'^2-1)^2+\tfrac{1}{4}a'^4+a'^2(2v'^2+2b'v+\tfrac{1}{2}c'^2-1)\right\}$$
$$(b'v+v^2+\tfrac{1}{4}c'^2),$$

of $a'^4(v^2-1+\tfrac{1}{2}c'^2)^2+(b'v+2v^2+\tfrac{1}{2}c'^2-1)^4+c'^4(b'v+v^2+\tfrac{1}{4}c'^2)^2$

$$+2a'^2(v^2-1+\tfrac{1}{2}c'^2)(b'v+2v^2+\tfrac{1}{2}c'^2-1)^2+2a'^2c'^2(v^2-1+\tfrac{1}{2}c'^2)$$
$$(b'v+v^2+\tfrac{1}{4}c'^2)-2c'^2(b'v+2v^2+\tfrac{1}{2}c'^2-1)^2(v^2-1+\tfrac{1}{2}c'^2)=a'^4c'^2$$
$$(b'v+v^2+\tfrac{1}{4}c'^2+4a'^2c'^2(2v^2+2b'v+\tfrac{1}{2}c'^2-1)(b'v+v^2+\tfrac{1}{4}c'^2),$$

of $a'^4(v^2-1+\tfrac{1}{2}c'^2)^2+(b'v+2v^2+\tfrac{1}{2}c'^2-1)^4+c'^4(b'v+v^2+\tfrac{1}{4}c'^2)^2$

$$+2a'^2(v^2-1+\tfrac{1}{2}c'^2)(b'v+2v^2+\tfrac{1}{2}c'^2-1)^2+2a'^2c'^2(-3v^2+1-\tfrac{1}{2}c'^2$$
$$-4b'v)(b'v+v^2+\tfrac{1}{4}c'^2)=a'^4c'^2(b'v+v^2+\tfrac{1}{4}c'^2).$$

Deze vergelijking ontwikkelende, zoo komt men op eene vergelijking van de achtste magt, waardoor de waarde van v gevonden wordt.

Op dezelfde wijze worden ook de overige onbekenden gevonden; blijkende het uit de vergelijking (4), (5) en (6) dat de twee andere onbekenden door symetrieke vergelijkingen voorgesteld worden.

CXCV. Voorstel.

Door A. B. de Bock Jun.

Men vraagt de vergelijking van de kromme te vinden, welke alle gelijkvormige ellipsen, die hetzelfde middelpunt hebben en waarvan de groote asſen op eene zelfde lijn liggen, onder eenen ſtandvastigen hoek doorſnijdt?

Oplossing door A. B. de Bock Jun.

De hoek, welken twee kromme lijnen ABC en DBF (*Fig.* 141), zich in B ſnijdende, maken, wordt gemeten door den hoek TBT' der raaklijnen in het ſnijpunt aan beide deze kromme lijnen getrokken; en daar *hoek* BTX = *hoek* BT'X + *hoek* T'BT is, zoo heeft men

$$\textit{Tang. hoek}\ BTX=\frac{\textit{Tang. hoek}\ BT'X+\textit{Tang. hoek}\ T'BT}{1-\textit{Tang. hoek}\ BT'X\ \textit{Tang. hoek}\ T'BT}.$$

Wanneer men nu de coördinaten der kromme ABC door x en y, en die van DBF door x' en y' voorstelt, en den hoek T'BT, α noemt, dan heeft men

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\frac{\partial y'}{\partial x'}+Tang.\,\alpha}{1-\frac{\partial y'}{\partial x'}Tang.\,\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots (1).$$

Om deze vergelijking toe te passen op ons vraagstuk, zoo nemen wij den oorsprong der coördinaten in het middelpunt der ellipsen, en dan zal de vergelijking van eene dezer ellipsen kunnen voorgesteld worden door

$$y^2 a^2 = b^2 (a^2 - x^2),$$

terwijl wij de coördinaten der gezochte kromme door x' en y' blijven voorstellen. Uit deze laatste vergelijking volgt nu

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{x}{y}\cdot\frac{b^2}{a^2}.$$

Daar nu echter alle de ellipsen gelijkvormig moeten wezen, zoo zal het quotient $\frac{b}{a}$ voor elk derzelve dezelfde standvastige waarde blijven behouden; stellende dus $\frac{b^2}{a^2}=n^2$, dan hebben wij voor elke willekeurige ellips

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-n^2\frac{x}{y}.$$

Deze waarde in (1) stellende, nemende $Tang.\,\alpha=p$, dan vindt men

$$-n^2\frac{x}{y}=\frac{\frac{\partial y'}{\partial x'}+p}{1-p\frac{\partial y'}{\partial x'}}$$

of $$p n^2\frac{x}{y}\cdot\frac{\partial y'}{\partial x'}-n^2\frac{x}{y}=\frac{\partial y'}{\partial x'}+p,$$

waaruit $$\frac{\partial y'}{\partial x'}=\frac{yp+n^2x}{pn^2x-y},$$

en dewijl het snijpunt tot de beide krommen behoort, zoo mag men x en y met x' en y' verwisselen, hetgeen geeft

$\partial y'$

$$\frac{\partial y'}{\partial x'}=\frac{y'p+n^2x'}{pn^2x'-y'} \quad \ldots\ldots (2).$$

Om deze vergelijking te integreren ſtellen wij $\frac{x'}{y'}=u$, waaruit volgt

$$\partial x'=u\partial y'+y'\partial u,$$

terwijl (2) overgaat in

$$\frac{\partial y'}{\partial x'}=\frac{p+n^2u}{pn^2u-1},$$

of
$$(pn^2u-1)\partial y'=(p+n^2u)\partial x';$$

voor $\partial x'$ zijne waarde in u ſchrijvende, heeft men

$$(pn^2u-1)\partial y'=(p+n^2u)(u\partial y'+y'\partial u),$$

waaruit
$$\left(\frac{pn^2u-1}{p+n^2u}-u\right)\partial y'=y'\partial u,$$

hetgeen geeft

$$\frac{\partial u}{\frac{pn^2u-1}{p+n^2u}-u}=\frac{\partial y'}{y'},$$

of
$$\frac{(p+n^2u)\partial u}{-1+pn^2u-up-n^2u^2}=\frac{\partial y'}{y'},$$

of
$$\frac{\partial y'}{y'}=\frac{(p+n^2u)\partial u}{-1+up(n^2-1)-n^2u^2}.$$

Stellende nu $u=z+\frac{1}{2}\frac{p}{n^2}(n^2-1)$, dan verandert deze vergelijking in

$$\frac{\partial y'}{y'}=-\frac{(p+\frac{1}{2}p(n^2-1)+n^2z)\partial z}{1-\frac{1}{4}p^2(n^2-1)^2+n^2z^2}.$$

Integrerende vindt men

$$Log.y'+Log.C=-\tfrac{1}{2}p(n^2+1)\int\frac{\partial z}{n^2z^2-\frac{1}{4}p^2(n^2-1)^2+1} \quad \ldots$$
$$-n^2\int\frac{z\partial z}{1-\frac{1}{4}p^2(n^2-1)^2+n^2z} \quad \ldots (3).$$

Maar nu is

$$\int\frac{\partial z}{n^2z^2-\frac{1}{4}p^2(n^2-1)^2+1}=\frac{1}{n^2}\int\frac{\partial z}{z^2-\frac{1}{4}\frac{p^2}{n^2}(n^2-1)^2+\frac{1}{n^2}}=$$

$$=\frac{1}{2n^2\sqrt{(\frac{1}{4}\frac{p^2}{n^2}(n^2-1)^2-\frac{1}{n^2})}}\left\{\int\frac{\partial z}{z-\sqrt{(\frac{1}{4}\frac{p^2}{n^2}(n^2-1)^2-\frac{1}{n^2})}}\right.$$

$$\left.-\int\frac{\partial z}{z+\sqrt{(\frac{1}{4}\frac{p^2}{n^2}(n^2-1)^2-\frac{1}{n^2})}}\right\}=\frac{1}{2\sqrt{(\frac{1}{4}p^2n^2(n^2-1)^2-n^2)}}$$

$$\text{Log.}\frac{nz-\sqrt{(\frac{1}{4}p^2(n-1)^2-1)}}{nz+\sqrt{(\frac{1}{4}p^2(n^2-1)^2-1)}}.$$

Op dezelfde wijze is

$$\int\frac{z\partial z}{1-\frac{1}{4}p^2(n^2-1)^2+n^2z^2}=\frac{1}{2n^2}\text{Log.}(1-\frac{1}{4}p^2(n^2-1)^2+n^2z^2).$$

De waarde dezer integralen in (3) schrijvende, vindt men

$$\text{Log.}\,y'C=\frac{p(n^2+1)}{4n\sqrt{(\frac{1}{4}p^2(n^2-1)^2-1)}}\text{Log.}\frac{nz+\sqrt{(\frac{1}{4}p^2(n^2-1)^2-1)}}{nz-\sqrt{(\frac{1}{4}p^2(n^2-1)^2-1)}}$$

$$-\tfrac{1}{2}\text{Log.}(n^2z^2-\tfrac{1}{4}p^2(n^2-1)^2+1),$$

of wel voor z zijne waarde $u-\frac{1}{2}\frac{p}{n^2}(n-1)$ schrijvende,

$$\text{Log.}\,y'C=-\text{Log.}\sqrt{(1-up(n^2-1)+n^2u^2)}+\ldots$$

$$+\frac{p(n^2+1)}{4n\sqrt{(\frac{1}{4}p^2(n^2-1)^2-1)}}\text{Log.}\frac{nu-\frac{1}{2}\frac{p^2}{n}(n^2-1)+\sqrt{(\frac{1}{4}p^2(n^2-1)^2-1)}}{nu-\frac{1}{2}\frac{p^2}{n}(n^2-1)-\sqrt{(\frac{1}{4}p^2(n^2-1)^2-1)}},$$

en hierin voor u, $\frac{x'}{y'}$ schrijvende, komt er

$$\text{Log.}\,C'y'=-\text{Log.}\frac{\sqrt{(y'^2-p(n^2-1)y'^2+x'^2)}}{y'}\ldots$$

$$+\frac{p(n^2+1)}{4n\sqrt{(\frac{1}{4}p^2(n^2-1)^2-1)}}\text{Log.}\frac{nx'-\frac{1}{2}\frac{p^2}{n}(n^2-1)y'+y'\sqrt{(\frac{1}{4}p^2(n^2-1)^2-1)}}{nx'-\frac{1}{2}\frac{p^2}{n}(n^2-1)y'-y'\sqrt{(\frac{1}{4}p^2(n^2-1)^2-1)}},$$

waarvoor men ook schrijven mag

$$\text{Log.}\,C\sqrt{(y'^2-p(n^2-1)y'^2+x'^2)}=\ldots$$

$$\frac{p(n^2+1)}{4n\sqrt{(\frac{1}{4}p^2(n^2-1)^2-1)}}\text{Log.}\frac{nx'-\frac{1}{2}\frac{p^2}{n}(n^2-1)y'+y'\sqrt{(\frac{1}{4}p^2(n^2-1)^2-1)}}{nx'-\frac{1}{2}\frac{p^2}{n}(n^2-1)y'-y'\sqrt{(\frac{1}{4}p^2(n^2-1)^2-1)}}\quad(4).$$

AAN-

AANMERKING van J. P. DELPRAT. De standvastige in deze vergelijking wordt bepaald door een punt aan te nemen, door welke de kromme moet gaan, of door eene daarmede gelijkkomende voorwaarde.

Indien men in de gevondene vergelijking $n^2 = 1$ stelt, hetgeen overeenkomt met de onderstelling, dat de ellipsen in cirkels overgaan, dan gaat de vergelijking (4) over in

$$Log. C \sqrt{(y'^2 + x'^2)} = \frac{p}{2\sqrt{-1}} Log. \frac{x' + y'\sqrt{-1}}{x' - y'\sqrt{-1}}.$$

Het laatste lid kan men als volgt herleiden:

$$\frac{p}{2\sqrt{-1}} Log. \frac{x' + y'\sqrt{-1}}{x' - y'\sqrt{-1}} = \frac{p}{2\sqrt{-1}} \left\{ Log.(1 + \frac{y'}{x'}\sqrt{-1}) - Log.(1 - \frac{y'}{x'}\sqrt{-1}) \right\},$$

en de logarithmen ontwikkelende,

$$\frac{p}{2\sqrt{-1}} Log. \frac{x' + y'\sqrt{-1}}{x' - y'\sqrt{-1}} = \frac{p}{2\sqrt{-1}} \ldots$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y'}{x'}\sqrt{-1} - \frac{1}{2}(\frac{y'}{x'}\sqrt{-1})^2 + \frac{1}{3}(\frac{y'}{x'}\sqrt{-1})^3 - enz. \\ \frac{y'}{x'}\sqrt{-1} + \frac{1}{2}(\frac{y'}{x'}\sqrt{-1})^2 + \frac{1}{3}(\frac{y'}{x'}\sqrt{-1})^3 + enz. \end{array} \right\}$$

$$= p\left(\frac{y'}{x'} - \frac{1}{3}\frac{y'^3}{x'^3} + \frac{1}{5}\frac{y'^5}{x'^5} - enz.\right)$$

$$= p \; Boog. Tang. \frac{y'}{x'},$$

zoodat wij voor $n^2 = 1$ vinden

$$Log. C \sqrt{(y'^2 + x'^2)} = p \; Boog. Tang. \frac{y'}{x'} \quad \ldots \quad (\alpha).$$

Stellen wij nu voor $x' = 0$ $y = a$, dan vinden wij

$$Log. C a = \tfrac{1}{2} p \pi,$$

of

$$Log. C = \tfrac{1}{2} p \pi - Log. a,$$

en deze waarden in (α) gesteld, geeft

$$Log. \frac{\sqrt{(y'^2 + x'^2)}}{a} = p\left(\tfrac{1}{2}\pi - Boog. Tang. \frac{y'}{x'}\right)$$

$$= -p \; Boog. Tang. \frac{x'}{y'} \quad \ldots \ldots \quad (\beta).$$

Indien men de kromme lijn door den oorsprong der coördinaten

 wil

wil laten gaan, dan kan men à priori inzien, dat, zal de kromme in dit geval alle de opvolgende cirkels onder denzelfden hoek doorsnijden, de kromme zelve moet overgaan in eene regte lijn; doch dan is het tevens duidelijk, dat deze regte lijn de cirkels niet anders dan onder eenen regten hoek kan doorsnijden, en dat er oneindig vele regte lijnen aan de vraag voldoen. Zien wij nu hoe de vergelijking (β) deze omstandigheden aanwijst. Voor $a = 0$ wordt zij

$$Log.\,\infty = p\, Boog.\,Tang.\,\frac{x'}{y'}.$$

Hieraan kan niet voldaan worden, dan door p oneindig te nemen; en daar p de tangens van den hoek voorstelt, waaronder de kromme lijnen zich snijden, zoo moet deze hoek regt wezen. Doch p oneindig stellende, zoo gaat de laatst gevondene vergelijking over in

$$\frac{\infty}{\infty} = Boog.\,Tang.\,\frac{x'}{y'} = \frac{0}{0}.$$

Deze waarde alzoo onbepaald zijnde, toont aan, dat deze vergelijking voldaan zal worden, zoodra men slechts eene of andere willekeurige standvastige waarde voor $Boog.\,Tang.\,\frac{x'}{y'}$ aanneemt; hierdoor wordt dan ook $\frac{x'}{y'}$ standvastig, en stelt dan eene regte lijn, door den oorsprong gaande, voor; en daar men elke willekeurige waarde hiervoor kan nemen, zoo geeft de vergelijking

$$Boog.\,Tang.\,\frac{x'}{y'} = \frac{0}{0};$$

een stelsel van een oneindig aantal regte lijnen, door den oorsprong gaande, te kennen: waardoor al hetgene wij boven opgaven door de vergelijking (α) ten volle bevestigd wordt.

CXCVI. VOORSTEL.

Door J. P. DELPRAT.

Wanneer men de overstaande zijden AB *en* CD (*Fig.* 142) *van eenen onregelmatigen vierhoek* ABDC *zoodanig door eene regte lijn* PQ *snijdt, dat* AP : PB = CQ : QD *is, en de overstaande zijden* AC *en* BD *door eene lijn* RS *snijdt, zoodanig, dat* AR : RC = BS : SD *is, dan zullen deze lijnen* PQ *en* RS *elkander zoodanig in*

in T *snijden, dat men heeft* RT : TS = AP : PB *en* PT : TQ = AR : RC. *Men vraagt deze stelling te bewijzen?*

OPGELOST *door* J. P. DELPRAT, I. R. SCHMIDT *en* A. B. DE BOCK JUN.

I. OPLOSSING *van* J. P. DELPRAT.

Men verlenge in den gegeven' vierhoek ABDC (*Fig.* 142) twee der zijden AC en BD, alsmede PQ, totdat zij zich onderling in L en M snijden, dàn kan men de lijn PQ als eene transversaal van den vierhoek ABDC beschouwen, en uit de eigenschappen der transversalen heeft men (J. DE GELDER, *Beginselen der Meetkunst*, XIV *B.* 3 *Stelling.*)

$$AP : CL : QD : BM = PB : AL : CQ : DM,$$

en in den vierhoek ABSR, TP als transversaal beschouwende,

$$PB : SM : TR : AL = AP : RL : TS : BM.$$

Deze vergelijkingen met elkander vermenigvuldigende en de gelijke factoren weglatende, zoo vindt men

$$CL \times SM \times QD \times TR = DM \times RL \times CQ \times TS \quad . \quad (A).$$

Maar uit de evenredigheid AP : PB = CQ : QD van de onderstelling volgt

$$PB \times CQ = AP \times QD;$$

deze vergelijking met de eerste vermenigvuldigd en de gelijke factoren wederom weglatende, komt er:

$$CL \times BM = AL \times DM,$$

waaruit volgt $CL : AL = DM : BM,$

alsmede $CL - AL : DM - BM = CL : DM,$

of $AC : DB = CL : DM.$

Maar volgens de onderstelling is

$$AC : DB = CR : DS,$$

dus ook $CL : DM = CR : DS,$

of $CL : CR = DM : DS,$

en hieruit volgt wederom

$$CL - CR : DM - DS = CL : DM,$$

of $RL : SM = CL : DM,$

of $RL \times DM = SM \times CL,$

hetwelk in de vergelijking (A) overgebragt geeft

$$QD \times TR = CQ \times TS,$$

of $QD : CQ = TS : TR.$

Op

Op dezelfde wijze bewijst men de evenredigheid

$$CR : AR = QT : TP,$$

door de lijnen CD, RS en AB te verlengen.

II. Oplossing *van* I. R. Schmidt.

Zij OPQR, *Fig.* 143, de gegevene vierhoek, en nemen wij de zijde OR als as der abscisſen en O als den oorſprong der coördinaten aan. Verder ſtellen wij de coördinaten van het punt

O . . . $x = 0$ en $y = 0$
R . . . $x = \alpha$ en $y = 0$
P . . . $x = \alpha'$ en $y = \beta'$
Q . . . $x = \alpha''$ en $y = \beta''$.

Stellen wij nu nog, ingevolge het voorſtel,

$$OA = \frac{1}{p} OP, \qquad RB = \frac{1}{p} RQ,$$

$$OC = \frac{1}{q} OR \quad \text{en} \quad PD = \frac{1}{q} PQ,$$

dan zijn de coördinaten van het punt

A . . . $x = \frac{1}{p}\alpha'$ $\quad y = \frac{1}{p}\beta'$,

B . . . $x = \alpha - \frac{1}{p}(\alpha - \alpha'')$ $\quad y = \frac{1}{p}\beta''$,

C . . . $x = \frac{1}{q}\alpha$ $\quad y = 0$,

D . . . $x = \alpha' + \frac{1}{q}(\alpha'' - \alpha')$ en $y = \beta' + \frac{1}{q}(\beta'' - \beta')$.

Hierdoor is nu de vergelijking van de lijn AB (I. R. Schmidt, *Hoogere Meetkunst*, § 35)

$$x = \frac{(p-1)\alpha + \alpha'' - \alpha'}{\beta'' - \beta'} y + \frac{\alpha'\beta'' - \beta'(\alpha'' + (p-1)\alpha)}{p(\beta'' - \beta')},$$

en van de lijn CD

$$x = \frac{(q-1)\alpha' + \alpha'' - \alpha}{(q-1)\beta' + \beta''} y + \frac{1}{q}\alpha.$$

Voor het ſnijpunt P dezer lijnen, zijn de coördinaten van beide de lijnen dezelfde, zoodat uit de beide laatſte vergelijkingen volgt

(q—1)

$$\left\{\frac{(q-1)\alpha'+\alpha''-\alpha}{(q-1)\beta'+\beta''}-\frac{(p-1)\alpha'+\alpha''-\alpha}{\beta''-\beta'}\right\},$$

$$=\frac{\alpha'\beta''-\beta'(\alpha''+(p-1)\alpha)}{p(\beta''-\beta')}-\frac{1}{q}\alpha,$$

of
$$\frac{(q\alpha'-p\alpha)\beta''-(q\alpha''+(pq-p-q)\alpha)\beta'}{\{(q-1)\beta'+\beta''\}(\beta''-\beta')},$$

$$=\frac{(q\alpha'-p\alpha)\beta''-(q\alpha''+(pq-p-q)\alpha)\beta'}{pq(\beta''-\beta')},$$

dus
$$y=\frac{(q-1)\beta'+\beta''}{pq}$$

$$=\frac{1}{p}\left\{\beta'+\frac{1}{q}(\beta''-\beta')\right\}.$$

Dat is dus

$$PK=\frac{1}{p}DL,$$

waaruit onmiddellijk volgt

$$CP=\frac{1}{p}CD,$$

hetgeen bewezen moest worden.

Neemt men nu de lijn OP als as der absciſſen aan, dan kan men op dezelfde wijze bewijzen, dat

$$AP=\frac{1}{q}AB \text{ is.}$$

III. Oplossing *van* A. B. de Bock Jun.

Zij, *Fig.* 144, ABDC de voorgeſtelde vierhoek, en trekken wij de lijnen LD en CV evenwijdig aan PQ en AG, RF, IB, CE, SH en KQ loodregt op PQ, dan zal men uit de gelijkvormigheid der driehoeken hebben

$$DS:SM=DB:BL \text{ en } RC:RN=AC:AV,$$

waaruit volgt

$$DS:HS-QK=DB:BI-QK \text{ en } RC:RF-CE=AC:AG-CE;$$

deze evenredigheden in elkander deelende, komt er

$$\frac{DS}{RC}:\frac{HS-QK}{RF-CE}=\frac{DB}{AC}:\frac{BI-QK}{AG-CE} \quad \ldots\ldots (A).$$

Maar volgens de onderſtelling is

$$AR:RC=BS:SD,$$

 dus

dus $AR+RC:RC=BS+SD:SD$,

of $AC:RC=BD:SD$,

dat is $$\frac{DS}{RC}=\frac{DB}{AC}.$$

Hierdoor geeft (A)

$$\frac{HS-QK}{RF-CE}=\frac{BI-QK}{AG-CE},$$

of $HS-QK:RF-CE=BI-QK:AG-CE$. (B).

Maar $BI:AG=QK:CE$,

dus $BI-QK:AG-CE=QK:CE$,

hierdoor geeft (B)

$$HS-QK:RF-CE=QK:CE,$$

waaruit volgt $HS:RF=QK:CE$.

Maar $HS:RF=TS:TR$,

dus $TS:TR=QK:CE=CQ:QD$,

hetgeen bewezen moest worden.

Op dezelfde wijze bewijst men, dat

$$PT:TQ=AR:RC=BS:SD.$$

CXCVII. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Wanneer de hoeken van eenen driehoek midden door worden gedeeld, door lijnen, die tot de overstaande zijden loopen, welke gelijk a, b en c zijn, zoo vraagt men de stukken te berekenen, waarin deze lijnen elkander en de zijden van den driehoek verdeelen, alsmede de inhouden van de driehoeken te vinden, welke hierdoor in de figuur ontstaan?

OPGELOST *door* I. R. SCHMIDT, J. JONKHERT, A. B. DE BOCK JUN. *en* J. BASSAN.

OPLOSSING *van* I. R. SCHMIDT.

§. 1. Zij ABC, *Fig.* 145, de gegevene driehoek, waarin de lijnen AA', BB' en CC' de hoeken A, B en C midden door deelen; stellen wij $AB=c$, $AC=b$ en $BC=a$, alsmede kortheidshalve $\frac{1}{2}(a+b+c)=s$, dan is

$$\tfrac{1}{2}(a+b-c)=s-c,\ \tfrac{1}{2}(a+c-b)=s-b$$

en $$\tfrac{1}{2}(b+c-a)=s-a,$$

terwijl het bekend is, dat men alsdan heeft voor den inhoud

$$I=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)s} \quad \ldots \quad (1).$$

De-

De straal van den ingeschreven cirkel $DA'=DB'=DC'=r$ stellende, zoo is ook

$$I=\tfrac{1}{2}ar+\tfrac{1}{2}br+\tfrac{1}{2}cr,$$

dus $$r=\frac{I}{s}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \quad \ldots \quad (2).$$

Hierdoor vindt men dadelijk

$$\textit{inhoud drieh.}\,ADB=\tfrac{1}{2}c\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$

$$\textit{inhoud drieh.}\,ADC=\tfrac{1}{2}b\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$

$$\textit{inhoud drieh.}\,CDB=\tfrac{1}{2}a\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

§ 2. Men heeft verder

$AC'+BC'=c$, $AB'+CB'=b$ en $CA'+BA'=a$.

Maar bovendien is

$$AC'=AB',\ CB'=CA' \text{ en } BC'=BA',$$

dus $AB'+BC'=c$, $AB'+CA'=b$ en $CA'+BC'=a$, waarvan de halve som is

$$AB'+BC'+CA'=s,$$

en hiervan elk der voorgaande aftrekkende, blijft er

$$\left.\begin{array}{l} CA'=CB'=s-c \\ BC'=BA'=s-b \\ AB'=AC'=s-a \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (3).$$

§ 3. Voorts is

$$AD=\sqrt{(AC'^2+DC'^2)}=\sqrt{\left\{(s-a)^2+\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}\right\}}$$

$$=\sqrt{\left\{(s-a)\frac{s(s-a)+(s-b)(s-c)}{s}\right\}},$$

maar $s(s-a)+(s-b)(s-c)=2s^2-s(a+b+c)+bc$

$$=bc,$$

omdat $a+b+c=2s$ zijnde, $s(a+b+c)=2s^2$ is. Hierdoor vinden wij

$$\left.\begin{array}{l} AD=\sqrt{\dfrac{bc(s-a)}{s}} \\[2ex] BD=\sqrt{\dfrac{ac(s-b)}{s}} \\[2ex] CD=\sqrt{\dfrac{ab(s-c)}{s}} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (4).$$

§ 4. Vermenigvuldigen wij deze uitdrukkingen, dan komt er

$$AD \times BD \times CD = \frac{abc}{s} \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = abc\frac{r}{s} \quad (5),$$

dat is: *Het product der afstanden van het middelpunt des ingeschreven cirkels tot de hoekpunten staat tot het product der drie zijden van den driehoek, gelijk de middellijn van den ingeschreven cirkel tot den omtrek van den driehoek.*

§ 5. Daar de lijnen, die de hoeken midden door deelen, de overstaande zijden in rede verdeelen, als de zijden, die aan deze deelen grenzen, zoo hebben wij

$$AC' : C'B = b : a \text{ en } AC' + C'B = c,$$
$$BA' : A'C = c : b \text{ en } BA' + A'C = a,$$
$$CB' : B'A = a : c \text{ en } CB' + B'A = b,$$

waaruit wij voor de deelen van de zijden vinden

$$\left.\begin{array}{ll} AC' = \frac{bc}{a+b}, & C'B = \frac{ac}{a+b}, \\ BA' = \frac{ca}{c+b}, & A'C = \frac{ba}{c+b}, \\ CB' = \frac{ab}{a+c} \text{ en } & B'A = \frac{cb}{a+c}, \end{array}\right\} \ldots\ldots (6),$$

waaruit nog door vermenigvuldiging volgt

$$AC' \times BA' \times CB' = C'B \times A'C \times B'A = \frac{a^2b^2c^2}{(a+b)(b+c)(c+a)} \quad (7).$$

§ 6. Daar $C'C'' = AC' - AC''$ is, zoo heeft men door (6) en (3)

$$C'C'' = \frac{bc}{a+b} - (s-a) = \frac{bc - (a+b)(s-a)}{a+b}$$
$$= \frac{2bc - (a+b)(b+c-a)}{2(a+b)}$$
$$= \frac{2bc - c(a+b) + (a+b)(a-b)}{2(a+b)} = \frac{bc - ac + (a-b)(a+b)}{2(a+b)}$$
$$= \frac{-c(a-b) + (a-b)(a+b)}{2(a+b)} = \frac{(a-b)(a+b-c)}{2(a+b)},$$

hieruit hebben wij dus

C'C''

$$\left.\begin{aligned} C'C'' &= \frac{(a-b)(s-c)}{a+b} \\ A'A'' &= \frac{(b-c)(s-a)}{c+b} \\ B'B'' &= \frac{(c-a)(s-b)}{a+c} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (8).$$

§ 7. Omdat AD den hoek A midden door deelt, zoo is in den driehoek CAC'

$$CA : AC' = CD : DC',$$

en bij gevolg door (6) en (4)

$$b : \frac{bc}{a+b} = \sqrt{\frac{ab(s-c)}{s}} : DC'.$$

Zoodat wij hieruit trekken

$$\left.\begin{aligned} DC' &= \frac{c}{a+b}\sqrt{\frac{ab(s-c)}{s}} \\ DB' &= \frac{b}{a+c}\sqrt{\frac{ac(s-b)}{s}} \\ DA' &= \frac{a}{b+c}\sqrt{\frac{bc(s-a)}{s}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (9).$$

Welke uitdrukkingen wij, offchoon met meerder moeite, ook zouden gevonden hebben door op te merken, dat men heeft

$$DC' = \sqrt{(DC''^2 + C'C''^2)},$$

en zoo ook met de twee overige.

§ 8. Door de uitdrukkingen (4) en (9) bij elkander te tellen, verkrijgen wij

$$CC = \sqrt{\frac{ab(s-c)}{s}} + \frac{c}{a+b}\sqrt{\frac{ab(s-c)}{s}}$$

$$= \left(1 + \frac{c}{a+b}\right)\sqrt{\frac{ab(s-c)}{s}} = \frac{a+b+c}{a+b}\sqrt{\frac{ab(s-c)}{s}},$$

dat is

$$\left.\begin{aligned} CC' &= \frac{2\sqrt{abs(s-c)}}{a+b} \\ BB' &= \frac{2\sqrt{acs(s-b)}}{a+c} \\ \text{en} \quad AA' &= \frac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (10).$$

Deze uitdrukkingen kunnen ook aldus geschreven worden

$$CC' = \sqrt{\frac{ab(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{ab((a+b)^2 - c^2)}{(a+b)^2}},$$

dat is $\quad CC' = \sqrt{\left\{ab - \frac{ac}{a+b} \times \frac{bc}{a+b}\right\}},$

of $\quad CC'^2 = BC \times AC - BC' \times AC',$

$\quad BB'^2 = CB \times AB - CB' \times AB'$ $\Big\}$ . . . . (11),

en $\quad AA'^2 = BA \times CA - BA' \times CA'$

§ 9. Door de waarden te vergelijken, die wij in (4), (9) en (10) gevonden hebben, verkrijgen wij nog

$DC' : CC' = c : a+b+c,$

$DB' : BB' = b : a+b+c$ $\Big\}$ . . . . (12)

en $\quad DA' : AA' = a : a+b+c$

$DC : CC' = a+b : a+b+c,$

$DB : BB' = a+c : a+b+c$ $\Big\}$ . . . (13)

en $\quad DA : AA' = b+c : a+b+c$

$DC' : DC = c : a+b,$

$DB' : DB = b : a+c$ $\Big\}$ . . . . (14).

en $\quad DA' : DA = a : b+c$

§ 10. Hieruit volgt verder nog zie § 11,

$$\frac{DC'}{CC'} + \frac{DB'}{BB'} + \frac{DA'}{AA'} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1 \quad . . . (15).$$

al welke stellingen gemakkelijk in woorden kunnen worden uitgedrukt.

Op dezelfde wijze vinden wij ook nog

$$\frac{DC}{CC'} \times \frac{DB}{BB'} \times \frac{DA}{AA'} = 2 \quad . . . . (16).$$

§ 11. Vermenigvuldigt men (15) met $CC' \times BB' \times AA'$, dan verkrijgt men

$$DC' \times BB' \times AA' + DB' \times CC' \times AA' + DA' \times CC' \times BB'$$
$$= CC' \times BB' \times AA',$$

of wanneer wij voor AA', BB' en CC' schrijven $AD + DA'$, $DB + DB'$ en $CD + DC'$,

$$DC'(BD + DB')(AD + DA') + DB'(CD + DC')(AD + DA')$$
$$+ DA'(CD + DC')(BD + DB') = (AD + DA') \times$$
$$(BD + B'D)(CD + DC'),$$

wel-

welke producten ontwikkeld zijnde, geven zullen

$$AD \times BD \times CD = AD \times B'D \times C'D + BD \times A'D \times C'D + CD \times A'D \times B'D + 2\,A'D \times B'D \times C'D \quad \ldots \quad (17).$$

Deze vergelijking zou men ook verkrijgen door (16) op eene overeenkomstige wijze te behandelen.

CXCVIII. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Wanneer men de punten, waarin de ingeschreven cirkel van eenen driehoek, die a, b en c tot zijden heeft, de zijden aanraakt, tot eenen driehoek vereenigt, dan vraagt men de zijden van dezen driehoek te berekenen, alsmede de stukken, waarin zij de lijnen verdeelen, die van de hoekpunten tot het middelpunt van den ingeschreven' cirkel getrokken worden. Eindelijk begeert men nog den inhoud van de driehoeken te berekenen, welke hierdoor in de figuur ontstaan?

OPGELOST door I. R. SCHMIDT, J. JONKHERT, J. BASSAN en A. B. DE BOCK JUN.

OPLOSSING van I. R. SCHMIDT.

§ 1. Zij ABC (*Fig.* 146) de gegeven driehoek, waarin de lijnen AA′, BB′ en CC′ de hoeken midden door deelen, zoodat D het middelpunt des ingeschreven' cirkels zijnde, de loodlijnen DA″, DB″ en DC″ de raakpunten A″, B″ en C″ van den cirkel met den gegeven' driehoek bepalen; verder trekke men de lijnen A″B″, B″C″ en C″A″ en gebruike vóór de zijden BC, AC en AB de letters *a*, *b* en *c*, even als wij dit in het voorgaande voorstel gedaan hebben, waardoor wij dan ter oplossing van het tegenwoordig voorstel gebruik kunnen maken van de uitkomsten in de voorgaande oplossing gevonden, zonder dezelve op nieuw hier wederom af te leiden.

§ 2. Omdat nu AB″ = AC″ en DB″ = DC″ is, snijden AD en B″C″ elkander regthoekig, en bij gevolg is

$$AD : AB'' = DB'' : \tfrac{1}{2}B''C'',$$

zoodat

$$B''C'' = \frac{2 \times AB'' \times DB''}{AD},$$

en hierin de waarden voor AB″, DB″ en AD in de voorgaande oplossing § 2, 1 en 3 gevonden, zoo hebben wij

 B″C″

$$B'C' = \frac{2(s-a)\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}{\sqrt{s}} : \frac{\sqrt{bc(s-a)}}{\sqrt{s}}$$

$$= \frac{2(s-a)\sqrt{(s-b)(s-a)}}{\sqrt{bc}},$$

zoodat
$$\left.\begin{aligned} B'C' &= 2(s-a)\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \\ C'A' &= 2(s-b)\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ac}} \\ \text{en} \quad A'B' &= 2(s-c)\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad (1).$$

Het product dezer zijden geeft

$$A'B' \times B'C' \times C'A' = 8\,\frac{(s-a)^2(s-b)^2(s-c)^2}{abc} \quad . \quad (2).$$

§ 3. Voor de lijnen AA_1, BB_1, CC_1 hebben wij, in gevolge § 2 en 3 der voorgaande oplossing,

$$AA_1 = \frac{AB''^2}{AD} = (s-a)^2\sqrt{\frac{s}{bc(s-a)}},$$

en bij gevolg

$$\left.\begin{aligned} AA_1 &= (s-a)\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}, \\ BB_1 &= (s-b)\sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}} \\ \text{en} \quad CC_1 &= (s-c)\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3).$$

§ 4. Daar $Cos.\,\tfrac{1}{2}A = \frac{AA_1}{AB''}$ is, zoo hebben wij

$$\left.\begin{aligned} Cos.\,\tfrac{1}{2}A &= \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}, \\ Cos.\,\tfrac{1}{2}B &= \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}} \\ \text{en} \quad Cos.\,\tfrac{1}{2}C &= \sqrt{\frac{s(s-b)}{ab}}; \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4).$$

en daar $Sin.\,\tfrac{1}{2}A = \frac{\tfrac{1}{2}B'C'}{AB''}$ is, vinden wij nog

Sin.

$$\left.\begin{aligned} Sin.\tfrac{1}{2}A &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \\ Sin.\tfrac{1}{2}B &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}} \\ \text{en} \quad Sin.\tfrac{1}{2}C &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5).$$

Hetgeen tot een nieuw bewijs voor deze bekende formulen verstrekken kan.

§ 5. Voor den inhoud van driehoek $AB'C'$ hebben wij (verg. (1) en (3))

$$AA_1 \times \tfrac{1}{2}B'C' = (s-a)^2 \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \times \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},$$

$$\left.\begin{aligned} \text{zoodat} \quad \triangle AB'C' &= \frac{(s-a)^2}{bc} \times I, \\ \triangle BA'C' &= \frac{(s-b)^2}{ac} \times I \\ \text{en} \quad \triangle CA'B' &= \frac{(s-c)^2}{bc} \times I; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6)$$

waarin I den inhoud van den driehoek ABC voorstelt. Deze vergelijkingen verkrijgt men ook door de bekende eigenschap der driehoeken, die eenen hoek gemeen hebben.

§ 6. Trekken wij de som dezer driehoeken van den geheelen driehoek af, dan vinden wij voor den inhoud van den driehoek $A'B'C'$

$$\begin{aligned} \triangle A'B'C' &= I\left\{1 - \frac{(s-a)^2}{bc} - \frac{(s-b)^2}{ac} - \frac{(s-c)^2}{bc}\right\} \\ &= \frac{I}{abc}\left\{abc - a(s-a)^2 - b(s-b)^2 - c(s-c)^2\right\} \\ &= \frac{I}{4abc}\left\{4abc - a(b+c-a)^2 - b(a+c-b)^2 - c(a+b-c)^2\right\}, \end{aligned}$$

hetgeen ontwikkeld zijnde, geeft

$$\begin{aligned} \triangle A'B'C' = \frac{I}{4abc}\{&-a^3-b^3-c^3-2abc+a^2b+a^2c+b^2a \\ &+b^2c+c^2a+c^2b\}, \end{aligned}$$

en daar de laatste factor juist de ontwikkeling is van

$$(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) \text{ of van } 8(s-a)(s-b)(s-c),$$

zoo is

$$\triangle A'B'C' = \frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{abc} \times I \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Hetwelk, uit hoofde van (§ 1 der voorgaande oplossing)

$$(s-a)(s-b)(s-c) = \frac{I^2}{s},$$

ook aldus kan worden geschreven

$$\triangle A'B'C' = \frac{2I^2}{abc.s} = \frac{4I^3}{abc(a+b+c)} \quad . \quad . \quad (8),$$

of omdat (§ 1 verg. (2) der voorgaande oplossing) $I = rs$ is,

$$A''B''C'' = \frac{2s^2r^3}{abc} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

§ 7. Omdat $B''C''A = 90° - \frac{1}{2}A$ en $A''C''B = 90° - \frac{1}{2}B$ is, zoo is

$$B''C''A + A''C''B = 180° - \frac{1}{2}(A+B),$$

en hierdoor vinden wij voor de hoeken van den driehoek $A''B''C''$

$C'' = \frac{1}{2}(A+B)$, $B'' = \frac{1}{2}(A+C)$ en $A'' = \frac{1}{2}(B+C)$ (10),

waaruit verder volgt

$$Sin.\,C'' = Sin.\,\tfrac{1}{2}(A+B) = Sin.\,(90° - \tfrac{1}{2}C) = Cos.\,\tfrac{1}{2}C,$$

$$Cos.\,C'' = Cos.\,\tfrac{1}{2}(A+B) = Cos.\,(90° - \tfrac{1}{2}C) = Sin.\,\tfrac{1}{2}C,$$

zoodat wij hebben

$$\left.\begin{array}{l} Sin.\,C'' = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}},\ Sin.\,B'' = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}} \text{ en } Sin.\,A'' = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \\ \text{en } Cos.\,C'' = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}},\ Cos.\,B'' = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{bc}} \\ \text{en } Cos.\,A'' = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}. \end{array}\right\} (11).$$

Berekent men nu den driehoek $A''B''C''$ door de formule

$$\triangle A''B''C'' = \tfrac{1}{2}B''C'' \times A''C''\,Sin.\,C''$$

$$= \tfrac{1}{2} \times 4(s-a)(s-b)\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)^2}{abc^2}} \times \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}},$$

dan komt er

$$\triangle A''B''C'' = \frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

hetgeen volkomen met (7) overeenstemt.

§ 8. Ten einde DA_1, DB_1 en DC_1 te berekenen, heeft men

DA

$$DA_1 = DA - AA_1 = \sqrt{\frac{bc(s-a)}{s}} - (s-a)\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$
$$= \frac{bc}{s}\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} - (s-a)\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$
$$= \frac{bc - s(s-a)}{s}\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

Maar $bc - s(s-a) = \frac{1}{4}(4bc - (b+c+a)(b+c-a))$
$$= \frac{1}{4}(4bc - (b+c)^2 + a^2) = \frac{1}{4}(a^2 - (b-c)^2)$$
$$= \frac{1}{2}(a-b+c) \times \frac{1}{2}(a+b-c) = (s-b)(s-c);$$

$$\left.\begin{aligned} \text{dus}\quad DA_1 &= \frac{(s-b)(s-c)}{s}\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},\\ DB_1 &= \frac{(s-a)(s-c)}{s}\sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}\\ \text{en}\quad DC_1 &= \frac{(s-a)(s-b)}{s}\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}},\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ (12)$$

welke uitdrukkingen men ook zou verkregen hebben, door op te merken, dat

$$DA_1 = DB'' \, Sin. \tfrac{1}{2}A$$

moet zijn, en zoo ook met de overigen.

§ 9. Ook de inhouden der driehoeken DB″ C″, enz. worden gemakkelijk berekend, want hiertoe is

$$\triangle DB''C'' = DA_1 \times B''A_1$$
$$= \frac{(s-b)(s-c)}{s}\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \times (s-a)\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$
$$= \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{bc.s}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

$$\left.\begin{aligned} \text{zoodat}\quad \triangle DB''C'' &= \frac{a}{2s}\triangle A''B''C'',\\ \triangle DC''A'' &= \frac{b}{2s}\triangle A''B''C''\\ \text{en}\quad \triangle DA''B'' &= \frac{c}{2s}.\triangle A''B''C''\end{aligned}\right\}.\quad\ldots\ (13.$$

waaruit nog verder volgt

$$\triangle DB''C'' : \triangle DC''A'' : \triangle DA''B'' = a : b : c,$$

terwijl de som der driehoeken maar behooren gelijk aan $\triangle A''B''C''$ is.

CXCIX.

CXCIX. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Indien de hoeken van eenen driehoek, waarvan a, b en c de zijden zijn, midden door worden gedeeld, door lijnen, welke de overstaande zijden ontmoeten, en men deze ontmoetingspunten tot eenen driehoek vereenigt, begeert men de zijden van dezen driehoek te berekenen, alsmede den inhoud van de driehoeken, welke hierdoor in de figuur ontstaan?

OPGELOST door I. R. SCHMIDT, J. JONKHEERT, J. BASSAN en A. B. DE BOCK JUN.

OPLOSSING van I. R. SCHMIDT.

§ 1. Zij wederom ABC (*Fig.* 147) de gegevene driehoek, waarin de lijnen AA′, BB′ en CC′ de hoeken midden door deelen, en tevens den driehoek A′ B′ C′ bepalen, dan zullen wij, even als in de oplossing van het voorgaande voorstel, dezelfde letter voor de overeenkomstige lijnen aannemen, welke in de oplossing van het 198e Voorstel zijn aangenomen, waardoor wij noodelooze herhalingen ontwijken.

§ 2. De punten A′, B′ en C′ vereenigende, dan heeft men

$$B'C'^2 = AB'^2 + AC'^2 - 2\,AB' \times AC' \times Cos.A,$$

welke vergelijking door het gevondene in § 7 der oplossing van Voorstel 197, en in § 7 van Voorstel 198 verandert in

$$B'C'^2 = \frac{c^2 b^2}{(a+c)^2} + \frac{b^2 c^2}{(a+b)^2} - 2\,\frac{c^2 b^2}{(a+c)(a+b)} \times \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$= \frac{c^2 b^2}{(a+c)^2 (a+b)^2}\left\{(a+b)^2 + (a+c)^2 - (a+c)(a+b)\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}\right\}$$

$$= \frac{cb}{(a+c)^2 (a+b)^2}\left\{(a+b)^2 bc + (a+c)^2 bc - (a+c)(a+b)(b^2+c^2-a^2)\right\}$$

of wanneer wij den laatsten factor ontwikkelen,

$$B'C'^2 = \frac{bc}{(a+c)^2 (a+b)^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\left\{\begin{matrix} 3a^2bc + 2abc(b+c) + (b^2+c^2)bc + a^4 - a(b+c)(b^2+c^2) \\ + a^3(b+c) - (b^2+c^2)a^2 \\ - (b^2+c^2)bc \end{matrix}\right\},$$

$$= \frac{cba}{(a+b)^2 (a+c)^2}\left\{\begin{matrix} abc + 2abc & + (b+c)2bc \\ - a(b^2+c^2) & + (b+c)a^2 \\ + a^3 & - (b+c)(b^2+c^2) \end{matrix}\right\}$$

=

$$=\frac{abc}{(a+b)^2(a+c)^2}\{abc+a[a^2-(b-c)^2]+(b+c)[a^2-(b-c)^2]\}$$

$$=\frac{abc}{(a+b)^2(a+c)^2}\{abc+(a+b+c)(a^2-(b-c)^2)\}$$

$$=\frac{abc}{(a+c)^2(a+b)^2}\{abc+(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)\},$$

zoodat $B'C'=\frac{\sqrt{abc\{abc+8s(s-b)(s-c)\}}}{(a+c)(a+b)}$,

$C'A'=\frac{\sqrt{abc\{abc+8s(s-a)(s-c)\}}}{(b+a)(b+c)}$. (1).

en $A'B'=\frac{\sqrt{abc\{abc+8s(s-a)(s-b)\}}}{(c+a)(c+b)}$

§ 3. Voor den inhoud van $\triangle AB'C'$ heeft men

$$\triangle AB'C'=\tfrac{1}{2}AB'\times AC'\,Sin.\,A,$$

en deze vergelijking geeft met behulp van het gevondene in § 5 de oplossing van het 197 Voorstel, en in § 4 en 7 van die des 198 Voorstels,

$$\triangle AB'C=\tfrac{1}{2}\frac{b^2c^2}{(a+b)(a+c)}\times\frac{\pm I}{bc},$$

zoodat $\triangle AB'C=\frac{bc}{(a+b)(a+c)}\times I$,

$\triangle BA'C'=\frac{ac}{(b+c)(b+a)}\times I$ . . . . . (2).

en $\triangle CA'B'=\frac{ab}{(c+b)(c+a)}\times I.$

§ 4. De som dezer driehoeken van I of van den geheelen driehoek aftrekkende, blijft er

$$\triangle A'B'C'=\{1-\frac{bc(b+c)+ac(a+c)+ab(a+b)}{(a+b)(b+c)(a+c)}\}\times I$$

$$=\frac{\{(a+b)(b+c)(a+c)\}-\{bc(b+c)+ac(a+c)+ab(a+b)\}}{(a+b)(b+c)(a+c)}\times I$$

en dus $\triangle A'B'C'=\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\times I.$ . . . (3).

CC. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Een muur, waarvan de strekking horizontaal is, en die doorgaand

het-

hetzelfde profil heeft, is aan beide zijden met verfnijdingen voorzien, die gelijke hoogte, doch aan de verschillende zijden van den muur ongelijken uitsprong hebben. Het boven- en benedenvlak van den muur is horizontaal, doch hij wordt aan de uiteinden door verticale vlakken begrensd, waarvan het eene loodregt op de strekking van den muur staat, doch het andere met deze rigting eenen hoek te maakt. Indien nu de lengte van den muur, gemeten over het midden van de bovenkruin, is l, de breedte van de bovenkruin b, die van het grondvlak a, de hoogte van den muur h, het aantal versnijdingen aan elken kant n, en de uitsprong van elke versnijding, aan die zijde van den muur, waar dezelve het grootste zijn, is p, dan vraagt men den inhoud van dezen muur te vinden?

OPGELOST *door* I. R. SCHMIDT *en* A. B. DE BOCK JUN.

OPLOSSING *van* I. R. SCHMIDT.

Ingevolge de opgave zal de verticale doorsnede van den muur loodregt op de strekking van deszelfs lengte voorgesteld kunnen worden door AB*qsu*CD*trp*A, *Fig.* 148, terwijl de horizontale projectie of platte grond van den muur door A′B′B″A″ wordt aangewezen. Dit aangenomen zijnde, is het verder duidelijk, dat de voorgestelde muur niets anders is, dan een afgeknot prisma, waarvan de verticale doorsnede ABCD het grondvlak is, en waarvan de ribben evenwijdig loopen met het horizontale vlak, en tevens loodregt op de doorsnede ABCD staan. Nu wordt de inhoud van zulk een prisma gevonden volgens het bewezene in Voorstel 178, door den inhoud van de verticale doorsnede te vermenigvuldigen met de lijn, welke evenwijdig aan de ribben door het zwaartepunt Z van de verticale doorsnede gaat, en welke begrensd wordt door de verticale vlakken, gaande door A′B′ en A″B″. Ons voorstel is dus terug gebragt tot het vinden van de lengte der lijn Q′Q″, welke de projectie voorstelt der bedoelde lijn, hebbende deze projectie uit den aard van het voorstel dezelfde lengte als de geprojecteerde lijn. Wij gaan dus over tot het bepalen van den afstand BQ der loodlijn ZQ door het zwaartepunt gaande, ten einde de lijn Q′Q″ te kunnen vinden.

Daar nu al de versnijdingen even hoog zijn, is het klaar, dat de inhouden der achtervolgende regthoeken met gelijke verschillen verminderen, en derhalve eene rekenkunstige reeks vormen.

Even

Even duidelijk is het, dat de afstanden der zwaartepunten van deze regthoeken tot de lijn BY mede eene rekenkunstige reeks vormen. Hieruit volgt dan, dat als men den inhoud van den grootsten regthoek pqBA door A voorstelt, en deszelfs verschil met den volgenden regthoek B noemt, alsmede den afstand van het zwaartepunt des grootsten regthoeks tot YB door A′, en het verschil tusschen dezen afstand met die van het zwaartepunt des tweeden tot dezelfde lijn door B′ voorstelt, de som der momenten van al de opvolgende regthoeken, ten opzigte van de lijn YB, voorgesteld zal worden door de reeks

$AA' + (A-B)(A'-B') + (A-2B)(A'-2B') +$ *enz.* tot n termen.

Deze termen ontwikkelende, zal men bevinden, dat de tweede verschillen alle gelijk $2BB'$ zijn, terwijl de eerste term der reeks van de eerste verschillen gelijk is aan $-AB'-A'B+BB'$, waaruit dan volgt (La Croix, *Stelkunst*, door I. R. Schmidt, § 288) dat de som van n termen dezer reeks zal worden uitgedrukt door

$$S = nAA' + \tfrac{1}{2}n(n-1)(BB'-AB'-A'B)$$
$$+ \tfrac{1}{6}n(n-1)(n-2)BB' \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Omdat nu, *Fig.* 148, AB$=a$ is, en er n versnijdingen zijn, zoo wordt de inhoud van den ondersten regthoek voorgesteld door

$$a \times \frac{h}{n} = A,$$

en daar het zwaartepunt van dezen regthoek in het midden der breedte gelegen is, zoo hebben wij

$$A' = \tfrac{1}{2}a.$$

Nu is verder de bovenbreedte CD$=b$ en dus verschillen de opvolgende regthoeken in breedte eene hoeveelheid gelijk aan $\frac{a-b}{n-1}$, en dus is

$$B = a\frac{h}{n} - \left(a - \frac{a-b}{n-1}\right)\frac{h}{n}$$

$$= \frac{a-b}{n-1} \times \frac{h}{n}.$$

Daar nu eindelijk het zwaartepunt van den tweeden regthoek op eenen afstand van YB gelegen is, gelijk aan

$\tfrac{1}{2}(a-$

$$\tfrac{1}{2}\left(a-\frac{a-b}{n-1}\right)+p,$$

zoo is $$B'=\tfrac{1}{2}a-\left\{\tfrac{1}{2}\left(a-\frac{a-b}{n-1}\right)+p\right\}$$

$$=\frac{a-b}{2(n-1)}-p.$$

Brengende nu de waarden van A, A′, B en B′ over in de vergelijking (1), dan komt er voor de som der momenten ten opzigte van YB

$$S=\tfrac{1}{6}h\left\{3ab+\frac{2n-1}{2(n-1)}(a-b)^2+[(n-2)a+(2n-1)b]p\right\}.$$

Nu is het gemakkelijk in te zien, dat de doorsnede ABCD, of het profil van den muur, gelijk is aan het trapezium, dat b en a tot evenwijdige zijden en h tot hoogte heeft. Dit kan even duidelijk zoo wel meetkunstig als stelkunstig betoogd worden, doch dit laatste is het gemakkelijkste; want deze inhoud is de som van n termen eener rekenkunstige reeks, waarvan $\frac{ah}{n}$ de eerste en $\frac{bh}{n}$ de laatste term is, wier som derhalve gevonden wordt door de uitdrukking

$$\left(\frac{ah}{n}+\frac{bh}{n}\right)\times\tfrac{1}{2}n=\tfrac{1}{2}(a+b)h.$$

De som der momenten dan door dezen inhoud deelende, zoo vinden wij voor den afstand BQ van het zwaartepunt

$$BQ=\tfrac{1}{3}\,\frac{3ab+\frac{2n-1}{2(n-1)}(a-b)^2+p\{(n-2)a+(2n-1)b\}}{a+b}\quad.\quad(2).$$

Door deze formule is dan nu de stand van de lijn Q′Q″ door het zwaartepunt gaande bepaald, en derzelver lengte wordt gevonden door van de lijn P′P″ $=l$, welke door het midden van de bovenkruin C′D′ gaat, af te trekken het stuk y'P″. En omdat, volgens het voorstel, *hoek* A′A″B″ $=\alpha$ is, zoo hebben wij y'P″ $=y'$Q″ *Cot.* α. Nu is B′P′ $=$ P′C′ $+$ C′B′ $=\tfrac{1}{2}b+p(n-1)$ en derhalve P′Q′ $=$ Q″y' $=$ P′B′ $-$ Q′B′ $=$ PB $-$ QB $=\tfrac{1}{2}b+p(n-1)-$ QB; voor QB zijne waarde uit (2) schrijvende, komt er

Q″y'

$$Q'y' = \tfrac{1}{8}\,\frac{\{(2n-1)a+(n-2)b\}\{2(n-1)p-(a-b)\}}{(n-1)(a+b)},$$

en dus

$$P'y' = Q'y'\,Cot.\,\alpha = \tfrac{1}{8}\,Cot.\,\alpha \;\ldots\ldots$$

$$\times\,\frac{\{(2n-1)a+(n-2)b\}\{2(n-1)p-(a-b)\}}{(n-1)(a+b)}.$$

Hieruit volgt nu verder

$$Q'Q' = P'P' - P'y' =$$

$$= l - \tfrac{1}{8}\,Cot.\,\alpha\,\frac{\{(2n-1)a+(n-2)b\}\{2(n-1)p-(a-b)\}}{(n-1)(a+b)},$$

en daar wij voor den inhoud van het profil of de doorsnede van den muur gevonden hebben $\frac{1}{2}(a+b)h$, zoo is voor den inhoud van den muur

$$I = \tfrac{1}{2}hl(a+b) - \tfrac{1}{16}h\,Cot.\,\alpha \;\ldots\ldots$$

$$\times\,\frac{\{(2n-1)a+(n-2)b\}\{2(n-1)p-(a-b)\}}{n-1} \;.\; (3).$$

GEVOLGEN. Is n oneindig, dan gaat het profil in een trapezium over, en men heeft alsdan $n-1 = n-2 = n$, $2n-1 = 2n$ en $(n-1)p = GH$ (*Fig.* 149) $= c$, waardoor (3) overgaat in

$$I = \tfrac{1}{2}hl(a+b) - \tfrac{1}{12}h\,Cot\,\alpha\,(2a+b)(2c-a+b)\;.\;(4).$$

Staat nu (*Fig.* 149) QH loodregt op KH, dan is $GH = c = 0$, en men vindt uit (4)

$$I = \tfrac{1}{2}hl(a+b) - \tfrac{1}{8}h\,Cot.\,\alpha\,(2a+b)(b-a)\;.\;(5).$$

Staat daarentegen KI loodregt op KH, dan is $GH = c = a-b$, en uit (4) vinden wij

$$I = \tfrac{1}{2}hl(a+b) - \tfrac{1}{12}h\,Cot.\,\alpha\,(2a+b)(a-b)\;.\;(6).$$

Maken IK en QH gelijke hoeken met KH, dan is $KL = GH = c = \frac{1}{2}(a-b)$, en de formule (4) geeft

$$I = \tfrac{1}{2}hl(a+b).$$

Dit zelfde vindt men ook bij den muur met versnijdingen, wanneer deze aan beide zijden even groot zijn, uit de formule (3), want alsdan is in dezelve $(n-1)p = \frac{1}{2}(a-b)$.

AANMERKING. De gewone funderingen van gebouwen bestaan veelal uit muren, gelijk aan die, welke wij hier berekend hebben. Men is dan meestal in de gewoonte, ter bepaling van derzelver inhoud, om het profil met de lengte P′P″, (*Fig.* 148,) over het

midden der bovenkruin gemeten, te vermenigvuldigen, en dus voor den Inhoud aan te nemen de waarde $\frac{1}{2} l(a+b) h$. Daar dit nu juist de eerste term is der naauwkeurige waarde van den inhoud door de formule (3) gevonden, zoo blijkt het, dat er bij de praktische wijze van berekening eene verbetering moet worden aangebragt, uitgedrukt door

$$C = \frac{1}{12} \frac{h\,Cot.\,a}{n-1} \{(2n-1)a+(n-2)b\}\{2(n-1)p-(a-b)\},$$

welke afgetrokken of opgeteld moet worden, naar mate C positief of negatief is.

Verder blijkt uit de formule (4) en (5), dat als de doorsnede van den muur in een trapezium overgaat, deze verbetering nog altijd moet plaats hebben, en dat alleen in geval de versnijdingen aan beide zijden dezelfde zijn, er geene verbetering noodig is; waaruit dan ook volgt, dat als de versnijdingen aan weerszijden niet veel van elkander verschillen, de gewone praktische methode zonder grooten misslag kan gevolgd worden.

CCI. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK JUN.

Van eenen bolvormigen driehoek gegeven zijnde twee zijden, benevens de boog, welke den ingesloten hoek midden door deelt en op de overstaande zijde valt, vraagt men de hoeken en de derde zijde te vinden?

OPGELOST *door* J. JONKHERT, J. BASSAN *en* A. B. DE BOCK JUN.

OPLOSSING *van* J. JONKHERT.

Zij, (*Fig.* 150), ABC de bolvormige driehoek, waarin $BC = \alpha$ $AC = \beta$ en $CD = \gamma$, welke laatste boog den hoek $C = \phi$ midden door deelt; dan heeft men dadelijk in den driehoek ABC (LA CROIX, *Trigon.* door I. R. SCHMIDT, § 59, 2de druk).

$$Cot.\,\alpha\, Sin.\,\beta = Cos.\,\beta\, Cos.\,\phi + Sin.\,\phi\, Cot.\,A,$$

of $$Cot.\,A = \frac{Cot.\,\alpha\, Cot.\,\beta - Cos.\,\beta\, Cos.\,\phi}{Sin.\,\phi}.$$

Op dezelfde wijze vindt men uit den driehoek ADC

$$Sin.\,\beta\, Cot.\,\gamma = Cos.\,\beta\, Cos.\,\tfrac{1}{2}\phi + Sin.\,\tfrac{1}{2}\phi\, Cot.\,A,$$

of $$Cot.\,A = \frac{Sin.\,\beta\, Cot.\,\gamma - Cos.\,\beta\, Cos.\,\tfrac{1}{2}\phi}{Sin.\,\tfrac{1}{2}\phi}.$$

De

Deze beide waarden van Cot. A aan elkander gelijk stellende, komt er

$$\frac{Cot.\alpha\, Sin.\beta - Cos.\beta\, Cos.\phi}{Sin.\phi} = \frac{Sin.\beta\, Cot.\gamma - Cos.\beta\, Cos.\frac{1}{2}\phi}{Sin.\frac{1}{2}\phi},$$

waaruit volgt

$$Cot.\alpha\, Sin.\beta\, Sin.\tfrac{1}{2}\phi - Cos.\beta\, Cos.\phi\, Sin.\tfrac{1}{2}\phi = Sin.\beta\, Cot.\gamma\, Sin.\phi - Cos.\beta\, Cos.\tfrac{1}{2}\phi\, Sin.\phi,$$

of

$$Sin\,\beta(Cot.\gamma\, Sin.\phi - Cot.\alpha\, Sin.\tfrac{1}{2}\phi) = Cos.\beta(Sin.\phi\, Cos.\tfrac{1}{2}\phi - Cos.\phi\, Sin.\tfrac{1}{2}\phi) = Cos.\beta\, Sin.\tfrac{1}{2}\phi,$$

derhalve $Sin.\beta(2\, Cot.\gamma\, Cos.\tfrac{1}{2}\phi - Cot.\alpha) = Cos.\beta,$

en dus
$$Cos.\tfrac{1}{2}\phi = \frac{Cos.\beta + Sin.\beta\, Cot.\alpha}{2\, Cot.\gamma\, Sin.\beta} = \frac{Tang.\gamma\, Sin.(\alpha+\beta)}{2\, Sin.\alpha\, Sin.\beta}.$$

Hierdoor de hoek $\phi = C$ bekend zijnde, is het voorstel opgelost, dewijl de overige hoeken en zijden volgens de bekende regels gevonden kunnen worden.

CCII. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK JUN.

Wanneer men in eenen bolvormigen driehoek eenen cirkel beschrijft, dan vraagt men uit de zijden van den driehoek den bolvormigen straal van den cirkel te vinden?

OPGELOST *door* A. B. DE BOCK JUN. *en* J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* A. B. DE BOCK JUN.

Laat ABC, (*Fig.* 151), den driehoek voorstellen, waarin de cirkel DEF is beschreven; wanneer men dan door het middelpunt en de hoeken des driehoeks bogen van groote cirkels laat gaan, dan zullen deze de hoeken in gelijke deelen verdeelen, terwijl de loodregte bogen EG, FG en DG, loodregt op de zijden neergelaten, alle even groot zijn en den bolvormigen straal van den cirkel voorstellen. Verder is het blijkbaar, dat de driehoeken DBG en BGF gelijk en gelijkvormig zijn, zoodat BD = BF is. Stellende nu AB = α, AC = β, BC = γ, *hoek* GBF = ϕ, BF = BD = x en GF = y, alsmede $\alpha+\beta+\gamma = 2\delta$, dan hebben wij (*Goniom. en Trig.* van LACROIX door I. R. SCHMIDT, § 63, 2de druk).

Tang².

$$Tang^2.\phi = \frac{Sin.(\delta - \alpha)\,Sin.(\delta - \gamma)}{Sin.\delta\,Sin.(\delta - \beta)} \quad \ldots\ldots (1),$$

de regthoekige driehoek BGF geeft

$$Tang.y = Sin.\alpha\,Tang.\phi \quad \ldots\ldots (2).$$

Maar nu is, doordien $AE = \alpha - x$ en $CE = \beta - x$ is,

$$\alpha + \gamma - 2x = AC = \beta,$$

dus $$x = \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma) = \delta - \beta,$$

of $$Sin.x = Sin.(\delta - \beta).$$

De vergelijking (2) geeft derhalve

$$Tang.y = Sin.(\delta - \beta)\,Tang.\phi,$$

of door (1)

$$Tang.y = Sin.(\delta - \beta)\sqrt{\frac{Sin.(\delta - \alpha)\,Sin.(\delta - \gamma)}{Sin.\delta\,Sin.(\delta - \beta)}}$$

$$= \sqrt{\left\{\frac{Sin.(\delta - \alpha)\,Sin.(\delta - \gamma)\,Sin.(\delta - \beta)}{Sin.\delta}\right\}}.$$

In deze formule de woorden *Tang.* en *Sin.* weglatende, zoo vindt men den straal van den ingeschreven' cirkel van eenen regtlijnigen driehoek; deze opmerking is geschikt, om de gevondene formule gemakkelijk in het geheugen te prenten.

CIƆCIII. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK JUN.

Men vraagt de formule $Tang.x\,Cos.y\,\partial y = Sin.y\,\partial x + \partial x\sqrt{(2a\,Sin.x\,Sin.y + Sin^2.y)}$ *te integreren?*

OPGELOST *door* A. B. DE BOCK JUN. *en* J. JONKHEERT.

OPLOSSING *van* A. B. DE BOCK JUN.

Wij stellen ter herleiding der voorgestelde vergelijking $Sin.x = p$ en $Sin.y = q$; waaruit volgt $Cos.x = \sqrt{(1 - p^2)}$, $Tang.x = \frac{p}{\sqrt{(1-p^2)}}$, $\partial x = \partial p.Sec.x = \frac{\partial p}{\sqrt{(1-p^2)}}$, $Cos.y = \sqrt{(1-q^2)}$ en $\partial y = \partial q.Sec.y = \frac{\partial q}{\sqrt{(1-q^2)}}$; deze waardijen in de voorgestelde vergelijking gebragt, zoo komt er

$$\frac{p}{\sqrt{(1-p^2)}}\sqrt{(1-q^2)} \times \frac{\partial q}{\sqrt{(1-q^2)}} = q \times \frac{\partial p}{\sqrt{(1-p^2)}} + \ldots$$

$$\frac{\partial p}{\sqrt{(1-p^2)}}\sqrt{\{2apq + q^2\}},$$

of $$p.\partial q = q\partial p + \partial p\sqrt{(2apq + q^2)}.$$

Stel-

Stellende hierin $q = pz$, hetgeen geeft

$$\delta q = p\,\delta z + z\,\delta p,$$

dan komt er

$$p(p\,\delta z + z\,\delta p) = pz\,\delta p + \delta p \times p\sqrt{(2az + z^2)},$$

dat is

$$p\,\delta z = \delta p \sqrt{(2az + z^2)},$$

of

$$\frac{\delta p}{p} = \frac{\delta z}{\sqrt{(2az + z^2)}}.$$

Deze vergelijking integrerende door de bekende regels, zoo komt er, na bijvoeging eener standvastige C,

$$Log.\, p = Log.\, C\{a + z + \sqrt{(2az + z^2)}\},$$

of

$$p = C(a + z + \sqrt{(2az + z^2)}).$$

Hierin voor z zijne waarde schrijvende, komt er

$$p = C\{a + \frac{q}{p} + \sqrt{(2a\frac{q}{p} + \frac{q^2}{p^2})}\},$$

of

$$p^2 = C\{ap + q + \sqrt{(2aqp + q^2)}\}.$$

In deze vergelijking voor p en q hunne waarden stellende, vindt men

$$Sin^2.x = C\{a\,Sin.x + Sin.y + \sqrt{(2a\,Sin.x\,Sin.y + Sin^2.y)}\}.$$

CCIV. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK JUN.

Men vraagt de formule $\delta y + y\,Cot.(a+x)\,\delta x = Sec.(a+x)\,\delta x$ *te integreren?*

OPGELOST *door* J. JONKHERT *en* A. B. DE BOCK JUN.

OPLOSSING *van* J. JONKHERT.

Men stelle in de opgegevene vergelijking

$$Cot.(a+x) = P \text{ en } Sec.(a+x) = Q,$$

dan verandert dezelve in

$$\delta y + y\,P\,\delta x = Q\,\delta x.$$

Maar nu is (I. R. SCHMIDT, *Diff. en Integr. Rek.* § 285)

$$y = e^{-\int P\,\delta x} \int e^{\int P\,\delta x}\, Q\,\delta x \quad . \; . \; . \quad (A),$$

wij hebben dus slechts de aangewezene integratiën te verrigten.

Ingevolge onze onderstellingen is

$$\int P\,\delta x = \int Cot.(a+x)\,\delta x = Log.\,Sin.(a+x),$$

dus

$$e^{-\int P\,\delta x} = \frac{1}{Sin.(a+x)}.$$

Hier-

Hierdoor wordt de vergelijking (A) wanneer men er tevens voor Q zijne waarde stelt,

$$y = \frac{1}{Sin. (a+x)} \int Sin. (a+x)\, Sec. (a+x)\, \delta x,$$

$$= \frac{1}{Sin. (a+x)} \int Tang. (a+x)\, \delta x,$$

$$= -\frac{1}{Sin. (a+x)} Log. Cos. (a+x) + C,$$

$$= \frac{1}{Sin. (a+x)} Log. Sec. (a+x) + C.$$

CCV. VOORSTEL,

Door J. JONKHERT.

Van eenen driehoek zijn gegeven: eene der opstaande zijden, de lijn, welke, uit den tophoek getrokken, de bazis in twee gelijke deelen deelt, en de hoek, welken deze laatste met de bazis maakt. Men vraagt de overige zijden en hoeken van dezen driehoek te bepalen?

OPGELOST *door* J. BASSAN, J. JONKHERT, J. DOORMAN *en* A. B. DE BOCK JUN.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Zij ABC (*Fig.* 152) de gevraagde driehoek, waarin $AB = a$, $BD = b$ en hoek $BDA = \alpha$ gegeven is, alsmede $AD = DC$; dan hebben wij terstond uit den driehoek ABD

$$Sin. A : Sin. BDA = BD : AB,$$

of $$Sin. A : Sin. \alpha = b : a,$$

waaruit $$Sin. A = \frac{b}{a} Sin. \alpha.$$

De hoek A bekend zijnde, zoo is ook

$$AD = a \frac{Sin. (\alpha + A)}{Sin. \alpha}$$

mede gevonden, alsmede $AC = 2 AD$; terwijl eindelijk de derde zijde gevonden wordt door de vergelijking

$$BC^2 = a^2 + AC^2 - 2a \times AC\, Cos. A.$$

Door constructie kan het vraagstuk even gemakkelijk worden opgelost; want men stelle eene lijn BD op eene andere AC onder den gegevenen hoek α, make $BD = b$, beschrijve uit B met $AB = a$ als straal eenen cirkelboog, snijdende AC in A, makende dan $DC = AD$, dan is de driehoek geconstrueerd.

CCVI.

CCVI. VOORSTEL.

Door J. JONKHERT.

Van eenen driehoek zijn gegeven: eene der opstaande zijden, de lijn, welke den tophoek in twee gelijke deelen verdeelt, en de hoek, welken deze lijn met de loodlijn op de basis maakt. Men vraagt de overige zijden en hoeken van dezen driehoek te bepalen?

OPGELOST *door* J. BASSAN, J. JONKHERT, J. DOORMAN *en* A. B. DE BOCK JUN.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Zij wederom ABC (*Fig.* 153) de gevraagde driehoek, waarin $AB = a$, $BD = b$ en hoek $DBE = \alpha$ gegeven is, alsmede $AD = DC$. Omdat nu de hoek $DBE = \alpha$ bekend is, zoo is ook de hoek BDC bekend, en hierdoor dit voorstel tot het voorgaande terug gebragt, en wij hebben alzoo

$$Sin. A = \frac{b}{a} Cos. \alpha,$$

en

$$AD = a \frac{Cos. (A + \alpha)}{Cos. \alpha},$$

waardoor dan tevens de overige zijden en hoeken gevonden zijn.

Door constructie kan men het voorstel als volgt oplossen. Men make eenen hoek DBE gelijk aan den gegevenen hoek α, en make $BD = b$; de loodlijn AC door D getrokken hebbende, beschrijve men uit B met $AB = a$ als straal eenen cirkelboog, snijdende AC in A, en make $DC = AD$.

CCVII. VOORSTEL.

Door J. JONKHERT.

Uit den tophoek van eenen gegevenen driehoek is eene lijn getrokken, welke dezen hoek en eene andere lijn, welke de overstaande zijde in twee gelijke deelen verdeelt; indien men nu uit eenen der overige hoeken eene loodlijn op de overstaande zijden trekt, dan vraagt men de stukken te berekenen, waarin de drie getrokkene lijnen elkander verdeelen?

OPGELOST *door* J. JONKHERT, A. B. DE BOCK JUN., J. DOORMAN *en* J. BASSAN.

OPLOSSING *van* J. JONKHERT.

§ 1. Laat ABC (*Fig.* 154) de voorgestelde driehoek zijn, waarin BD den hoek B midden door deelt, BE de overstaan-

de zijde AC in twee gelijke deelen verdeelt, en AF loodregt op BC staat, en nemen wij $AB=c$, $BC=a$ en $AC=b$, alsmede $a+b+c=2s$.

§ 2. Nu is volgens bekende regels

$$2\,BE^2=a^2+c^2-\tfrac{1}{2}b^2,$$

$$BD^2=\frac{4a^2cs(s-b)}{(a+c)^2}\ \text{(Voorstel 197. verg. (10))}$$

$$BF=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a},$$

$$AF=2\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a},$$

$$CD:CA=CB:CB+BA,$$

of

$$CD=\frac{ab}{a+c},$$

en

$$AE=\tfrac{1}{2}AC=\tfrac{1}{2}b.$$

§ 3. Omdat nu in den driehoek ABF de lijn BK den hoek B midden door deelt, zoo kan de lijn BK door de formule, waardoor BD in de voorgaande § is gevonden, bepaald worden, mits men in deze laatste voor a of BC schrijve BF, en voor b of AC schrijve AF. Hierdoor hebben wij dan

$$BK^2=\frac{BF\times(AF+BF+c)\,(BF-AF+c)c}{(BF+c)^2}$$

$$=\frac{c.BF\{(BF+c)^2-AF^2\}}{(BF+c)^2},$$

maar omdat de driehoek ABF regthoekig is, zoo is ook

$$AF^2+BF^2=c^2,$$

en dus is $$BK^2=\frac{2c.BF.(BF^2+c.BF)}{(BF+c)^2}$$

$$=\frac{2c\,BF^2}{BF+c}.$$

Hierin de waarde van BF uit § 2. gesteld, geeft

$$BK^2=\frac{c}{a}\times\frac{(a^2+c^2-b^2)}{a^2+c^2-b^2+2ca},$$

en

$$BK=\tfrac{1}{2}(a^2+c^2-b^2)\sqrt{\frac{c}{as(s-b)}}.$$

Verder is

DK

$$DK = BD - BK$$

$$= \frac{2\sqrt{as(s-b)}}{a+c} - \tfrac{1}{2}(a^2+c^2-b^2)\sqrt{\frac{c}{as(s-b)}}$$

$$= \frac{4as(s-b)}{a+c} - (a^2+c^2-b^2)\sqrt{\frac{c}{4as(s-b)}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\frac{c(a^2+b^2-c^2)}{a+c}\sqrt{\frac{c}{as(s-b)}}.$$

§ 4. Omdat BK den hoek B midden door deelt, heeft men ook de evenredigheid

$$FK : AF = BF : BF + AB,$$

$$FK = AF\frac{BF}{BF+a}.$$

Hierin voor AF en BF hunne waarden uit § 2 gesteld, geeft

$$FK = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \times \frac{a^2+c^2-b^2}{2ca+a^2+c^2-b^2}$$

$$= \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \times \frac{a^2+c^2-b^2}{4s(s-b)}$$

$$= \frac{1}{2a}(a^2+c^2-b^2)\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}},$$

en

$$AK = AF - FK$$

$$= \frac{1}{a}\left\{2\sqrt{s(s-b)} - \tfrac{1}{2}\frac{a^2+c^2-b^2}{\sqrt{s(s-b)}}\right\}\sqrt{(s-a)(s-c)}$$

$$= \frac{4s(s-b)-a^2-c^2+b^2}{2a\sqrt{s(s-b)}}\sqrt{(s-a)(s-c)}$$

$$= c\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}.$$

§ 5. Trekt men nu de loodlijn EG, dan is in den driehoek BEC

$$BG = \frac{EB^2+BC^2-EC^2}{2 \cdot BC}$$

$$= \frac{a^2+c^2-\tfrac{1}{2}b^2+2a^2-\tfrac{1}{2}b^2}{4 \cdot a}$$

$$= \frac{3a^2+c^2-b^2}{4a},$$

en omdat $AE = \tfrac{1}{2}AC$ is, zoo is ook $EG = \tfrac{1}{2}AF = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$.

Ver-

Verder heeft men

$$IF : BF = EG : BG,$$

of

$$IF = BF \cdot \frac{EG}{BG},$$

waarin de waarden der lijnen van het tweede lid gesteld, men vindt

$$IF = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a} \times \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a} \times \frac{4a}{3a^2+c^2-b^2}$$

$$= \frac{2(a^2+c^2-b^2)}{a(3a^2+c^2-b^2)} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Nu is

$$AI = AF - IF$$

$$= \left(1 - \frac{a^2+c^2-b^2}{3a^2+c^2-b^2}\right) \times \frac{2}{a} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

$$= \frac{4a}{3a^2+c^2-b^2} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Het blijkt uit de vergelijking dezer waarde met die van BG, dat BG×AI gelijk is aan den inhoud van den driehoek ABC.

§ 6. Uit de driehoeken BIF en BEG hebben wij nog

$$BI : BE = BF : BG,$$

$$BI = BE \frac{BF}{BG},$$

waaruit volgt

$$BI = \tfrac{1}{2}\sqrt{(2a^2+2c^2-b^2)} \times \frac{a^2+c^2-b^2}{2a} \times \frac{4a}{3a^2+c^2-b^2}$$

$$= \frac{a^2+c^2-b^2}{3a^2+c^2-b^2} \sqrt{(2a^2+2c^2-b^2)},$$

en

$$EI = BE - BI,$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{(2a^2+2c^2-b^2)} - \frac{a^2+c^2-b^2}{3a^2+c^2-b^2} \sqrt{(2a^2+2c^2-b^2)}$$

$$= \frac{a^2-c^2+b^2}{2(3a^2+c^2-b^2)} \sqrt{(2a^2+2c^2-b^2)}.$$

§ 7. Eindelijk is

$$IK = IE - FK,$$

en dus door § 4 en 5,

$$IK = \frac{a^2+c^2-b^2}{a} \left\{ \frac{2\sqrt{s(s-b)}}{3a^2+c^2-b^2} - \frac{1}{2\sqrt{s(s-b)}} \right\} \sqrt{(s-a)(s-c)}$$

=

$$=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a(3a^2+c^2-b^2)}\left(4s(s-b)-3a^2-c^2+b^2\right)\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}},$$

$$=(c-b)\frac{a^2+c^2-b^2}{3a^2+c^2-b^2}\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}.$$

CCVIII. VOORSTEL,

Door J. JONKHERT.

Uit den tophoek van eenen driehoek is eene lijn getrokken, welke dezen hoek in twee gelijke deelen verdeelt, en uit een' der hoeken aan de basis is eene lijn naar het midden der tegenoverstaande zijde getrokken; men vraagt de stukken te bepalen, waarin deze lijnen elkander snijden?

OPGELOST *door* J. JONKHERT, J. BASSAN, J. DOORMAN *en* A. B. DE BOCK JUN.

OPLOSSING *van* J. JONKHERT.

§ 1. Laat (*Fig.* 155) ABC de gegevene driehoek zijn, waarin BD den hoek B en AE de zijde BC in twee gelijke deelen verdeelt; en nemen wij BC $=a$, BC $=b$ en AB $=c$, dan hebben wij, even als in het voorgaande voorstel,

$$BD^2=\frac{ac(a+b+c)(a+c-b)}{(a+c)^2},$$

$$AE^2=\frac{b^2+c^2-\frac{1}{2}a^2}{2},$$

$$AD=\frac{ac}{b+c}.$$

§ 2. Omdat in den driehoek ABE, BD den hoek B midden door deelt, zoo is ook

$$AE:EF=AB+BE:BE,$$

of

$$EF=AE\,\frac{BE}{AB+BE}.$$

Hierin voor de lijnen hare waarde schrijvende, vindt men

$$EF=\frac{a}{2(c+\frac{1}{2}a)}\sqrt{\frac{b^2+c^2-\frac{1}{2}a^2}{2}}$$

$$=\frac{a}{2(2c+a)}\sqrt{(2b^2+2c^2-a^2)},$$

en $AF=AE-EF=\frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{2c+a}\right)\sqrt{(2b^2+2c^2-a^2)}$

$$=\frac{c}{2c+a}\sqrt{(2b^2+2c^2-a^2)}.$$

§. 3.

§. 2. In den driehoek ABE wordt BF op dezelfde wijze gevonden als BD uit den driehoek ABC; wij hebben daar slechts voor AC of b te schrijven AE en voor BC of a, BE $= \frac{1}{2} a$. Hierdoor hebben wij dus

$$BF^2 = \frac{ca(\frac{1}{2}a + c + AE)}{2(\frac{1}{2}a + c)^2}$$

$$= \frac{ca(a + 2c + 2AE)}{(a + 2c)^2},$$

en hierin voor AE zijne waarde schrijvende, komt er

$$BF^2 = \frac{ca}{(a + 2c)^2}(a + 2c + \sqrt{(2b^2 + 2c^2 - a^2)}),$$

of $$BF = \frac{\sqrt{\{ca(a + 2c + (2b^2 + 2c^2 - a^2)^{\frac{1}{2}})\}}}{a + 2c},$$

en $$DF = \tfrac{1}{2}\sqrt{(2b^2 + 2c^2 - a^2)} - \frac{\sqrt{\{c(a + 2c + (2b^2 + 2c^2 - a^2)^{\frac{1}{2}})\}}}{a + 2c}.$$

CCIX. VOORSTEL,

Door J. JONKHERT.

Men vraagt naar de meetkunstige plaats van de middelpunten der vierkanten, die beschreven kunnen worden op de zijden van al de regthoekige driehoeken, welke eene gegevene lijn tot hypotenusa hebben?

OPGELOST *door* J. JONKHERT, J. DOORMAN *en* A. B. DE BOCK JUN.

OPLOSSING *van* J. JONKHERT.

Laat BC, (*Fig.* 156), de gegevene hypotenusa zijn, dan is het klaar, dat alle de regthoekige driehoeken, welke op deze lijn gemaakt kunnen worden, haren tophoek in den omtrek van den cirkel CDB, op CB als middellijn beschreven, moeten hebben. Trekt men nu in dezen cirkel eene koorde CE naar willekeur, en deelt men dezelve door den straal AG midden door, dan is het klaar, dat als men FG $=$ CF neemt, het punt G het middelpunt zal zijn van het vierkant op CE beschreven. Stellen wij nu CA $= \frac{1}{2}a$, AG $= z$ en hoek CAG $= \phi$, dan is AF $= \frac{1}{2}a\,Cos.\,\phi$ en FG $=$ CF $= \frac{1}{2}a\,Sin.\,\phi$ en derhalve

$$AG = z = \tfrac{1}{2}a(Sin.\,\phi + Cos.\,\phi),$$

voor de polaire vergelijking der gevraagde kromme.

Om

Om de vergelijking op regthoekige coördinaten te vinden, trekken wij GH loodregt op AH, en nemen AH = x en HG = y, dan heeft men, gelijk bekend is,

$$z^2 = x^2 + y^2$$

$$z \, Sin. \phi = y \text{ en } z \, Cos. \phi = x.$$

Door deze waardijen verandert onze vergelijking in

$$\sqrt{(x^2+y^2)} = \tfrac{1}{2} a \frac{x+y}{\sqrt{(x^2+y^2)}},$$

of

$$x^2 + y^2 = \tfrac{1}{2} a (x+y).$$

Deze vergelijking is, gelijk bekend is, die van eenen cirkel. Om dezelve nader te bepalen, gaan wij de punten onderzoeken, waar bij de asfen der coördinaten doorfnijdt. Stellen wij daartoe vooreerst $x = 0$, dan vindt men voor de fnijpunten met de lijn AD

$$y^2 = \tfrac{1}{2} a y,$$

welke voldaan wordt door $y = 0$ en $y = \tfrac{1}{2} a$, hetgeen dus aantoont, dat de cirkel door den oorfprong A en door het punt D gaat.

Stellende, verder $y = 0$, dan vinden wij voor de fnijpunten met de lijn AC,

$$x^2 = \tfrac{1}{2} a x,$$

welke voldaan wordt door $x = 0$ en $x = \tfrac{1}{2} a$; de cirkel gaat dan ook door het punt C. Hieruit volgt dan, omdat AC = AD is, dat de gezochte cirkel zijn middelpunt in het midden der koorde CD heeft, en dat dienvolgens zijn ftraal $\tfrac{1}{2}$CD $= \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} a \sqrt{2} = \tfrac{1}{4} a \sqrt{2}$ is.

Het is duidelijk, dat indien men de koorden, waarop de vierkanten befchreven worden, in plaats van uit C uit B getrokken had, men voor de plaats der middelpunten eenen anderen cirkel op DB als ftraal befchreven zou gevonden hebben, alsmede dat men beneden de lijn CB dezelfde conftructie als boven dezelve kan uitvoeren. Wanneer men zich bepaalt bij de vierkanten, die op CE naar buiten geconftrueerd kunnen worden, dan zal de halve cirkel CID de plaats hunner middelpunten aanwijzen; terwijl de halve cirkel CAD die der vierkanten naar binnen geconftrueerd aanwijst. Eindelijk merken wij op, dat daar de diagonalen IA en CD regte hoeken vormen, het verlengde van GE door

D

D moet gaan, en dat derhalve de diagonalen der vierkanten, beschreven op de regthoekzijden van den driehoek, AC tot hypotenuse hebbende, verlengd zijnde, door de punten C, B of D moeten gaan.

CCXI. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK JUN.

Men vraagt het zwaartepunt te vinden van eenen bol, in de onderstelling, dat bij iedere doorsnede, loodregt op eene middellijn genomen, de digtheid evenredig is aan het vierkant van den afstand tusschen het uiteinde dezer middellijn en den omtrek der doorsnede?

OPGELOST *door* A. B. DE BOCK JUN. *en* J. DOORMAN.

OPLOSSING *van* A. B. DE BOCK JUN.

Laat (*Fig.* 157) AOB'O' de bol zijn, en stellen wij den straal OM $= r$, de coördinaten OM' $= x$ en B'M' $= y$, en de lijn, welke het toppunt O met het uiteinde der middellijn van het snijdende vlak AB' vereenigt OB' $= p$, dan is vooreerst

$$y^2 = 2rx - x^2,$$

en daar verder de digtheid van elke doorsnede A'B', welke wij door z zullen voorstellen, evenredig moet zijn aan p^2, zoo mag men stellen

$$z = a p^2.$$

Maar nu is blijkbaar $p^2 = x^2 + y^2$, derhalve

$$z = a(x^2 + y^2) = a(x^2 + 2rx - x^2)$$
$$= 2arx.$$

Wanneer nu Z het zwaartepunt voorstelt, dan wordt de afstand van hetzelve tot den top O (I. R. SCHMIDT, *Beginselen der Statica*, I Deel, pag. 122) voorgesteld door

$$OZ = \frac{\int y^2\, x\, z\, \partial x}{\int y^2\, z\, \partial x},$$

welke formule voor ons geval overgaat in

$$OZ = \frac{\int (2rx - x^2)\, x \,.\, 2arx\, \partial x}{\int (2rx - x^2) \,.\, 2arx\, \partial x}$$
$$= \frac{\int (2r - x)\, x^3\, \partial x}{\int (2r - x)\, x^2\, \partial x}$$
$$= \frac{\frac{1}{2} r x^4 - \frac{1}{5} x^5 + C}{\frac{2}{3} r x^3 - \frac{1}{4} x^4 + C'},$$

wel-

welke beide integralen tusschen dezelfde grenzen moeten genomen worden.

Voor den geheelen bol zijn deze grenzen $x=0$ en $x=2r$, en hierdoor hebben wij dan

$$OZ=\frac{8r^5-\frac{32}{5}r^5}{\frac{16}{3}r^4-4r^4}$$

$$=\frac{3.8r}{20}=\frac{6}{5}r,$$

en derhalve $MZ=\frac{1}{5}r$.

Voor den halven bol nemen wij de integralen tusschen $x=0$ en $x=r$, waardoor wij vinden

$$OZ'=\frac{\frac{1}{2}r^5-\frac{1}{5}r^5}{\frac{2}{3}r^4-\frac{1}{4}r^4}=\frac{3.12}{10.5}r=\frac{18}{25}r,$$

of

$$MZ'=\frac{7}{25}r.$$

Nemende de integralen tusschen $x=0$ en $x=a$, zoo vinden wij voor een bolvormig segment $A'OB'$

$$OZ''=\frac{\frac{1}{2}ra^4-\frac{1}{5}a^5}{\frac{2}{3}ra^3-\frac{1}{4}a^4}=\frac{6a(5r-2a)}{5(8r-3a)}.$$

Nemende eindelijk de integralen tusschen $x=a$ en $x=b$, dan vindt men voor eenig segment $A'B'B''A''$

$$OZ'''=\frac{\frac{1}{2}ra^4-\frac{1}{5}a^5-\frac{1}{2}rb^4+\frac{1}{5}b^5}{\frac{2}{3}ra^3-\frac{1}{4}a^4-\frac{2}{3}rb^3+\frac{1}{4}b^4}$$

$$=\frac{6}{5}.\frac{5ra^4-2a^5-5rb^4+2b^5}{8ra^3-4a^4-8rb^3+3b^4}=\frac{6}{5}.\frac{5r(a^4-b^4)+2(a^5-b^5)}{8r(a^3-b^3)+3(a^4-b^4)}.$$

CCXI. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Indien men uit een punt van den omtrek eens cirkels koorden trekt, en dezelve alle in uiterste en middelste reden deelt, dan vraagt men naar de meetkunstige plaats van al de deelpunten?

OPGELOST *door* J. BASSAN, J. DOORMAN *en* J. JONKHERT:

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Laat (*Fig.* 158) A het gegeven punt zijn in den omtrek van den cirkel AEC, AE, AE′ *enz.* lijnen, welke in D, D′ *enz.* in uiterste en middelste reden gedeeld zijn, en trekken wij de middellijn AC, dan is

$$AC\times AB=(AC-AB)^2 \text{ en } AE\times AD=(AE-AD)^2,$$

waaruit volgt

AC

$$AC \times AB (AE - AD)^2 = AE \times AD (AC - AB)^2,$$

of $$AC \times AB (AE^2 + AD^2) = AE \times AD (AC^2 + AB^2),$$

of $$AC \times AD (AB \times AD - AE \times AC) = AB \times AE (AB \times AD - AC \times AB),$$

dus $$AC \times AD = AB \times AE,$$

of ook $$AC : AB = AE : AD.$$

Hetgeen een bewijs oplevert voor het XVII Voorstel van het IV Boek der *Meetkunst* van VAN SWINDEN.

Uit de gevondene evenredigheid blijkt de evenwijdigheid der koorden EC en BD, en daar de hoek AEC regt is, zoo heeft dit ook plaats bij den hoek ADB. Dit nu is voor al de hoeken D, D' *enz.* even eens bewezen, en derhalve liggen alle deze punten in den cirkel op AB als middellijn beschreven, welke cirkel dus de gezochte kromme is.

CCXII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Wanneer men uit den tophoek van eenen driehoek eene lijn naar het midden der basis trekt, en uit het midden dezer getrokken lijn, lijnen naar de overstaande hoeken loopen, dan vraagt men den driehoek uit deze drie getrokkene lijnen te bepalen en te construeren?

OPGELOST *door* J. BASSAN, A. B. DE BOCK JUN. *en* J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Zij ABC (*Fig.* 159) een driehoek, waarin BD de zijde AC midden door deelt, en stellen wij BF = FD = a, AF = b en FC = c. Nu is, volgens eene bekende eigenschap,

$$2\,AD^2 = AF^2 + FC^2 - 2\,FD^2,$$

of $$2\,AD^2 = b^2 + c^2 - 2\,a^2,$$

en dus $$AC = 2\,AD = \sqrt{(2\,b^2 + 2\,c^2 - 4\,a^2)}.$$

Omdat in den driehoek ADB, de lijn AF de overstaande zijde midden door deelt, zoo is ook

$$AB^2 + AD^2 = 2BF^2 + 2\,AF^2,$$

of $$AB^2 = 2\,a^2 + 2\,b^2 - AD^2,$$

en voor AD² zijne waarde stellende,

$$AB^2 = 2\,a^2 + 2\,b^2 - \tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}c^2 + a^2$$

$$= 3\,a^2 + \tfrac{3}{2}\,b^2 - \tfrac{1}{2}\,c^2,$$

en $$AB = \tfrac{1}{2}\sqrt{\{12\,a^2 + 6\,b^2 - 2\,c^2\}}.$$

Op

Op dezelfde wijze hebben wij in den driehoek BDC

$$BC^2 + DC^2 = 2BF^2 + 2FC^2,$$

of $$BC^2 = 2a^2 + 2c^2 - DC^2,$$

en voor $DC^2 = AD^2$ zijne waarde stellende, komt er

$$BC^2 = 2a^2 + 2c^2 - \tfrac{1}{4}b^2 - \tfrac{3}{4}c^2 + a^2$$

$$= 3a^2 + \tfrac{5}{4}c^2 - \tfrac{1}{4}b^2,$$

of $$BC = \tfrac{1}{2}\sqrt{(12a^2 + 6c^2 - 3b^2)}.$$

De zijden van den driehoek bekend zijnde, zoo worden de hoeken door de bekende regels gevonden.

Door constructie wordt het voorstel zeer eenvoudig opgelost, op de volgende wijze. Men neme eene willekeurige lijn BD, welke men $= 2a$ stelt en bij F midden door deelt, verder verlenge men dezelve tot in E, makende DE = FD, en beschrijve met de gegevene lijnen DF en FC eenen driehoek op FE als basis, vervolgens voltooije men het parallelogram AFCE en trekke AB en BC, waardoor blijkbaar den driehoek geconstrueerd is.

CCXIII. VOORSTEL.

Door J. Bassan.

Wanneer men uit het midden der lijn die den tophoek van eenen driehoek midden door deelt, lijnen naar de overige hoeken trekt, en deze drie lijnen gegeven zijn, zoo vraagt men daaruit dezen driehoek te bepalen?

Opgelost *door* J. Bassan, J. Jonkheer *en* A. B. de Boer Jun.

Oplossing *van* J. Bassan.

Wanneer ABC (*Fig.* 166) den gevraagden driehoek voorstelt, alwaar nu hoek B door BD in twee gelijke deelen verdeeld wordt en waarin wij stellen $BE = ED = a$, $AE = b$, $EC = c$, $AB = x$ en $BC = y$, dan hebben wij de bekende evenredigheid

$$AB : BC = AD : DC,$$

of $$AB^2 : BC^2 = AD^2 : DC^2,$$

waaruit volgt $AB^2 + AD^2 : BC^2 + DC^2 = AB^2 : BC^2$.

Maar nu is $AB^2 + AD^2 = 2AE^2 + 2BE^2 = 2(b^2 + a^2)$;

en $$BC^2 + DC^2 = 2CE^2 + 2DC^2 = 2(a^2 + c^2),$$

en dan wordt de laatste evenredigheid

$$a^2 + b^2 : a^2 + c^2 = x^2 : y^2;$$

en derhalve $x = y\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}\right)}$ . . . . (A).

Maar omdat BD den hoek B midden door deelt, zoo is ook (Voorstel 197, §. 9.)

$$BD^2 = AB \times BC - AD \times DC,$$

of $4a^2 = xy - AD \times DC.$

Maar uit onze eerste evenredigheid hebben wij

$$x . DC = y . AD,$$

zoodat wij hebben $4a^2 y = xy^2 - x DC^2$,

en daar nu $DC^2 = 2(a^2+c^2) - y^2$,

zoo is $4a^2 y = 2xy^2 - 2x(a^2+c^2)$.

Hierin voor x zijne waarde uit (A) gesteld, en alles door $2y$ gedeeld hebbende, komt er

$$2a^2 = xy - \sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)},$$

en hierin nogmaals de vergelijking (A) substitueerende, komt er

$$2a^2 = y^2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}} - \sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)},$$

waaruit volgt $y = \sqrt{\left\{\frac{2a^2(a^2+c^2)^{\frac{1}{2}} + (a^2+c^2)(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}}$. (B),

en derhalve $x = \sqrt{\left\{\frac{2a^2(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}} + (a^2+b^2)(a^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}}$. (C).

Wij vonden boven

$$DC^2 = 2(a^2+c^2) - y^2,$$

deze vergelijking verandert nu in

$$DC^2 = a^2 + c^2 - 2a^2\left(\frac{a^2+c^2}{a^2+b^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

of $DC = \sqrt{\left\{\frac{(a^2+c^2)(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}} - 2a^2(a^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}}$. (D),

en op dezelfde wijze

$$DA = \sqrt{\frac{(a^2+b^2)(a^2+c^2)^{\frac{1}{2}} - 2a^2(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}} \text{ . (E),}$$

waardoor nu de geheele driehoek bekend is.

CCXLV. VOORSTEL.

Door J. BAMAN.

Men begeert de zijden van eenen driehoek te bepalen, zoo gegeven

ven zijn de middellijn van den omgeschreven cirkel, benevens de middellijn der cirkels welke om de twee driehoeken beschreven worden, in welke de eerste driehoek verdeeld wordt, door de lijn welke een der hoeken midden door deelt?

OPGELOST *door* J. BAIJAN, A. B. DE BOCK JUN. *en* J. JONKHEERT.

OPLOSSING *van* J. BAIJAN.

Laat ABC (*Fig.* 161) de voorgestelde driehoek zijn, waarin BD den hoek B midden door deelt, en LAB, BHC en BGC de cirkels zijn waarvan de middellijnen $DE = 2a$, $BH = 2b$ en $DK = 2c$ gegeven zijn; stellen wij hoek $ABD = DBC = \phi$ en hoek $ADB = \psi$, $AB = x$, $BC = y$ en $AC = z$.

Nu is in den regthoekigen driehoek BHA,

$$BH . Sin. AHB = AB,$$

of $$2b . Sin. AHB = x.$$

Maar hoek AHB = hoek ACB zijnde, zoo is $Sin. AHB = Sin. (\psi - \phi)$, derhalve

$$x = 2b\ Sin. (\psi - \phi).$$

Op dezelfde wijze hebben wij uit den driehoek ABD,

$$AB = LD\ Sin. ADB,$$

of $$x = 2a . Sin. \psi \quad \ldots \ldots \quad (\alpha),$$

en deze beide vergelijkingen verbindende

$$b\ Sin. (\psi - \phi) = a\ Sin. \psi \quad \ldots \ldots \quad (1).$$

Nog hebben wij uit den driehoek ABC,

$$BC = y = BH . Sin. BAC = 2b\ Sin. (\psi + \phi),$$

en uit den driehoek DBC,

$$BC = y = DK\ Sin. BDC = 2c\ Sin. \psi \quad \ldots \quad (\beta),$$

en dus ook $$b\ Sin. (\psi + \phi) = c\ Sin. \psi \quad \ldots \ldots \quad (2).$$

De vergelijkingen (1) en (2) ontwikkelende en bij elkander optellende en aftrekkende, vindt men

$$2b\ Sin. \psi\ Cos. \phi = (a + c)\ Sin. \psi,$$

en $$2b\ Cos. \psi\ Sin. \phi = (a - c)\ Sin\ \psi.$$

Uit de eerste volgt

$$Cos. \phi = \frac{a + c}{2b} \quad \ldots \ldots \quad (3),$$

en uit de tweede $$Tang. \psi = \frac{2b}{a - c} Sin. \phi.$$

Stelt men nu hierin voor $Sin.\phi$ zijnde waarde $\frac{\sqrt{(4b^2-(a+c)^2)}}{2b}$ uit (3) dan heeft men

$$Tang.\psi=\frac{\sqrt{(4b^2-(a+c)^2)}}{a-c}.$$

Omdat nu $Sin.\psi=\frac{Tang.\psi}{\sqrt{1+Tang^2.\psi)}}$ is, zoo volgt uit de laatste vergelijking

$$Sin.\psi=\frac{\sqrt{(4b^2-(a+c)^2)}}{a-c}\times\frac{a-c}{\sqrt{(4b^2-4ac)}}$$

$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{4b^2-(a+c)^2}{b^2-ac}}\quad\ldots\ldots\ldots (4).$$

Wij hebben dan nu uit (α)

$$x=2a\,Sin.\psi=a\sqrt{\frac{4b^2-(a+c)^2}{b^2-ac}}\quad\ldots (5),$$

alsmede uit (β)

$$y=2c\,Sin.\psi=c\sqrt{\frac{4b^2-(a+c)^2}{b^2-ac}}\quad\ldots (6).$$

Verder is uit den driehoek ADB

$$AD=AB\frac{Sin.\phi}{Sin.\psi}$$

en dus omdat $2a=\frac{x}{Sin.\psi}$ is, $AD=2a\,Sin.\phi=\frac{a}{b}\sqrt{\{4b^2-(a+c)^2\}}$,

Op dezelfde wijze hebben wij

$$DC=BC\frac{Sin.\phi}{Sin\,\psi}$$

$$=\frac{c}{b}\sqrt{(4b^2-(a+c)^2)}.$$

Waaruit eindelijk volgt

$$AC=\frac{a+c}{b}\sqrt{(4b^2-(a+c)^2)}.$$

CCXV. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Men begeert de zijden van eenen driehoek te bepalen, zoo gegeven zijn de middellijn van den ingeschreven cirkel en de middellijnen der cirkels welke om de twee driehoeken beschreven worden, in

wel.

welke de eerste Driehoek verdeeld wordt door de lijn welke een der hoeken midden door deelt?

OPGELOST *door* J. BASSAN *en* J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Laat ABC, *Fig.* 162, de gevraagde driehoek zijn, waarin CD den hoek ACB midden door deelt, terwijl de middellijnen der cirkels FGH, CDB en CAD gelijk a, b en c gegeven zijn. Stellen wij nu, even als in het voorgaande voorstel, *hoek* ACD $= \phi$ en *hoek* ADC $= \psi$, dan hebben wij reeds gevonden

$$AC = c\,Sin.\psi,\quad CB = b\,Sin.\psi$$

en $$CD = c\,Sin.(\psi + \phi) = b\,Sin.(\psi - \phi) \quad \ldots (1).$$

Wanneer wij dus de hoeken ϕ en ψ kunnen bepalen, zal het voorstel opgelost zijn. Omdat nu ML $=$ MF $= \frac{1}{2} a$ is, zoo hebben wij

$$CM\,Sin.\phi = \tfrac{1}{2} a \quad\text{en}\quad DM\,Sin.\psi = \tfrac{1}{2} a,$$

of $$CM\,Sin.\psi\,Sin.\phi = \tfrac{1}{2} a\,Sin.\psi \quad\text{en}\quad DM\,Sin.\psi\,Sin.\phi = \tfrac{1}{2} a\,Sin.\phi,$$

en deze vergelijkingen bij elkander tellende, komt er

$$CD\,Sin.\psi\,Sin.\phi = \tfrac{1}{2} a\,(Sin.\psi + Sin.\phi),$$

en hierin voor CD hare waarde uit (1) stellende, komt er

$$2c\,Sin.(\psi + \phi)\,Sin.\phi\,Sin.\psi = a\,(Sin.\psi + Sin.\phi) \quad \ldots (2).$$

De vergelijkingen (1) en (2) zijn nu genoegzaam tot het bepalen der onbekende hoeken. Uit (1) volgt na ontwikkeling en deeling door $Cos.\phi\,Cos.\psi$

$$Tang.\psi = \frac{b+c}{b-c}\,Tang.\phi,$$

en $$Cos^2.\psi = \frac{1}{1 + Tang^2.\psi} = \frac{(b-c)^2\,Cos^2.\phi}{(b-c)^2\,Cos^2.\phi + (b+c)^2\,Sin^2.\phi}$$

$$= \frac{(b-c)^2\,Cos^2.\phi}{(b+c)^2 - 4\,b\,c\,Cos^2.\phi}.$$

Ontwikkelende nu de vergelijking (2) en deelende door $Cos^2.\psi$ dan vindt men

$$2c\,Tang.\psi\,Sin\,\phi\,(Tang.\psi\,Cos.\phi + Sin.\phi) = \frac{a}{Cos.\psi}\,Tang.\psi + \frac{a\,Sin.\phi}{Cos^2.\psi},$$

hierin voor $Tang.\psi$ en $Cos.\psi$ de zoo even gevondene waarde gesteld, komt er

$$2c\,\frac{b+c}{b-c} \times \frac{Sin^2.\phi}{Cos.\phi}\left(\frac{b+c}{b-c} + 1\right) = \frac{a\,(b+c)\,Sin.\phi}{(b-c)\,Cos\,\psi\,Cos.\phi} + \ldots$$

$$+ a\,Sin.\phi \frac{(b+c)^2 - 4bc\,Cos^2.\phi}{(b-c)^2\,Cos^2.\phi},$$

of wel de gelijke factoren weglatende

$$\frac{4cb(b+c)}{b-c} Sin^2.\phi = \frac{a(b+c)}{Cos.\psi} + \frac{a}{(b-c)Cos.\phi}((b+c)^2 - 4bc\,Cos^2.\phi),$$

of

$$\frac{a(b+c)}{Cos\,\psi} = \frac{1}{(c-b)Cos.\phi}\{a[(b+c)^2-4bcCos^2.\phi]-4cb(b+c)Sin^2.\phi Cos.\phi\}.$$

Deze vergelijking in het vierkant verheffende en voor $Cos^2.\psi$ zijne waarde stellende, komt er

$$\frac{a^2(b+c)^2}{(b-c)^2Cos^2.\phi}\{(b+c)^2-4bcCos^2.\phi\} = \frac{a^2[(b+c)^2-4bcCos^2.\phi]^2}{(b-c)^2Cos^2.\phi} \ldots$$

$$-\frac{8abc(b+c)Sin^2\phi}{(b-c)^2Cos\,\phi}[(b+c)^2-4bcCos^2.\phi]+16c^2b^2\frac{(b+c)^2 Sin^4.\phi}{(b-c)^2},$$

of $4a^2bcCos^2.\phi\{(b+c)^2-4bcCos^2.\phi\}=16c^2b^2(b+c)^2Sin^4.\phi Cos^2.\phi$
$-8abc(b+c)Sin^2.\phi Cos.\phi\{(b+c)^2-4bcCos^2.\phi\}$,

of $a^2\,Cos.\phi\{(b+c)^2-4bc\,Cos^2.\}=4cb(b+c)^2Sin^4\,\phi\,Cos.\phi$
$-2a(b+c)\{(b+c)^2-4bcCos^2.\phi\}\,Sin^2.\phi.$

Hierin voor $Sin^2.\phi$ en $Sin^4.\phi$ hunne waarde in $Cos.\phi$ uitgedrukt hebbende, zoo komt er

$$\left.\begin{array}{l} a^2Cos.\phi\{(b+c)^2-4bcCos^2.\phi\}+2a(b+c)\{(b+c)^2-4bcCos^2.\phi\} \\ -2a(b+c)\{(b+c)^2-4bcCos^2.\phi\}Cos^2.\phi-4cb(b+c)^2 \\ (1-2Cos^2.\phi+Cos^4.\phi)\,Cos.\phi \end{array}\right\}=0,$$

alles volgens de magten van $Cos.\phi$ rangschikkende, vindt men

$$4cb(b+c)^2Cos^5.\phi-8abc(b+c)Cos^4.\phi+4cb(a^2-2(b+c)^2)Cos^3\,\phi$$
$$+2a(b+c)(4bc+\overline{b+c}^2)Cos^2\,\phi+(b+c)^2(4cb-a^2)Cos.\phi-2a(b+c)^3=0,$$

waaruit nu ϕ door benadering kan gevonden worden.

CCXVI. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Men vraagt drie kwadraten in geheele getallen waarvan de som der beide eersten zoo veel bedraagt als het derde, en de som der wortels van het tweede en derde zoo veel als het eerste kwadraat.

OPGELOST *door* J. JONKHERT, J. DOORMAN; J. BASSAN *en* A. B. DE BOCK Jun.

Op-

Oplossing van J. Jonkhert.

Stel de wortels der drie kwadraten x, y en z, dan hebben wij uit de voorwaarden van het voorstel

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \text{en} \quad x^2 = y + z,$$

in de eerste vergelijking de waarde van x^2 uit de tweede stellende, komt er

$$y + z = z^2 - y^2,$$

of $$1 = z - y,$$

en $$z = y + 1.$$

Stelt men nu $x = m + 1$, dan is

$$x^2 = m^2 + 2m + 1 = y + z$$
$$= 2y + 1,$$

of $$y = \tfrac{1}{2}(m^2 + 2m).$$

Zoodat men dan slechts voor m een even getal neemt, dan zal aan de voorwaarden van het vraagstuk voldaan worden. Nemen wij, bij voorbeeld, achtervolgens $m = 2, 4, 6$, dan vinden wij

voor $m = 2$ $x = 3$ $y = 4$ $z = 5$,
voor $m = 4$ $x = 5$ $y = 12$ $z = 13$,
voor $m = 6$ $x = 7$ $y = 24$ $z = 25$,

enz. *enz.*

CCXVII. VOORSTEL.

Door J. Bassan.

Men vraagt naar eene harmonische reeks van drie termen, waarvan de wortels der termen eene arithmetische reeks uitmaken en waarvan de som gegeven is?

Opgelost door J. Jonkhert, J. Bassan en A. B. de Bock Jun.

Oplossing van J. Jonkhert.

Stellen wij de wortels der termen van de harmonische reeks

$$x - y, \quad x \quad \text{en} \quad x + y,$$

dan zijn de termen der harmonische reeks

$$(x - y)^2, \quad x^2 \quad \text{en} \quad (x + y)^2,$$

waarvan de som $$3x^2 + 2y^2 = s$$

gegeven is. Uit de voorwaarde dat de reeks eene harmonische is volgt

$$(x - y)^2 : (x + y)^2 = 2xy - y^2 : 2xy + y^2,$$

of $$(x - y)^2 (2x + y) = (2x - y)(x + y)^2,$$

hetwelk ontwikkeld geeft

$$2y(x^2 + y^2) - 8x^2y = 0,$$

waaruit volgt $y^2 = 3x^2$.

Deze waarde gesteld in de vergelijking $3x^2 + 2y^2 = s$ geeft

$$9x^2 = s,$$

of $$x = \tfrac{1}{3}\sqrt{s},$$

en derhalve $$y^2 = \tfrac{1}{3}s,$$

of $$y = \tfrac{1}{3}\sqrt{3s},$$

waardoor nu het vraagstuk opgelost is.

CCXVIII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Men vraagt naar eene harmonische reeks van drie termen, waarvan het product der vierkanten van de eerste en derde term gelijk is aan het vierkant der middelste, en de som der uiterste termen gelijk aan driemaal de middelste?

OPGELOST door A. B. DE BOCK, G. GRAAFLAND en J. BASSAN.

OPLOSSING van A. B. DE BOCK JUN.

Stellen wij de termen der harmonische reeks voor door

$$\frac{1}{x-y}, \quad \frac{1}{x} \quad \text{en} \quad \frac{1}{x+y},$$

dan is uit de voorwaarden van het vraagstuk

$$\frac{1}{(x-y)^2} \times \frac{1}{(x+y)^2} = \frac{1}{x^2} \quad \text{en} \quad \frac{3}{x} = \frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y},$$

of wel $x = x^2 - y^2$ en $2x^2 = 3(x^2 - y^2)$,

waaruit dadelijk volgt

$$x = \tfrac{2}{3}x^2,$$

of $$x = \tfrac{3}{2},$$

en derhalve $$y^2 = x^2 - x = \tfrac{9}{4} - \tfrac{3}{2} = \tfrac{3}{4},$$

of $$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{3},$$

waardoor dan de termen der gevraagde reeks worden

$$\frac{2}{3-\sqrt{3}}, \quad \tfrac{2}{3} \quad \text{en} \quad \frac{2}{3+\sqrt{3}},$$

of ook $$\frac{3+\sqrt{3}}{3}, \quad \tfrac{2}{3} \quad \text{en} \quad \frac{3-\sqrt{3}}{3}.$$

CCXIX. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Men vraagt naar eene arithmetische reeks van drie termen, waarvan de wortels der termen eene harmonische reeks uitmaken, van welke de som der termen $= 5$ is.

Op-

Opgelost *door* J. Jonkhert, A. B. de Bock Jun. *en* J. Bassan.

Oplossing *van* J. Jonkhert.

Stellen wij de termen der harmonische reeks

$$x,\ \frac{2xy}{x+y}\ \text{en}\ y,$$

dan is, volgens de voorwaarden van het vraagstuk,

$$x+y+\frac{2xy}{x+y}=5 \quad (1)$$

en

$$x^2-\frac{4x^2y^2}{(x+y)^2}=\frac{4x^2y^2}{(x+y)^2}-y^2 \quad (2).$$

Uit (1) volgt dadelijk

$$2xy+(x+y)^2=5(x+y),$$

en uit (2)

$$(x^2+y^2)(x+y)^2=8x^2y^2.$$

Tellen wij nu bij de beide leden dezer laatste vergelijking $2xy(x+y)^2$, dan verkrijgen wij

$$(x+y)^2(x+y)^2=8x^2y^2+2xy(x+y)^2,$$

of

$$(x+y)^4=2xy(4xy+(x+y)^2).$$

Hetgeen ook aldus geschreven kan worden

$$\{(x+y)^2+2xy\}\{(x+y)^2-4xy\}=0.$$

Door de eerste factor te nemen, komt men op

$$(x+y)^2=-2xy,$$

waardoor men uit (1) vindt

$$x+y=0 \quad \text{of} \quad x=-y,$$

hetwelk de tweede term der reeks oneindig maakt.

Uit de tweede factor vinden wij

$$(x+y)^2=4xy,$$

hetwelk met (1) verbonden, geeft

$$5(x+y)=6xy.$$

Deze vergelijking in de voorgaande deelende, komt er

$$\tfrac{1}{5}(x+y)=\tfrac{2}{3} \quad \text{of} \quad x+y=\tfrac{10}{3},$$

derhalve $\frac{50}{3}=6xy$ of $\frac{25}{9}=xy$.

Hieruit vindt men nu gemakkelijk

$$x+\frac{25}{9x}=\frac{10}{3},$$

en

$$x^2-\tfrac{10}{3}x+\tfrac{25}{9}=0,$$

derhalve

$$(x-\tfrac{5}{3})^2=0,$$

en $x = 3$,
alsmede $y \mp 3$,
al de termen der reeks worden dus aan elkander gelijk.

CCXX. VOORSTEL.
Door J. BASSAN.

Van eene arithmetische reeks van drie termen is het product der kwadraten van de uiterste termen gelijk aan de vierde magt der middelste, en de som der termen $= 9$, welke is de reeks?

OPGELOST *door* G. GRAAFLAND, J. DOORMAN, J. JONKHEERT *en* J. BASSAN.

OPLOSSING *van* G. GRAAFLAND.

Stellen wij de reeks voor door

$$x - y,\quad x \text{ en } x + y,$$

dan is dadelijk $3x = 9$,
of $x = 3$.
Verder is $(x-y)^2(x+y)^2 = x^4 = 81$,
of $(x-y)(x+y) = \pm 9$,
dat is $(3-y)(3+y) = \pm 9$,
en $9 - y^2 = \pm 9$,
dus $y^2 = 0$ en $y^2 = 3\sqrt{2}$,
wij vinden dus de reeksen

$$3,\ 3,\ 3,$$

of $3 - 3\sqrt{2},\ 3$ en $3 + 3\sqrt{2}$.

CCXXI. VOORSTEL.
Door J. JONKHEERT.

Een punt P (*Fig.* 163) *en eene lijn* AX *zijn in stelling gegeven, uit* P *trekt men de lijnen* PB, PB′, *enz. die de lijn* AX *in* B, B′, *enz. snijden; uit deze snijpunten trekt men vervolgens lijnen* BD, B′D′ *enz. die* AX *onder hoeken doorsnijden, welker cosinus tot de cosinussen van de overeenkomstige hoeken* PBX, PB′X *enz. staan als* $n:1$. *Men vraagt de plaats te bepalen der doorsnijdingen van deze laatste lijnen met elkander, en de voornaamste eigenschappen der hierdoor gevormde kromme?*

OPGELOST *door* J. JONKHEERT *en* A. B. DE BOCK JUN.

OPLOSSING *van* J. JONKHEERT.

Wij nemen tot assen der coördinaten de lijn AX en de loodlijn OP uit P op AX nedergelaten; zij verder OP $= a$, ON $= x$,

NM

$NM = y$, $OB = z$, *hoek* $PBO = \phi$ en *hoek* $OBF = \psi$, zijnde dus volgens de opgave $Cos.\,\psi = n\,Cos.\,\phi$. Nu is in den driehoek MNB,

$$MN = NB\,Tang.\,NBF \quad \text{of} \quad y = (z - x)\,Tang.\,\psi \ . \quad (1),$$

en uit den driehoek OBP,

$$OB = OP\,Cot.\,PBO \quad \text{of} \quad z = a\,Cot.\,\phi \ . \ . \ . \quad (2).$$

De vergelijking (1) en (2) met elkander vermenigvuldigende, komt er

$$yz = (z - x)\,a\,Tang.\,\psi\,Cot.\,\phi$$

$$= (z - x)\,a\,\frac{Sin.\,\psi}{Sin.\,\phi} \times \frac{Cos.\,\phi}{Cos.\,\psi}$$

$$= (z - x)\,a\,\frac{Cos.\,\phi}{Cos.\,\psi} \times \frac{\sqrt{(1 - Cos.^2\,\psi)}}{Sin.\,\phi}.$$

Omdat nu $\frac{Cos.\,\phi}{Cos.\,\psi} = \frac{1}{n}$ is, zoo hebben wij

$$n\,y\,z\,Sin.\,\phi = (z - x)\,a\,\sqrt{(1 - n^2\,Cos.^2\,\phi)}.$$

Maar nu is

$$Sin.\,\phi = \frac{a}{\sqrt{(a^2 + z^2)}} \quad \text{en} \quad Cos.\,\phi = \frac{z}{\sqrt{(a^2 + z^2)}},$$

derhalve

$$n\,y\,z\,\frac{a}{\sqrt{(a^2 + z^2)}} = a(z - x)\sqrt{\left\{1 - n^2\,\frac{z^2}{a^2 + z^2}\right\}},$$

of $$n\,y\,z = (z - x)\sqrt{(a^2 + z^2 - n^2 z^2)} \ . \ . \ . \ . \quad (3).$$

Voor de volgende lijn PB′ blijft y en x dezelfde en de lijn $OB = z$ verandert in OB′; dus zal de verg. (3) nog moeten bestaan wanneer z overgaat in $z + \delta z$; de verg. (3) dan ten opzigte van z differentierende verkrijgen wij nog de vergelijking

$$n\,y = \sqrt{(a^2 + z^2(1 - n^2))} + \frac{z\,(1 - n^2)(z - x)}{\sqrt{(a^2 + (1 - n^2)\,z^2)}},$$

of $$n\,y\sqrt{(a^2 + (1 - n^2)\,z^2)} = a^2 + z^2\,(1 - n^2) + z\,(z - x)(1 - n^2)$$

$$= a^2 + (1 - n^2)\,(2\,z - x)\,z \ . \quad (4).$$

Er blijft dan nog maar overig om z uit de vergelijkingen (3) en (4) te verdrijven, ten einde de vergelijking der gevraagde kromme te vinden. Daartoe vermenigvuldigen wij de verg. (4) met z, en deele dezelve door de vergelijking (3), alsdan komt er

V

$$\sqrt{(a^2+(1-n^2)z^2)}=\frac{a^2+(1-n^2)(2z-x)z}{(z-x)\sqrt{(a^2+(1-n^2)z^2)}}z,$$

of $(z-x)(a^2+(1-n^2)z^2)=a^2z+z^2(1-n^2)(2z-x)$,

of $-a^2x=(1-n^2)(z^2(2z-x)-(z-x)z^2)$

$$=(1-n^2)z^3,$$

dus $$z^3=\frac{a^2x}{n^2-1}.$$

Deze waarde in (3) gesteld, geeft

$$ny\sqrt[3]{\frac{a^2x}{n^2-1}}=\left(\sqrt[3]{\frac{a^2x}{n^2-1}}-x\right)\sqrt{\left\{a^2+(1-n^2)\left(\frac{a^2x}{n^2-1}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}},$$

waaruit volgt

$$y=\frac{1}{n}\left\{1-\left(\frac{x^2(n^2-1)}{a^2}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}\sqrt{\left\{a^2-(a^4x^2(n^2-1))^{\frac{1}{3}}\right\}},$$

of $$y=\frac{a}{n}\left\{1-\left(\frac{x^2(n^2-1)}{a^2}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}} \quad \ldots \quad (5),$$

voor de gevraagde vergelijking der kromme.

Uit het dubbelde teeken hetwelk men voor de tweede magtswortel moet stellen, volgt dat voor elke waarde van x er twee waarden voor y kunnen bestaan; de kromme lijn heeft dus ter wederzijde van de lijn AX dezelfde gedaante.

Voor $n < 1$ zal y altijd eene mogelijke waarde verkrijgen wat ook x worde, in dat geval strekt zich de kromme uit tot in het oneindige, zoo wel aan de zijde der positieve als negatieve abscissen.

De vergelijking (5) differentierende, zoo komt er

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{3}{2}\frac{a}{n}\left\{1-\left(\frac{(n^2-1)x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}}\times\frac{1}{3}\left(\frac{(n^2-1)x^2}{a^2}\right)^{-\frac{2}{3}}\times\frac{2x(1-n^2)}{a^2}$$

$$=\frac{a^{\frac{1}{3}}}{n}\left\{1-\left(\frac{(n^2-1)x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}}\times\frac{(1-n^2)^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} \quad . \quad . \quad (6).$$

Voor $x=0$ wordt $\frac{\partial y}{\partial x}$ oneindig, derhalve is de lijn OP eene raaklijn der kromme; voor deze waarde van x wordt (5)

$$y=\pm\frac{a}{n}.$$

Nemende dan $OC=OC'=\frac{a}{n}$ dan zijn de punten C en C′ keer-

pun-

punten der kromme lijn. Omdat men verder (6) ook aldus schrijven kan

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{(a(1-n^2))^{\frac{1}{3}}}{n}\left\{\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}-\left(\frac{(n^2-1)}{a^2}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

zoo ziet men dat voor x oneindig

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{(a(1-n^2))^{\frac{1}{3}}}{n}\times\left(\frac{1-n^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$=\frac{(1-n^2)^{\frac{1}{2}}}{n}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(7).$$

Uit (5) en (6) volgt ook nog

$$y\frac{\partial x}{\partial y}-x=\frac{a}{n}\left\{1+\left(\frac{(1-n^2)x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}$$

$$\cdot\frac{n\times x^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}(1-n^2)^{\frac{1}{2}}}\left\{1+\left(\frac{(1-n^2)x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}^{-\frac{1}{2}}-x$$

$$=\left(\frac{a^2x}{1-n^2}\right)^{\frac{1}{3}}\left\{1+\left(\frac{(1-n^2)x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}-x$$

$$=\left(\frac{a^2x}{1-n^2}\right)^{\frac{1}{3}},$$

voor het stuk OT, welke eene raaklijn van de as der abscissen afsnijdt. Stelt men in dezelve x oneindig, dan vindt men het punt T alwaar de assymptoot de as AX doorsnijdt. Voor x oneindig wordt nu

$$y\frac{\partial x}{\partial y}-x=\infty.$$

De raaklijn aan het laatste punt der kromme gaat dan op eenen oneindigen afstand van den oorsprong door de as der abscissen; en daar wij reeds uit (7) zien, dat deze raaklijn eenen hoek, wiens tangens $\frac{a}{n}$ is, met deze as maakt, zoo blijkt het dat er geene eigenlijke assymptoten voor de kromme bestaan.

Voor $n>1$ zal y onbestaanbaar worden zoodra

$$\left(\frac{x^2(n^2-1)}{a^2}\right)^{\frac{1}{3}}>1$$

is; wordt deze waarde $=1$ dan is $y=0$, en het blijkt genoegzaam

maar dat alsdan de kromme gesloten is, of in zich zelve wederkeert.

Voor $n = 1$, gaat de kromme in een stelsel van twee regte lijnen over, wier vergelijking is

$$y = \pm \frac{a}{n}.$$

Het is niet moeijelijk de gevraagde kromme lijn door constructie te bepalen. Daartoe merke men op, dat dewijl de cosinussen der hoeken ϕ en ψ in rede staande als $1:n$, de sinussen der hoeken OPB en OFB in dezelfde rede staan, indien men derhalve het punt O′ (*Fig.* 164) zoo bepaalt, dat OP : O′P = $n : 1$, en met deze lijnen als stralen uit P cirkelbogen ON en O′N′ trekt, verder ED evenwijdig aan OP trekt, dan zal *Sin*. OPB : *Sin*. O′PD = PD : PB = O′P : OP = $1 : n$, trekkende dan BF evenwijdig aan PD, dan zal ook *Cos*. PBO : *Cos*. FBO = $1 : n$ zijn. Op dezelfde wijze de lijn F′B′ bepalende, dan zal het snijpunt F′ tot de begeerde kromme behoren; en aldus zal men genoegzaam naauwkeurig de loop dezer kromme kunnen bepalen, door een genoegzaam aantal punten in de lijn AX aan te nemen. Door de cirkelbogen ON en O′N′ aan de andere zijde van YY′ te verlengen, zal men op dezelfde wijze het gedeelte der kromme regts van de lijn YY′ kunnen vinden. Daar men eindelijk de hoeken FBO, F′B′O, *enz.* even zoo goed beneden de lijn AX had kunnen construeren, door OBH, OB′H′ *enz.* respectivelijk gelijk aan FBO, B′B′O, *enz.* te nemen, zoo blijkt het, hoe de takken beneden AX gevonden worden.

Omdat de sinussen der hoeken, welke de lijnen PB en BF met de lijn OY maken, in rede van $1 : n$ staan en dewijl dit de wet is, welke de lichtstralen volgen bij hunne breking of overgang van een middelstof in eene andere, wanneer de grens dezer stoffen een plat vlak is, zoo blijkt het dat de hier bepaalde kromme de zoogenaamde *brandlijn van breking* is.

CCXXII. V O O R S T E L.

Door J. JONKBERT.

Men vraagt de meetkunstige plaats te bepalen van de zwaartepunten der driehoeken, welke een gegeven basis en omtrek hebben?

Op-

OPGELOST door J. JONKHERT, J. DOORMAN en A. B. DE BOCK JUN.

OPLOSSING van J. JONKHERT.

Zij in *Fig.* 165 FF′ de gegevene bazis, dan liggen, gelijk bekend is, de toppen van al de driehoeken FMF′ wier opstaande zijden eene standvastige som uitmaken, in den omtrek eener ellips, waarvan F en F′ de brandpunten en wier groote as AB = FM + MF′ is. Verder ligt het zwaartepunt P eens driehoeks FMF′ op een derde gedeelte van de lijn OM, die het midden der bazis met de top vereenigt; trekt men derhalve de loodlijnen PD en PI, alsmede HM en MN, dan ziet men dat de abscis PD en ordinaat PI van het zwaartepunt altijd een derde gedeelte zijn van de abscis HM en van de ordinaat MN der ellips, waarin de toppen der driehoeken zijn gelegen. Hieruit volgt dan, dat de zwaartepunten van al de driehoeken, die gelijke bazis en omtrek hebben, in eene ellips gelegen zijn, die gelijkvormig is aan de ellips AEB waarin de toppen der driehoeken gelegen zijn. De assen der gevraagde ellips staan dus ook tot die van de ellips AEB als 1 : 3, en daar het middelpunt der gezochte ellips hetzelfde is als dat van de ellips AEB, en de assen mede op elkander vallen, zoo is de gevraagde ellips volkomen bepaald.

Indien FF′ = $2e$ en F′M + MF = $2a$ is, dan zal de vergelijking der ellips AEB zijn

$$y^2 = \frac{a^2 - e^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

en die der ellips PB′A′

$$y'^2 = \frac{a^2 - e^2}{a^2}\left(\tfrac{1}{9}a^2 - x'^2\right).$$

CCXXIII. VOORSTEL.

Door J. JONKHERT.

Men vraagt de formule $\delta y = \frac{1}{4} Cos^2.x\, Sin^2.y\, \delta x + (\frac{1}{2} y\, Cos^2.x + Cosec.\,2x)\, Tang.\,y\, \delta x + y\,(Cosec.\,2x + \frac{1}{2} y\, Cos^2.x)\, Sec^2.y\, \delta x$ *te integreren?*

OPGELOST door J. JONKHERT en A. B. DE BOCK JUN.

OPLOSSING van J. JONKHERT.

Men kan de gegevene uitdrukking aldus schrijven

Cos².

$$Cos^2\, y.\delta y = \tfrac{1}{4} Cos^2.x Sin^2.y Cos^2.y \delta x + (\tfrac{1}{2} y Cos^2.x + Cosec.2x)\, Sin.y\, Cos.y \delta x$$
$$+ y\,(Cosec.\, 2\,x + \tfrac{1}{4}\, y\, Cos^2.\, x)\,\delta x$$
$$= \tfrac{1}{4}\, Cos^2.x(Cos.y Sin.y + y)^2 \delta x + Cosec.2x(Cos.y Sin.y + y)\delta x.$$

Stellen wij nu

$$Cos.\, y\, Sin.\, y + y = z,$$

dan is, vooreerst

$$\delta z = Cos^2.\, y \delta y - Sin^2.\, y \delta y + \delta y$$
$$= 2\, Cos^2.\, y\, \delta y,$$

en dan verandert onze laatste vergelijking in

$$\tfrac{1}{2}\,\delta z = \tfrac{1}{4}\, Cos^2.\, x.\; z^2 \delta x + z\, Cosec.\, 2\,x\,.\,\delta x,$$

of $\delta z = \tfrac{1}{2}\, Cos^2.\, x\,.\, z^2\, \delta x + 2\, z\, Cosec.\, 2\, x\, \delta x.$

Stellen wij nu

$$-2\, Cosec.\, 2\, x = -\frac{1}{Sin.\, x\ Cos.\, x} = P,$$

en $\tfrac{1}{2}\, Cos^2.\, x = Q,$

dan verkrijgen wij

$$\delta z + z\, P\, \delta x = Q\, z^2\, \delta x.$$

Nu is (L. R. SCHMIDT, *Differ. en Integr. Rek.* § 268).

$$z = \frac{1}{-e^{\int P \delta x} \int e^{-\int P \delta x} Q\, \delta x}.$$

wij hebben dan slechts nu nog de aangewezene integratien te verrigten.

Daartoe is

$$\int P \delta x = \int -\frac{\delta x}{Sin.\, x\ Cos.\, x}$$
$$= \int \frac{\delta.\ Cot.\, x}{Cot.\, x} = Log.\, Cot.\, x,$$

derhalve $e^{\int P \delta x} = Cot.\, x,$

en $e^{-\int P \delta x} = \frac{1}{Cot.\, x} = Tang.\, x.$

Wij hebben dus

$$z = \frac{1}{-Cot.\, x \int Q\ Tang.\, x\, \delta x}$$
$$= -\frac{Tang.\, x}{\tfrac{1}{2}\int Tang.\, x\ Cos^2.\, x\, \delta x} = \frac{-2\, Tang.\, x}{\int Sin.\, x\ Cos.\, x\, \delta x}$$

=

$$=\frac{-2\,Tang.\,x}{\frac{1}{2}Sin^2.x}=\frac{-4}{Sin.x\,Cos.x}$$

$$=\frac{-2}{Sin.2x},$$

voor x zijne waarde schrijvende, komt er eindelijk.

$$Sin.y\,Cos.y+y=-\frac{4}{Sin.2x}+C.$$

CCXXIV. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Men vraagt eene rekenkunstige reeks van drie leden, zoodanig dat het eerste lid een kwadraat, het tweede lid een pronik en het derde een cubiek zij?

OPGELOST *door* J. BASSAN, J. DOORMAN *en* J. JONKHEERT.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Stel de wortels van het kwadraat $=x$, van het pronik $=y$ en van het cubiek getal $=z$, dan zijn de termen der gevraagde reeks

$$x^2,\quad y^2+y \text{ en } z^3,$$

en derhalve
$$x^2+z^3=2y^2+2y,$$
zoodra nu aan deze vergelijking, door geheele getallen voor x, y en z te nemen, voldaan wordt, is het vraagstuk opgelost.

Stellen wij dan

$$x^2=2y,\quad z^3=2y^2 \text{ en } y=ax,$$

dan hebben wij

$$x^2=2ax,$$

of
$$x=2a,$$

en
$$z^3=2a^2x^2=8a^4,$$

derhalve moet a^4 eene derde magt zijn; nemende dus $a^4=n^{12}$, dan worden de termen der reeks

$$4a^2,\quad a^2x^2+ax \text{ en } 8n^{12},$$

of voor a zijne waarde in n stellende

$$4n^6,\quad n^6x^2+n^3x \text{ en } 8n^{12},$$

derhalve
$$4n^6+8n^{12}=2n^6x^2+2n^3x,$$

of
$$2n^3+4n^9=n^3x^2+x,$$

of
$$x=-\frac{1}{2n^3}\pm\sqrt{\left(2+4n^6+\frac{1}{4n^6}\right)}$$

$$=-\frac{1}{2n^3}\pm\frac{1}{2n^3}\sqrt{(8n^6+16n^{12}+1)}$$

$$=\frac{1}{2n^3}(-1 \pm (1+4n^6))$$

$$=\frac{1}{2n^3}(4n^6)=2n^3,$$

of

$$x=-\frac{2+4n^6}{n^3},$$

elke geheele waarde voor n zal dus aan de gegevene vraag voldoen, wanneer men zich enkel tot de positieve waarden van x bepaalt.

De waarde van x in de laatste reeks overbrengende, komt er

$$4n^6, \quad 4n^{12}+2n^6 \quad \text{en} \quad 8n^{12},$$

voor $n=1$ wordt de reeks

$$4, \quad 6, \quad 8,$$

voor $n=2$

$$174, \quad 16463 \quad \text{en} \quad 32752.$$

CCXXV. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Men vraagt drie getallen zoodanig bepaald, dat zoo wel de som als het verschil der producten van het eerste en tweede, en tweede en derde, kwadraten worden?

OPGELOST *door* J. BASSAN, L. J. ULMAN, A. B. DE BOCK JUN. *en* J. JONKHEERT.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

Laten de drie gevraagde getallen zijn

$$xy, \quad y \quad \text{en} \quad yz,$$

dan moeten, volgens de voorwaarden des vraagstuks,

$$xy^2+y^2z \quad \text{en} \quad xy^2-y^2z$$

vierkanten zijn. Dit zal nu plaats hebben, zoodra $x+z$ en $x-z$ kwadraten worden. Hiertoe stelle men

$$x+z=a^2$$

en

$$x-z=b^2,$$

dan vindt men door optelling en aftrekking,

$$x=\frac{a^2+b^2}{2},$$

en

$$z=\frac{a^2-b^2}{2}.$$

Zoodra men nu voor a en b geheele positieve getallen en beide

te

te gelijk even of oneven neemt, zal men voor s en x geheele getallen hebben; en hierbij y naar willekeur aannemende, is het vraagstuk opgelost. De drie gevraagde getallen zijn namelijk

$$\frac{a^2+b^2}{2}y,\quad y \text{ en } \frac{a^2-b^2}{2}y.$$

voor $a=4$, $b=2$ en $y=5$ heeft men de getallen

50, 5 en 30

en zoo vervolgens.

CCXXVI. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Twee getallen te vinden, welker som een kwadraat en verschil een pronik zij?

OPGELOST *door* J. BASSAN, L. J. ULMAN, J. JONKHERT, A. B. DE BOCK JUN. *en* G. GRAAFLAND.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Stel voor de gevraagde getallen

$$x \text{ en } p^2x^2-x,$$

dan is de som een kwadraat; wij moeten dus slechts p^2x^2-2x tot een pronik maken, en dit zal plaats hebben zoodra

$$-2x=px$$

is, of

$$p=-2.$$

Wij hebben dan voor de gevraagde getallen

$$x \text{ en } 4x^2-x.$$

Zoo zijn voor $x=3$ de getallen 3 en 33; en zoo vervolgens.

CCXXVII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Twee getallen te vinden, welker som een pronik en verschil een kwadraat zij?

OPGELOST *door* J. BASSAN, L. J. ULMAN, J. JONKHERT, A. B. DE BOCK JUN. *en* G. GRAAFLAND.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Stel voor de gevraagde getallen

$$x \text{ en } p^2x^2+x,$$

dan is het verschil altijd een kwadraat, en opdat de som p^2x^2+2x een pronik worde, moet $2x=px$ of $p=2$ zijn; en alsdan hebben wij voor de gevraagde getallen

x en $4x^2+x$,
zoo vindt men voor $x=3$, 3 en 39 *enz.*

CCXXVIII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Wanneer men loodlijnen op de uiteinden der grondlijn van eenen driehoek oprigt, en de opstaande zijden verlengt tot zij deze loodlijnen ontmoeten, dan worden er twee driehoeken gevormd; zoo nu gegeven zijn de stralen der cirkels, welke om deze driehoeken kunnen beschreven worden, benevens de tophoek van den oorspronkelijken driehoek, dan vraagt men laatstgenoemden te bepalen?

OPGELOST *door* J. BASSAN, J. DOORMAN *en* A. B. DE BOCK JUN.

OPLOSSING *van* J. DOORMAN.

Zij ADB (*Fig.* 166) de driehoek, alwaar AG en BC loodregt op AB getrokken zijn, zoodat de tophoek ADB $=a$ en de stralen DM en DN des omgeschreven' cirkels van de driehoeken, $=r$ en r' gegeven zijn.

Omdat de driehoeken AGD en CBD gelijkvormig zijn, zoo zijn ook de stralen DM en DN alsmede de loodlijnen ME en NH evenredig met de halve zijden DC en AD, de regthoekige driehoeken DME en DNH zijn derhalve gelijkvormig en de beide stralen DN en DM liggen in eene regte lijn. Verder is de hoek DCB gelijk aan de helft van den hoek DMB, of gelijk aan den hoek DMF. De complementen CAB en MDF dezer hoeken zijn dus ook aan elkander gelijk, zoodat stellende CAB $=\phi$, zoo is ook MDF $=$ NDG $=\phi$; op dezelfde wijze is hoek NDA $=$ CDM $=$ DAB $=180-(a+\phi)$.

Nu is $\quad AD:DB=Sin.(a+\phi):Sin.\phi$,

maar $\quad AD:DB=DH:DF$,

en $\quad DH=ND.Cos.NDH=r'Cos.(180^\circ-(a+\phi))$
$\quad =-r'Cos.(a+\phi)$

$\quad DF=DM.Cos\,MDF=r\,Cos.\phi$,

derhalve $\quad Sin.(a+\phi):Sin.\phi=-r'Cos.(a+\phi):r\,Cos.\phi$,

waaruit volgt

$$r\,Sin.(a+\phi)\,Cos\,\phi=-r'\,Sin.\phi\,Cos.(a+\phi),$$

of $\quad r\,Tang.(a+\phi)=-r'\,Tang.\phi \quad \ldots\ldots\ldots (a).$

Ontwikkelt men nu $Tang.(a+\phi)$ en schrijft kortheidshalve voor $Tang.a$, a, en voor $Tang.\phi$, x, dan komt er

$r(a+x)$

$$r(a+x)=-r'x(1-ax),$$

waaruit volgt

$$x^2-x\left(\frac{1}{a}+\frac{r}{r'a}\right)=\frac{r}{r'},$$

$$x=\frac{1}{2a}(1+\frac{r}{r'})\pm\sqrt{\left(\frac{r}{r'}+\frac{1}{4a^2}(1+\frac{r}{r'})^2\right)},$$

of $Tang.\phi=\frac{1}{2}Cot.a(1+\frac{r}{r'})\pm\sqrt{\left\{\frac{r}{r'}+\frac{1}{4}Cot^2.a(1+\frac{r}{r'})^2\right\}}.$

De hoek ϕ bekend zijnde, zoo heeft men terstond de beide zijden AD en DB gevonden, waaruit dan de derde zijde op de gewone wijze berekend wordt.

CCXXIX. VOORSTEL.

Door J. Bassan.

Wanneer men loodlijnen op de uiteinden der grondlijn van eenen driehoek opriġt en de opstaande zijden verlengt tot zij deze loodlijnen ontmoeten, dan worden er twee driehoeken gevormd; zoo nu gegeven zijn de stralen der cirkels, welke in deze twee driehoeken beschreven kunnen worden, benevens de tophoek van den oorspronkelijken driehoek, dan vraagt men deze te bepalen?

Opgelost *door* J. Bassan, J. Doorman *en* A. B. de Bock Jun.

Oplossing *van* J. Bassan.

Zij ABC (*Fig.* 167) de gegeven driehoek, AD en CE de getrokkene loodlijnen, zoodat de stralen OM $=r$ en M′O′ $=r'$ gegeven zijn. Daar nu de lijnen BN en BN′ de hoeken EBC en DBA midden door deelen, zoo zijn deze lijnen in elkanders verlengde gelegen. Verder zijn de regthoekige driehoeken BMO en BM′O′ gelijkvormig, dewijl hoek M′BO′ = EBM = MBO is; de driehoeken BEC en DBA zijn mede gelijkvormig wegens de evenwijdigheid der lijnen AD en EC. En daar in gelijkvormige driehoeken de even eens geplaatste lijnen evenredig zijn, zoo hebben wij de evenredigheid

$$MO : M'O' = AB : BE = r : r'.$$

Stellen wij nu hoek BCA $=\phi$, dan volgt uit den driehoek ABC

$$AB : BC = Sin.\phi : Sin.(a+\phi),$$

en uit den driehoek BEC

$$BC : BE = Sin.BEC : Cos.\phi$$
$$= Cos.BAC : Cos.\phi = -Cos.(a+\phi) : Cos.\phi,$$

 de.

deze evenredigheid met de voorgaande vermenigvuldigende, komt er

$$AB : BE = - Cos.(a+\phi) Sin.\phi : Sin.(a+\phi) Cos.\phi,$$

en daar wij reeds gevonden hebben

$$AB : BE = r : r',$$

zoo volgt hieruit

$$r\, Sin.(a+\phi) Cos.\phi = - r' Cos.(a+\phi) Sin.\phi,$$

of $\quad r\, Tang.(a+\phi) = - r' Tang.\phi,$

en dewijl dit volkomen dezelfde vergelijking is, als (a) van het voorgaande voorstel, zoo zal men even eens vinden

$$Tang.\phi = \tfrac{1}{2} Cot.a\left(1+\frac{r}{r'}\right) \pm \sqrt{\left\{\frac{r}{r'} + \tfrac{1}{4} Cot^2.a\left(1+\frac{r}{r'}\right)^2\right\}}.$$

De hoek ϕ bekend zijnde, zoo is ook de hoek OCE bekend, en derhalve

$$OC = r\, Cot.\tfrac{1}{2}(90 - \phi)$$

gevonden, en daar $BO = r\, Cot.(90 - \tfrac{1}{2}a) = r\, Tang.\tfrac{1}{2}a$ is, zoo is de zijde BC bekend. Op dezelfde wijze of wel door de evenredigheid der sinussen en zijden kunnen de overige zijden gevonden worden.

CCXXX. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Wanneer men op de grondlijn van eenen driehoek loodlijnen oprigt en de opstaande zijden verlengt tot zij deze loodlijnen ontmoeten, dan zullen er twee driehoeken gevormd worden; zoo nu gegeven zijn de stralen der omgeschreven cirkels dezer driehoeken en die van den oorspronkelijken driehoek, zoo vraagt men deze te bepalen?

OPGELOST *door* J. JONKERT, J. BASSAN, J. DOORMAN *en* A. B. DE BOCK JUN.

OPLOSSING *van* J. JONKHERT.

Zij (*Fig.* 168) ABC de gegeven driehoek en AD en BE de getrokkene loodlijnen op de uiteinden der bazis. Indien dan O het middelpunt is van den cirkel om ABC beschreven, en OF eene loodlijn op het midden van AB nedergelaten, dan is de hoek ACO = hoek AOF; derhalve

$$\tfrac{1}{2}AB = AO\ Sin.AOF = AO\ Sin.ACB,$$

of wanneer wij de middellijn des omgeschreven cirkels van ACB $= d$ nemen, zoo is

AB

$$AB = d.Sin.ACB.$$

Trekt men nu de loodlijn CG, dan is de dubbele inhoud van den driehoek $ACB = AB \times CG$; doch deze dubbele inhoud is ook gelijk aan $AC \times CB \times Sin.ACB$, derhalve

$$AB \times CG = AC \times CB\ Sin.ACB,$$

en hiermede de vergelijking $AB = d.Sin.ACB$ verbindende, zoo komt er

$$CG \times d = AC \times CB,$$

of *in elken driehoek is het product van twee zijden gelijk aan dat van de middellijn des omgeschreven cirkels met de loodlijn uit den ingesloten hoek op de derde zijde nedergelaten.*

Stellen wij dan $CG = x$, $AG = y$, $GB = z$, de middellijn des omgeschreven cirkels van $ACD = d'$ en die van den driehoek $CEB = d''$, dan zullen wij de volgende vergelijkingen hebben

$$\left.\begin{array}{l} x.d = AC \times CB \\ y.d' = AC \times CD \\ z.d'' = CB \times CE \end{array}\right\} \ldots\ldots\ (\alpha).$$

Deelende de eerste door de tweede en derde, dan verkrijgt men

$$\frac{xd}{yd'} = \frac{CB}{CD} \text{ en } \frac{xd}{zd''} = \frac{AC}{CE}.$$

Maar omdat de driehoeken ACD en CBE gelijkvormig zijn, zoo is

$$CB : CD = CE : CA = CH : CI = z : y,$$

of

$$\frac{CB}{CD} = \frac{CE}{AC} = \frac{z}{y}.$$

Hierdoor veranderen de laatste vergelijkingen in

$$\frac{xd}{yd'} = \frac{z}{y} \text{ en } \frac{xd}{zd''} = \frac{y}{z},$$

dus $xd' = zd'$ en $xd = yd''$ . . . . . (β),

maar nu is ook

$$x^2 + y^2 = AC^2 \text{ en } x^2 + z^2 = CB^2,$$

waardoor de eerste der vergelijkingen (α) verandert in

$$xd = \sqrt{(x^2+y^2)(x^2+z^2)},$$

of

$$x^2 d^2 = (x^2+y^2)(x^2+z^2).$$

Stelt men nu in deze vergelijking voor y en z hunne waarde uit (β), dan komt er

 $x^2 d^2$

$$x^2 d^2 = (x^2 + x^2 \frac{d^2}{d'^2})(x^2 + x^2 \frac{d^2}{d''^2}),$$

of $$d^2 d'^2 d''^2 = (d'^2 + d^2)(d''^2 + d^2) x^2,$$

en dan vindt men

$$x = \frac{d d' d''}{\sqrt{(d^2 + d'^2)(d^2 + d''^2)}},$$

derhalve $$y = x \frac{d}{d'} = \frac{d^2 d'}{\sqrt{(d^2 + d'^2)(d^2 + d''^2)}},$$

en $$z = x \frac{d}{d''} = \frac{d^2 d''}{\sqrt{(d^2 + d'^2)(d^2 + d''^2)}},$$

dus $$AB = y + z = \frac{d^2(d' + d'')}{\sqrt{(d^2 + d'^2)(d^2 + d''^2)}},$$

$$AC = \sqrt{(x^2 + y^2)} = \frac{\sqrt{(d^2 d'^2 (d^2 + d''^2))}}{\sqrt{(d^2 + d'^2)(d^2 + d''^2)}} = \frac{d d'}{\sqrt{(d^2 + d'^2)}},$$

en $$BC = \sqrt{(x^2 + z^2)} = \frac{\sqrt{(d^2 d''^2 (d''^2 + d^2))}}{\sqrt{(d^2 + d''^2)(d + d'^2)}} = \frac{d d''}{\sqrt{(d^2 + d''^2)}}.$$

CCXXXI. VOORSTEL.

Door J. C. VAN SETTEN.

Indien men op de koorde van een cirkelkwadraat eenen halven cirkel beschrijft, dan vraagt men, den inhoud van het gedeelte, begrepen tusschen de beide eerste omtrekken en eene lijn getrokken uit het middelpunt van het kwadraat?

OPGELOST *door* J. C. VAN SETTEN, J. JONKHERT, H. STROOMAN, J. BASSAN, J. DOORMAN *en* A. B. DE BOCK JUN.

OPLOSSING *van* J. C. VAN SETTEN.

Zij, in *Fig.* 169, ABC het cirkelkwadrant, op wiens *koorde* BC de cirkel AEC is beschreven, dan gaat deze cirkel door het middelpunt A, omdat *hoek* DAC = *hoek* DCA is. Laat verder AE loodregt op BC en AG willekeurig getrokken worden, dan moet de inhoud van *Fig.* NGCN gevonden worden.

De inhouden van twee cirkelsectoren staan tot elkander in zamengestelde rede van de hoeken aan het middelpunt en van het vierkant der stralen; zoodat de lijn DG trekkende, men hebben zal

Inh. Sect. EDG : *Inh. Sect.* FAN = *hoek* EDG × DE² : *hoek* FAN × AF².

Maar nu is *hoek* EDG = 2 EAG = 2 FAN,

derhalve *Sect.* EDG : *Sect.* FAN = 2 DE² : AF²,

en nu is AF² = AC² = 2 CD² = 2 DE²,

dus

dus $\quad$ *Sect.* EDG = *Sect.* FAN,
hierbij tellende $\quad$ *drieh.* ADG = *drieh.* ADG,
komt er $\quad$ EAGE = *Sect.* FAN + *drieh.* ADG,
hier aftrekkende $\quad$ *Sect.* NAF = *Sect.* FAN,
blijft er $\quad$ *inh.* EFNGE = *drieh.* ADG.

Valt de lijn AG langs CA, dan gaat de driehoek ADG in den driehoek ADC over, en derhalve is de inhoud van FCEF gelijk aan den driehoek ADC. Hieruit volgt dan nu, dat de inhoud van het gedeelte NGCN gelijk is aan den driehoek, welke AD tot bazis KC tot hoogte heeft, of gelijk is aan AD × ½ KC.

CCXXXII. VOORSTEL.

Door J. C. VAN SETTEN.

Wanneer men op de koorde van een cirkelkwadrant eenen halven cirkel beschrijft, dan vraagt men den inhoud van het gedeelte, begrepen tusschen de beide eerste omtrekken en twee lijnen getrokken uit het middelpunt van het kwadrant, eene dezer lijnen loodregt op de koorde van het kwadrant staande?

OPGELOST *door* J. C. VAN SETTEN, J. JONKHEERT, H. STROOTMAN, J. BASSAN, J. DOORMAN *en* A. B. DE BOCK JUN.

OPLOSSING *van* J. C. VAN SETTEN.

Laat wederom, in *Fig.* 169, ABC het cirkelkwadrant, en AEC den cirkel op deszelfs koorde beschreven, voorstellen; alsmede AE loodregt op CB en AG willekeurig getrokken zijn; dan hebben wij in de oplossing van het voorgaande voorstel aangetoond, dat de inhoud van NGEFN gelijk was aan den inhoud van den driehoek ADG.

Laat dan AC = r en hoek DAG = a gegeven zijn, dan is hoek EDG = $2a$; verder is AD = DC = DG = $\frac{1}{2}\sqrt{2}.r$, dus in den driehoek HDG, HG = DG. *Sin.* GDH of HG = $\frac{1}{2}\sqrt{2}.r\,Sin.\,2a$, derhalve hebben wij voor den inhoud van den driehoek ADG, of van het gevraagde figuur NGEFN,

$$\tfrac{1}{2}AD \times HG = \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}\sqrt{2}.r.\tfrac{1}{2}\sqrt{2}.r\,Sin.\,2a$$
$$= \tfrac{1}{4}\,r^2\,Sin.\,2a.$$

CCXXXIII. VOORSTEL.

Door A. VAN DER SWAN.

Eene meetkunstige reeks van drie termen te vinden, welker som (65) *en product* (3375) *gegeven zijn?*

Opgelost *door* A. van der Swan, J. Bassan, L. J. Ulman, J. Doorman, J. Jonkhert, H. Strootman, A. B. de Bock Jun. *en* G. Graafland.

Oplossing *van* A. van der Swan.

Stel voor de gevraagde reeks

$$x^2,\ xy \text{ en } y^2,$$

dan is, volgens het vraagstuk,

$$x^2+xy+y^2=a \text{ en } x^3y^3=b.$$

Uit de laatste vergelijking volgt

$$xy=\sqrt[3]{b},$$

deze vergelijking met 3 vermenigvuldigd en van de eerste afgetrokken geeft

$$(x-y)^2=a-3\sqrt[3]{b}.$$

Telt men daarentegen de waarde van xy bij de eerste vergelijking, dan komt er

$$(x+y)^2=a+\sqrt[3]{b},$$

wij hebben dus $x-y=\sqrt{(a-3\sqrt[3]{b})}$,

en $x+y=\sqrt{(a+\sqrt[3]{b})}$,

waaruit dus door optelling en aftrekking volgt

$$x=\tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{(a-3\sqrt[3]{b})}+\sqrt{(a+\sqrt[3]{b})}\right\},$$

en $y=\tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{(a+\sqrt[3]{b})}-\sqrt{(a-3\sqrt[3]{b})}\right\}$.

Stelt men nu $a=65$ en $b=3375=15^3$, dan vindt men

$$x=\tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{20}+\sqrt{80}\right\}=3\sqrt{5},$$

en $y=\sqrt{5}$,

derhalve de reeks 45, 15 en 5.

CCXXXIV. VOORSTEL.

Door C. F. Julius.

Eene som van 3000 *gulden wordt onder drie personen verdeeld.* A *ontvangt zijn aandeel in drie guldens, en* B *en* C *het hunne in goudguldens; het aantal guldens* (*à* 20 *st.*) *van* B *verminderd met* 12 *en dat van* C *vermeerderd met* 12 *zijn ieder door* 100 *deelbaar. Hoe groot is elks aandeel, wanneer men weet, dat het deel van* C *het grootste is, dat hij bij de gegevene bepalingen ontvangen kan?*

Opgelost *door* C. F. Julius, J. Jonkhert, L. J. Ulman, J. Bassan *en* A. B. de Bock Jun.

Oplossing *van* C. F. Julius.

Omdat het aandeel van B min 12 en van C plus 12 ieder in

het

het bijzonder door honderd deelbaar is, zoo moet ook de som hunner aandeelen door 100 deelbaar zijn; maar nardien de geheele te verdeelen som $= 100 . 30$ mede door 100 deelbaar is, zoo zal ook het aandeel van A door 100 deelbaar wezen.

Stellen wij dus, dat B en C te zamen ontvangen $100x$, en A $100y$, dan hebben wij

$$100x + 100y = 3000$$

of

$$x + y = 30 \quad \ldots\ldots\ldots (a).$$

Daar verder A zijn aandeel in drieguldens en B en C het hunne in goudguldens ontvangen, zoo moeten

$$\frac{100x}{1\frac{2}{5}} \text{ en } \frac{100y}{3},$$

of

$$\frac{500x}{7} \text{ en } \frac{100}{3}y$$

geheele getallen zijn. Hieraan zal voldaan worden wanneer y door 3 en x door 7 deelbaar is; stellen wij dus $x = 7p$ en $y = 3q$, dan wordt de vergelijking (a)

$$7p + 3q = 30,$$

of

$$q = 10 - \tfrac{7}{3}p.$$

doch daar q ook een geheel getal wezen moet, neme men $p = 3r$, dan is

$$q = 10 - 7r.$$

Men kan dus r niet grooter dan 1 nemen, zal q positief blijven; door deze onderstelling wordt dan $q = 3$ en $p = 3$, alsmede $x = 7p = 21$ en $y = 3q = 9$. Het aandeel van A is dus $9 . 100 = 900$ guldens of 300 drieguldens; terwijl B en C te zamen ontvangen $3000 - 900 = 2100$ guldens.

Er blijft ons dan nog overig te bepalen, hoe groot het aandeel van B en C ieder in het bijzonder is.

Dewijl nu beide sommen in goudguldens betaald worden, zoo moet ook het verschil dezer beide aandeelen een zeker aantal goudguldens bedragen, zoodat, stellende het aandeel van $B = 100z + 12$, en dus dat van $C = 2100 - (100z + 12) = 2088 - 100z$, dan zal

$$\frac{2088 - 100z - (100z + 12)}{1\frac{2}{5}} \text{ of } \frac{10380 - 1000z}{7}$$

een

een geheel getal moeten zijn. Maar nu is

$$\frac{10380 - 1000z}{7} = 1482\tfrac{6}{7} - 142\tfrac{6}{7}z$$

$$= 1482 - 142z - 6\frac{z-1}{7}.$$

Wij stellen dan $z - 1 = 7s$, dan wordt dit verschil

$$1482 - 142(7s + 1) - 6s$$
$$= 1340 - 1000s.$$

Dewijl dit verschil nu zoo groot mogelijk moet wezen, daar het aandeel van C het grootste en dus dat van B het kleinste is, dat onder de gegevene omstandigheden kan gegeven worden; zoo zal s zoo klein mogelijk, doch niet negatief moeten zijn. Derhalve zal $s = 0$ aan de vraag voldoen. Hierdoor wordt $z = 1$. Het aandeel van B is dus 112 guldens, of 80 goudguldens, en derhalve zal C ontvangen

$$2100 - 112 = 1988$$ guldens of 1420 goudguldens.

Aanmerking. Het aandeel van $C = 2088 - 100z$ positief moetende blijven, zoo ziet men, dat $z < \frac{2088}{100}$ of $z < 21$ moet blijven; derhalve moet $7s = z - 1 < 20$ of $s < 3\tfrac{6}{7}$ zijn; wij kunnen dus slechts s nog $= 1$ en 2 stellen; er bestaan dan slechts drie antwoorden op de vraag. Voor $s = 1$ wordt $z = 8$ in het aandeel van $B = 812$ en dat van C 1288 gulden; voor $s = 2$ wordt $z = 15$, het aandeel van $B = 1512$ en dat van C 588.

CCXXXV. Voorstel.

Door H. van Wessem Jz.

Uit een vat, waarin 100 kannen melk zijn, neemt men eene kan en vult het vat weder met water aan; hoe veel water komt er in het vat, wanneer dit 50 maal herhaald wordt?

Opgelost *door* H. van Wessem Jz., J. Jonkhert, J. Doorman, H. Strootman, A. B. de Bock Jun., L. J. Ulman en J. Bassan.

Oplossing *van* H. van Wessem Jz.

Wanneer in het algemeen het vat a kannen melk bevat, dan zal er van de eerste aftapping en aanvulling nog $a - 1$ kan melk overblijven, zoodat de betrekking der melk tot het geheele vocht is $\frac{a-1}{a}$. Hiervan dan wederom eene kan vocht afne-

men-

mende en met water aanvullende, zal de hoeveelheid afgetapte melk gevonden worden uit de evenredigheid

$$a:a-1=a-1:\frac{(a-1)^2}{a}.$$

Op dezelfde wijze vindt men de hoeveelheid melk na de derde aftapping uit de evenredigheid

$$a:a-1=\frac{(a-1)^2}{a}:\frac{(a-1)^3}{a^2},$$

zoodat de hoeveelheid melk van de n^{de} aftapping zal bedragen

$$\frac{(a-1)^n}{a^{n-1}}.$$

Is dus $a=100$ en $n=50$, dan vindt men

$$\frac{99^{50}}{100^{49}}=60,501,$$

er zijn dus $100-60,501=39,499$

kannen water in het vat gekomen.

CCXXXVI. VOORSTEL.

Door H. VAN WESSEM Jz.

Men vraagt in eenen halven cirkel eenen vierhoek te beschrijven, wiens zijden eene meetkunstige reeks vormen?

OPGELOST *door* H. VAN WESSEM Jz., J. BASSAN *en* A. B. DE BOCK JUN.

OPLOSSING *van* H. VAN WESSEM JUN.

Zij ABCD (*Fig.* 170) de begeerde vierhoek in den halven cirkel beschreven, en nemen wij, om aan de voorwaarden van het vraagstuk te voldoen, $AB=ax$, $BC=ax^2$, $CD=ax^3$ en $AD=ax^4$. Trekt men nu de diagonalen AC en BD, dan is volgens eene bekende eigenschap

$$AC\times BD=BC\times AD+AB\times DC=a^2x^6+a^2x^4,$$

maar nu is $AC^2=AD^2-CD^2$,

of $AC=\sqrt{(a^2x^8-a^2x^6)}=ax^3\sqrt{(x^2-1)}$,

en $BD^2=AD^2-AB^2$,

of $BD=\sqrt{(a^2x^8-a^2x^2)}=ax\sqrt{(x^6-1)}$.

Wij hebben dus de vergelijking

$$a^2x^4\sqrt{(x^6-1)(x^2-1)}=a^2x^6+a^2x^4,$$

of $\sqrt{(x^6-1)(x^2-1)}=x^2+1$,

of

of $$(x^6-1)(x^2-1)=(x^2+1)^2.$$

Deze vergelijking ontwikkeld en $x^2=y$ gesteld, geeft

$$y^3-y^2-y-3=0.$$

De wortels dezer vergelijking gevonden hebbende, zoo is ook x bekend, en wanneer dan de middellijn AD$=ax^4$ gegeven is, wordt daaruit tevens a gevonden, en alzoo zijn de zijden van den vierhoek in bekende getallen uitgedrukt.

CCXXXVII. VOORSTEL.

Door J. VAN DER LINDEN.

Wanneer van eene rekenkunstige reeks van vijf termen, het product van de eerste en laatste gelijk 9 en het verschil der kwadraten dezer termen gelijk is aan 40 maal de rede, verlangt men deze reeks te vinden?

OPGELOST *door* J. BASSAN, A. B. DE BOCK JUN., J. DOORMAN, H. STROOTMAN, L. J. ULMAN, J. JONKHEERT, G. GRAAFLAND *en* J. VAN DER LINDEN.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Stellen wij voor de vijf termen der reeks

$$x-2y,\quad x-y,\quad x,\quad x+y,\quad x+2y,$$

dan is volgens de voorwaarden van het voorstel

$$(x-2y)(x+2y)=9,$$

en $$(x+2y)^2-(x-2y)^2=40y,$$

Uit deze laatste vergelijking volgt onmiddellijk door ontwikkeling

$$8xy=40y,$$

of $$x=5.$$

Deze waarde in de eerste vergelijking gesteld, geeft

$$(5-2y)(5+2y)=9,$$

of $$25-4y^2=9$$

dus $$y^2=4,$$

of $$y=\pm 2,$$

Wij hebben dus de reeks 1, 3, 5, 7, 9. De negatieve waarde van y geeft dezelfde reeks, doch in eene omgekeerde orde.

CCXXXVIII. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE JUN.

Op hoe veel verschillende wijzen zullen vier geheele getallen aan de voorwaarden voldoen, dat als men dezelve twee aan

twee optelt, er eene rekenkunstige reeks van zes termen komt, welker som 2400 maakt?

OPGELOST *door* J. BASSAN, L. J. ULMAN, A. B. DE BOCK JUN., H. G. WITLAGE JR. *en* J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Stel de vier getallen zijn u, x, y en z, dan moet

$$u+x,\ u+y,\ u+z,\ x+y,\ x+z \text{ en } y+z$$

eene rekenkunstige reeks vormen; wij hebben dan de vergelijkingen

$$2(u+y)=2u+z+x,$$

en

$$2(u+z)=x+2y+u,$$

of wel

$$2y=z+x \quad \ldots\ldots\ldots (1),$$

en

$$u+2z=x+2y \quad \ldots\ldots\ldots (2),$$

eindelijk hebben wij nog

$$3(u+x+y+z)=2400,$$

of

$$u+x+y+z=800 \quad \ldots\ldots (3).$$

Stelt men nu voor y zijne waarde uit (1) en (2) dan komt er

$$u=x-2z+z+x=2x-z,$$

terwijl nog uit (1) volgt

$$y=\tfrac{1}{2}(x+z).$$

De waarden van u en y in (3) gesteld, geeft

$$2x-z+x+\tfrac{1}{2}(x+z)+z=800,$$

of

$$\tfrac{7}{2}x+\tfrac{1}{2}z=800,$$

en dus

$$x=\frac{1600-z}{7}=228\tfrac{4}{7}-\tfrac{1}{7}z$$

$$=228-\frac{z-4}{7}.$$

Stellen wij dus

$$z-4=7p,$$

dan wordt

$$x=228-p$$
$$z=7p+4$$
$$y=116+3p$$
$$u=452-9p.$$

Wij zien dan hieruit, dat, daar er voor p niet dan geheele getallen kunnen genomen worden, p niet kleiner dan 0 en niet grooter dan $\frac{452}{9}=50\tfrac{2}{9}$ of niet grooter dan 50 mag genomen worden; alle geheele getallen tusschen 0 en 50 voldoen derhalve aan p, er bestaan

ſtaan dus 51 antwoorden aan de vraag. Zoo wordt, bij voorbeeld, voor $p = 0$

$$w = 452,\ x = 228,\ y = 116 \text{ en } z = 4,$$

en dan is de reeks

680, 568, 456, 344, 232 en 120.

CCXXXIX. VOORSTEL.

Door C. F. JULIUS.

Men vraagt, op hoe vele wijzen men 1000 *gulden met gouden rijders, ſtukken van* 10 *gulden, van* 5 *gulden en* 3 *gulden betalen kan, onder die bepaling, dat het aantal ſtukken te zamen* 100 *is?*

OPGELOST *door* C. F. JULIUS *en* J. L. ULMAN.

OPLOSSING *van* C. F. JULIUS.

Stel dat het vraagſtuk voldaan kan worden met w driegulden, x gouden rijders, y tien gulden ſtukken en z vijf gulden ſtukken; dan hebben wij volgens het vraagſtuk deze twee vergelijkingen

$$3w + 14x + 10y + 5z = 1000 \quad \dots\dots \quad (1),$$

en

$$w + x + y + z = 100 \quad \dots\dots \quad (2).$$

Daar wij in deze twee vergelijkingen vier onbekenden hebben, zullen wij er dus in het algemeen twee naar willekeur kunnen kiezen. Men is alleen in deze keuze bepaald door de voorwaarde, dat voor al de onbekenden n geheele poſitieve getallen moeten gevonden worden. Wij beginnen dan een der onbekende te verdrijven, door het drievoud van (2) van (1) af te trekken; hierdoor heeft men

$$11x + 7y + 2z = 700,$$

dus

$$z = 350 - 5x - 3y + \frac{x+y}{2}.$$

Stellen wij nu $x + y = 2p$, dan vindt men gemakkelijk

$$y = 2p - x, \quad \dots\dots \quad (3),$$

$$z = 350 - 7p - 2x \quad \dots\dots \quad (4),$$

en

$$w = 5p + 2x - 250 \quad \dots\dots \quad (5).$$

Uit (4) volgt, dewijl x ten minste $= 1$ moet wezen, dat $7p < 348$ moet zijn, of $p < 49\frac{5}{7}$, de grootſte waarde van p is dus 49. Uit (3) volgt even eens, dat p ten minste $= 1$ moet we-

wezen, dewijl anders y nul of negatief zou worden, hetgeen niet wezen mag. Verder volgt uit (4)

$$2x+7p<350$$

of $$x<175-\tfrac{7}{2}p \qquad \ldots\ldots (6),$$

en even eens uit (5)

$$5p+2x>250$$

of $$x>125-\tfrac{5}{2}p \qquad \ldots\ldots (7).$$

De verg. (6) en (7) geven ons dus de grenzen voor x, zoodra p gegeven is. Beginnen wij nu met $p=49$ te nemen, dan zijn uit (6) en (7) de grenzen voor x, $3\tfrac{1}{2}$ en $2\tfrac{1}{2}$, er is alsdan maar eene waarde voor x, namelijk $x=3$. Op deze wijze voortgaande, kunnen wij het volgende tafeltje maken:

voor $p=49$	bestaat er 1 antwoord voor x	grenzen	$3\tfrac{1}{2}$	en $2\tfrac{1}{2}$.
voor $p=48$	» » 1 » » x.	grenzen	7	en 5.
voor $p=47$	» » 3 » » x.	grenzen	$10\tfrac{1}{2}$	en $7\tfrac{1}{2}$.
voor $p=46$	» » 3 » » x.	grenzen	14	en 10.
enz.		*enz.*		

Het is dus gemakkelijk in te zien, dat men voor het aantal antwoorden de som der dubbele rekenkunstige reeks 1,1, 3,3, 5,5, enz. vinden zal. Doch men merke op, dat de vergelijking (3) ook eene grens voor x oplevert, waarboven hij niet komen mag, en men moet dan nog onderzoeken, of de grens $x<2p$ uit (3) eene naauwere grens dan de uitdrukking (6) geeft. Voor $2p=175-\tfrac{7}{2}p$ of $p=31\tfrac{9}{11}$ zijn beide grenzen even groot, en dus voor $p>32$ of daarboven, zal de formule (3) eene ruimere grens opleveren; wij behoeven ons er alsdan niet bij op te houden. Doch voor $p=31$ en daar beneden moet juist deze grens, in plaats van (6), met (7) verbonden worden. Nu is voor

$p=31$ de grens uit (3), $x<62$
en uit (7), $x>47\tfrac{1}{2}$,

er bestaan aldus 14 antwoorden.

Voor $p=30$ is uit (3), $x<60$ en uit (7), $x>50$,
er bestaan dus 9 antwoorden.

Voor $p=29$ is uit (3), $x<58$ en uit (7), $x>52\tfrac{1}{2}$,
er bestaan dus 5 antwoorden.

Voor $p=28$ is uit (3) $x<56$ en uit $x>55$.

Alsdan bestaat er dus geen antwoord meer, even min als voor

klei-

kleinere waarden van p, dewijl alsdan de grootste grens de kleinste overtreft.

Tusschen de grenzen door de formulen (3) en (7) bestaan er derhalve $14+9+5=28$ antwoorden. De antwoorden, gegeven tusschen de grenzen door de formulen (6) en (7), zullen wij vinden, door de reeks 1,1, 3,3, 5,5 voort te zetten tot $p=32$; de laatste grenzen zijn dus uit (6) en (7)

$$x < 63 \quad \text{en} \quad x > 45.$$

De laatste term der reeks van antwoorden is dus 17. Wij hebben dus de som der reeks 1, 3, 5, ... 17 te zoeken, en deze som met twee te vermenigvuldigen. Nu heeft men, gelijk bekend is,

$$1+3+5 \ldots\ldots 17 = \frac{1+17}{2} \times 9 = 81,$$

deze som twee maal genomen en daarbij 28 gevoegd, geeft dus een geheel van 190 antwoorden, die aan de vraag zullen voldoen.

CCXL. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Vier personen A, B, C *en* D *bezitten ieder een zeker aantal guldens. Indien men ieders bezitting tot de tweede magt verheft, en elke magt door de som, die zij te zamen bezitten, deelt, dan heft men de quotienten* 1, $1\frac{7}{9}$, $2\frac{1}{4}$ *en* $4\frac{25}{36}$. *Men vraagt naar elks bezitting?*

OPGELOST *door* J. DOORMAN, H. STROOTMAN, G. BRANDSTEDER, J. JONKHEERT, J. BASSAN, L. J. ULMAN, A. B. DE BOCK JUN. *en* G. GRAAFLAND.

OPLOSSING *van* J. DOORMAN.

Stel de bezittingen der vier personen respectivelijk v, x, y en z, en de som hunner bezittingen $=X$, dan hebben wij volgens de voorwaarden van het vraagstuk

$$\frac{w^2}{X}=1 \quad \text{of} \quad w=\sqrt{X}$$

$$\frac{x^2}{X}=1\tfrac{7}{9} \quad \text{of} \quad x=\tfrac{4}{3}\sqrt{X}$$

$$\frac{y^2}{X}=2\tfrac{1}{4} \quad \text{of} \quad y=\tfrac{3}{2}\sqrt{X}$$

en

en $\frac{z^2}{X} = 4\frac{25}{36}$ of $z = \frac{13}{6}\sqrt{X}$.

Deze laatste uitkomsten optellende, vinden wij

$$w + x + y + z = X = 6\sqrt{X},$$

of $$\sqrt{X} = 6,$$

en dus $$X = 36.$$

en hieruit volgt dadelijk $w = 6$, $x = 8$, $y = 9$ en $z = 13$.

CCXLI. VOORSTEL.

Door J. Bassan.

Uit den top van eenen driehoek heeft men twee lijnen getrokken naar de basis, waardoor de tophoek in drie hoeken is verdeeld; zoo nu deze hoeken, benevens de grootte der twee getrokkene lijnen, gegeven zijn; vraagt men dezen driehoek te bepalen?

Opgelost door J. Bassan, J. W. Martini, J. Doorman, A. B. de Bock Jun., J. Jonkheert en H. Strootman.

Oplossing van J. Bassan.

Zij ABC (*Fig.* 171) de begeerde driehoek, waarin *hoek* ABD $= \alpha$, *hoek* DBE $= \beta$, *hoek* EBC $= \gamma$, BD $= a$ en BE $= b$ gegeven zijn. Trekkende nu EF loodregt op BD, dan heeft men uit den regthoekigen driehoek DEF

$$Tang.\,BDE = \frac{EF}{DF}.$$

Maar nu is $EF = BE\,Sin.\,EBD = b\,Sin.\,\beta$,

en $DF = DB - BF = a - b\,Cos.\,\beta$,

derhalve $$Tang.\,BDE = \frac{b\,Sin.\,\beta}{a - b\,Cos.\,\beta}.$$

Verder heeft men in den driehoek DBC

$$BC : DB = Sin.\,BDC : Sin.\,BCD,$$

of $$BC : a = Sin.\,BDC : Sin.\,\{\beta + \gamma + BDC\},$$

dus $$BC = a\frac{Sin.\,BDC}{Sin.\,(\beta + \gamma + BDC)}$$

$$= a\frac{Sin.\,BDC}{Sin.\,(\beta+\gamma)\,Cos.\,BDC + Cos.\,(\beta+\gamma)\,Sin.\,BDC}$$

$$= \frac{a\,Tang.\,BDC}{Sin.\,(\beta+\gamma) + Cos.\,(\beta+\gamma)\,Tang.\,BDC}.$$

Hierin voor *Tang.* BDC zijne waarde stellende, komt er

 BC =

$$BC = \frac{a b \,Sin.\, \beta}{(a - b \,Cos.\, \beta)\, Sin.\, (\beta + \gamma) + b \,Sin.\, \beta \,Cos.\, (\beta + \gamma)}$$

$$= \frac{a b \,Sin.\, \beta}{a \,Sin.\, (\beta + \gamma) + b \,Sin.\, \gamma}.$$

Verwisselt men nu in deze vergelijking a in b, en γ in α, dan vindt men op dezelfde wijze

$$AB = \frac{b a \,Sin.\, \beta}{b \,Sin.\, (\beta + \alpha) + a \,Sin.\, \alpha}.$$

Voor de derde zijde heeft men eindelijk

$$AC = \sqrt{\{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 AB \,.\, BC \,Cos.\, (\alpha + \beta + \gamma)\}},$$

waarin voor AB en BC hunne gevondene waarden kunnen gesteld worden.

CCXLII. VOORSTEL,

Door J. BASSAN.

Wanneer de loodlijn, welke uit den top eens driehoeks op de bazis nedergelaten wordt, bekend is, en er op deze als middellijn een cirkel wordt beschreven, die de beide opstaande zijden doorsnijdt en de bazis aanraakt, en dat de afstanden dezer snijpunten tot de uiteinden der bazis gegeven zijn, vraagt men dezen driehoek te bepalen?

OPGELOST *door* J. BASSAN, J. W. MARTINI, J. JONKHEERT, A. B. DE BOCK JUN., J. DOORMAN *en* H. STROOTMAN.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Zij ABC (*Fig.* 172) de begeerde driehoek, waarin $BD = a$, $AE = b$ en $CF = c$ gegeven is. Trekt men dan de lijn DF, dan zijn de driehoeken BDF en DFC regthoekig in F; stelle men nu $BF = x$ en $BE = y$, dan is volgens eene bekende eigenschap van de snijlijn en raaklijn aan den cirkel

$$DC^2 = CB \times CF = (c + x) c;$$

maar nu is ook $DC^2 = CF^2 + DF^2 = CF^2 + BD^2 - BF^2$

$$= c^2 + a^2 - x^2,$$

derhalve $(c + x) c = c^2 + a^2 - x^2$,

waaruit volgt $x = -\tfrac{1}{2} c \pm \sqrt{\{a^2 + \tfrac{5}{4} c^2\}}$,

alsmede $BC = \tfrac{1}{2} c \pm \sqrt{(a^2 + \tfrac{5}{4} c^2)}$,

en door c in b te veranderen,

$$y = -\tfrac{1}{2} b \pm \sqrt{\{a^2 + \tfrac{5}{4} b^2\}},$$

als-

alsmede $AB = \frac{1}{2}b \pm \sqrt{(a^2 + \frac{1}{4}b^2)}$.

Om positieve waarden voor de zijden te vinden, moeten echter alleen de hovenste teekens der wortelgrootheden gebruikt worden.

Om de derde zijde te vinden hebben wij:

$$DC = \sqrt{c(c+x)} \text{ en } AD = \sqrt{b(b+y)},$$

en dus $DC + AD = AC = \sqrt{c(c+x)} + \sqrt{b(b+y)}$

$$= \sqrt{c\{\tfrac{1}{2}c + \sqrt{(a^2+\tfrac{1}{4}c^2)}\}} + \sqrt{b\{\tfrac{1}{2}b + \sqrt{(a^2+\tfrac{1}{4}b^2)}\}}.$$

De volgende constructie kan uit deze oplossing worden afgeleid.

Op eene onbepaalde lijn AC rigte men eene loodlijn $DB = a$ op, en make $DG = \frac{1}{2}c$; trekkende dan BH, zoo is $BG = \sqrt{(a^2 + \frac{1}{4}c^2)}$, en makende nu $GH = DG = \frac{1}{2}c$, dan is BH gelijk aan de gezochte zijde BC; beschrijvende uit B, met BH als straal den boog HC, tot dat hij de lijn AC ontmoet in C, dan is de zijde AC bepaald; en op dezelfde wijze wordt de zijde AB gevonden.

CCXLIII. VOORSTEL.

Door C. F. JULIUS.

Welk getal zal bij deszelfs vierkant opgeteld en afgetrokken zijnde, rationale vierkanten voortbrengen?

OPGELOST *door* C. F. JULIUS, A. B. DE BOCK JUN., H. STROOTMAN, J. BASSAN *en* J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* C. F. JULIUS.

Stel het gevraagde getal $= x$, dan zijn de beide vierkanten $x^2 + x$ en $x^2 - x$. Om deze laatste uitdrukkingen tot rationale vierkanten te maken, stellen wij

$$\sqrt{(x^2 - x)} = x - a,$$

waaruit volgt $-x = -2xa + a^2$,

of $$x = \frac{a^2}{2a - 1}.$$

Hierdoor wordt

$$x^2 + x = \frac{a^4}{(2a-1)^2} + \frac{a^2}{2a-1} = \frac{a^2}{(2a-1)^2}\{a^2 + 2a - 1\},$$

zal nu deze uitdrukking mede een rationaal vierkant opleveren, dan moet $a^2 + 2a - 1$ zulk een vierkant zijn; men stelle dan

$$a^2 + 2a - 1 = (a - b)^2,$$

dan is $2a - 1 = -2ab + b^2$,

en $a = \frac{b^2+1}{2(b+1)} = \frac{1}{2}(b - \frac{b-1}{b+1})$.

Elke willekeurige rationale waarde voor b, zal dus eene rationale waarde voor a en dus ook voor x opleveren, en alzoo het vraagstuk oplossen; zoo is voor $b = \frac{1}{2}$, $a = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ en

$$x = \frac{25}{36.(\frac{1}{2} - 1)} = \frac{25}{12.2} = \frac{25}{24}.$$

Het is echter blijkbaar uit den vorm der waarde voor a, dat, welke geheele positieve waarde men voor b ook neme, voor a nooit een geheel getal gevonden zal worden.

CCXLIV. VOORSTEL,

Door G. BRANDSTEDER.

Men vraagt naar twee getallen, waarvan de som der vierkanten vermenigvuldigd met het grootste getal gelijk a is, en het dubbel produkt opgeteld bij het vierkant van hun verschil b oplevert? In bijzondere toepassing neme men $a = 170$ en $b = 34$.

OPGELOST *door* G. BRANDSTEDER, H. STROOTMAN, A. B. DE BOCK JUN., J. BASSAN, G. GRAAFLAND, J. JONKHEET *en* J. DOORMAN.

OPLOSSING *van* G. BRANDSTEDER.

Laten x en y de gevraagde getallen zijn, dan hebben wij uit de voorwaarden des vraagstuks

$$(x^2+y^2)x = a \quad \text{en} \quad 2xy + (x-y)^2 = b,$$

of

$$(x^2+y^2)x = a \quad \text{en} \quad x^2+y^2 = b,$$

de tweede vergelijking in de eerste gedeeld, geeft

$$x = \frac{a}{b},$$

en dit in de tweede vergelijking gesteld, geeft

$$y^2 = b - x^2 = b - \frac{a^2}{b^2},$$

of

$$y = \sqrt{(b - \frac{a^2}{b^2})}.$$

In deze vergelijkingen nu voor a, 170 en voor b, 34 stellende, dan is

$$x = \frac{170}{34} = 5 \quad \text{en} \quad y\sqrt{(34-25)} = \sqrt{9} = 3.$$

CCXLV.

CCXLV. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Men vraagt naar een getal, waarvan a maal deszelfs hexagonaal gelijk is aan deszelfs kubus plus 6 maal het vierkant van dat getal?

OPGELOST *door* G. BRANDSTEDER, G. GRAAFLAND, A. B. DE BOCK JUN., J. JONKHEERT, H. STROOTMAN *en* J. BASSAN.

OPLOSSING *van* G. BRANDSTEDER.

Stellen wij, dat het gevraagde getal $= x$ zij, dan is het hexagonaal van dat getal $2x^2 - x$ en deszelfs kubus x^3, en derhalve heeft men volgens de opgegevene voorwaarden

$$a(2x^2 - x) = x^3 + bx^2,$$

of
$$a(2x - 1) = x^2 + bx,$$

waaruit volgt
$$x^2 + x(b - 2a) = -a,$$

en dus
$$x = \frac{2a - b}{2} \pm \sqrt{\left\{\left(\frac{2a - b}{2}\right)^2 - a\right\}}.$$

Voor $a = 13$ en $b = 12$ vindt men $x = 13$ of $x = 1$, welke beide getallen alzoo aan de vraag voldoen.

CCXLVI. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Men heeft twee zakken geld, welke ieder 100 stukken bevatten; in den eenen zijn dukaten van $5\frac{1}{4}$ gulden en in den anderen dukatons van $3\frac{3}{20}$ gulden. Men begeert te weten, op hoe velerlei wijzen men, door verwisseling der stukken, de waarde in beide zakken gelijk kan maken?

OPGELOST *door* G. BRANDSTEDER, J. BASSAN, H. STROOTMAN, J. JONKHEERT *en* A. B. DE BOCK JUN.

OPLOSSING *van* G. BRANDSTEDER.

Ingevolge de opgave is de waarde der beide zakken te zamen $= 100 . 5\frac{1}{4} + 100 . 3\frac{3}{20} = 840$ gulden; in elken zak zal dan bij de verwisseling der stukken altijd 420 gulden moeten zijn. Indien er derhalve bij eenige verwisseling x dukaten en y dukatons in een' der zakken zijn, dan zal men moeten hebben

$$5\tfrac{1}{4}x + 3\tfrac{3}{20}y = 420,$$

of
$$105x + 63y = 8400,$$

en
$$5x + 3y = 400,$$

dus
$$x = 80 - \tfrac{3}{5}y.$$

Zal nu x een geheel getal wezen, dan moet $3y$ en dus ook y door vijf deelbaar zijn; doch daar y niet grooter dan 100 mag wezen, zoo zal $\frac{3}{5}y$ niet grooter dan 60 kunnen zijn, en derhalve voldoen alle getallen tusschen 0 en 60, welke door vijf deelbaar zijn, aan het vraagstuk, er zijn alzoo 29 waarden voor y, of, als men de waarden $y=0$ en $y=100$ mede laat gelden, 21 waarden; doch omdat voor $y=0$ $x=100$ en voor $y=100$, $x=0$ wordt en dus alzoo oneigenlijke antwoorden voorstellen, zoo zijn er eigenlijk 19 verwisselingen mogelijk. Deze zijn dan $y=5$ $x=77$, $y=10$ $x=74$, $y=15$ $x=71$, $y=20$ $x=68$, $y=25$ $x=65$ enz. tot $y=95$ en $x=23$.

CCXLVII. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Men vraagt naar drie getallen, die de volgende eigenschappen bezitten. De trigonaal van het kleinste gedeeld door 2 is gelijk aan het grootste; de hexagonaal van het middelste is gelijk aan het vierkant van het grootste plus 1 min het kleinste getal. Eindelijk is de som van de octagonaal van het kleinste plus twee maal het vierkant van het middelste plus 10 gelijk aan de pentagonaal van het grootste en den pronik van het kleinste getal.

OPGELOST door G. BRANDSTEDER.

Stellen wij voor de gevraagde getallen x, y en z, dan heeft men volgens de voorwaarden des vraagstuks de vergelijkingen

$$\frac{\frac{1}{2}(x^2+x)}{2}=z=\frac{1}{4}(x^2+x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

$$2y^2-y=z^2+1-x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

en
$$3x^2-2x+2y^2+10=\frac{1}{2}(3z^2-z)+x^2+x \quad . \quad (3).$$

De beide laatste vergelijkingen met 2 vermenigvuldigende en dan van elkander aftrekkende, zoo komt er

$$4x^2-8x+2z^2+2y+22=3z^2-z,$$

dat is na herleiding

$$2y=z^2-z-4x^2+8x-22.$$

In deze vergelijking voor z zijne waarde uit (1) in plaats stellende, zoo komt er

$$2y=\frac{x^4+2x^3-3x^2-4x}{16}-4x^2+8x-22,$$

of

of $y=\frac{x^4+2x^3-67x^2+124x-352}{32}$ . . . (4).

Deze waarde alsmede die van z uit (1) in de vergelijking (2) stellende, zoo vindt men na behoorlijke herleiding

$$x^8+4x^7-130x^6-20x^5+4233x^4-18120x^3+63584x^2$$
$$-88768x+129024=0 \quad \ldots\ldots (5).$$

Deze vergelijking wordt voldaan voor $x=7$, welke in (4) gesteld geeft

$$y=\frac{2401+686-3283+868-352}{32}=\frac{3955-3635}{32}=10.$$

Uit (1) vindt men verder

$$z=\frac{49+7}{4}=14,$$

zoodat de gevraagde getallen zijn 7, 10 en 14.

CCXLVIII. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Men vraagt het kleinste getal dukaten, hetwelk kan verdeeld worden in Zeeuwsche rijksdaalders, goudguldens en stuivers, zoodanig dat het geheele positieve getallen zijn, die in eene meetkunstige reeks opklimmen?

OPGELOST *door* G. BRANDSTEDER, H. STROOTMAN *en* J. BASSANT.

OPLOSSING *van* G. BRANDSTEDER.

Zij het getal dukaten x, en het aantal Zeeuwsche rijksdaalders, waarin zij verdeeld worden, a, het aantal goudguldens ab en het aantal stuivers ab^2, dan moet, daar 105 stuivers een' dukaat en 28 stuivers een' goudgulden uitmaken,

$$52a+28ab+ab^2=105x,$$

of

$$b^2+28b=\frac{105}{a}x-52,$$

en hieruit volgt

$$b=-14\pm\sqrt{(\frac{105}{a}x-52+196)}$$

$$=-14\pm\sqrt{(\frac{105}{a}x+144)},$$

zal b positief zijn, dan moet alleen het bovenste teeken der wortelgrootheid gebruikt worden.

Stellen wij nu verder

$$\sqrt{(\frac{105}{a}x+144)}=nx+12,$$

dan volgt daaruit

$$n^2x^2+24nx=\frac{105}{a}x,$$

of

$$n^2x+24n=\frac{105}{a},$$

en dus

$$x=\frac{105-24an}{an^2}.$$

Omdat nu voor x de kleinst mogelijke waarde gevraagd wordt, zoo moet voor a en n de grootst mogelijke waarde gezocht worden. Nu kan $24an$ niet grooter dan 105 wezen, en dus $an<5$. Neemt men nu $an=4$, dan wordt

$$x=\frac{9}{4.n},$$

hetgeen nooit een geheel getal kan worden, welke geheele waarde men aan n geeft; nemende dus $an=3$, dan wordt

$$x=\frac{33}{3.n}=\frac{11}{n},$$

maar omdat nu $an=3$ is, zoo kan hier voor n niets anders dan de eenheid genomen worden, en dus $a=3$ en $n=1$, waardoor $x=11$ en $b=9$ wordt. Dit getal dukaten kan dan nu ook werkelijk verdeeld worden in 3 rijksdaalders, 27 goudguldens en 243 stuivers.

CCXLIX. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Men begeert twee kwadraten te vinden, zoodanig, dat hun verschil de som zij van twee andere vierkanten, en het verschil dezer laatste een kubus zij?

OPGELOST *door* J. BASSAN *en* J. JONKHEET.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Laten de begeerde kwadraten zijn x^2 en y^2, dan moet hun verschil $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ de som van twee andere kwadraten wezen; daartoe stellen wij

$$x-y=p,$$

waar-

waaruit volgt

$$x + y = p + 2y \quad \text{en} \quad x^2 - y^2 = p^2 + 2py,$$

nemende nu $2py = p^2 q^2$ of $y = \frac{1}{2} p q^2$, dan wordt aan de eerste voorwaarde voldaan, zoodra men voor p of q een even getal neemt. De oorspronkelijke vierkanten zijn

$$x^2 = (p + y)^2 = p^2 (1 + \tfrac{1}{2} q^2)^2.$$

en

$$y^2 = \tfrac{1}{4} p^2 q^4;$$

terwijl het verschil dezer vierkanten de som is der vierkanten

$$p^2 \quad \text{en} \quad p^2 q^2.$$

en wij hebben dan nog het verschil $p^2 q^2 - p^2$ derzelve tot een kubus te maken; hiertoe nemen wij

$$q^2 - 1 = pr^3 \quad \text{of} \quad p = \frac{q^2 - 1}{r^3},$$

en zoodra nu deze laatste vergelijking voor p eene geheele waarde geeft, zal aan het vraagstuk voldaan zijn; zoo is bij voorbeeld voor $r = 1$ en $q = 2$, $p = 3$ en alzoo $y^2 = \frac{1}{2}.3.9 = 6$ en $x = 6 + 3 = 9$, of de begeerde kwadraten 81 en 36.

CCL. VOORSTEL.

Door C. F. JULIUS.

De negen letters, waarmede men den naam van eenen bij ons Genootschap en velen hooggeachten man schrijft, kunnen op de volgende wijze bepaald worden, wanneer men het alphabet op de gewone wijze van 1 tot 26 nommert.

De eerste letter is gelijk aan de som van het vierkant der 8e en 9e letter, gedeeld door de 8e; de helft der tweede is gelijk aan de 7e; het product der 4e en 7e letter is gelijk aan de som der 3e en 5e; de 4e, 5e, 6e en 2e letter vormen eene rekenkunstige reeks, waarvan het gemeen verschil gelijk is aan de 9e letter gedeeld door de 8e; de 7e letter is meetkunstig midden evenredig tusschen de 4e en de som van de 1e en 2e letter; de vierde en de som van de 4e en 5e, de derde en de som van de 1e en 2e vormen eene arithmetische reeks van vier termen; de 2e gedeeld door de 4e is meetkunstig midden evenredig tusschen de 7e en 8e. Men vraagt hieruit den naam te bepalen?

OPGELOST *door* C. F. JULIUS, J. JONKHERT, A. B. DE BOCK JUN. *en* J. BASSAN.

Op-

Oplossing van C. F. Julius.

Stel het nommer van de 4e letter $=x$, die van de vijfde $=y$ en die van de zevende $=z$, dan is volgens de tweede voorwaarde het nommer der tweede letter $2z$. Verder is uit de vijfde voorwaarde $\frac{z^2}{x}$ gelijk aan de som der eerste en tweede letter en dus de eerste letter $=\frac{z^2}{x}-2z$. De tweede letter gedeeld door de vierde is $\frac{2z}{x}$, en derhalve $\frac{4z^2}{x^2}$ gelijk aan het product der zevende, z, en der achtste letter, en alzoo deze achtste letter $=\frac{4z^2}{x^2z}=\frac{4z}{x^2}$. De som der derde en vijfde is volgens de derde voorwaarde xz en dus de derde $xz-y$. Wij hebben dan volgens de zesde voorwaarde de reeks

$$x,\quad x+y,\quad xz-y \text{ en } \frac{z^2}{x} \quad \ldots \quad (1).$$

Volgens de vierde voorwaarde is nu ook het verschil $y-x$ der vierde en vijfde gelijk aan de 9e, gedeeld door de achtste letter, en derhalve de negende letter

$$=(y-x)\frac{4z}{x^2}.$$

Dit zelfde verschil is ook gelijk aan het verschil der 6e en 2e letter, dus dit verschil

$$=y-x,$$

alzoo is de zesde letter gelijk aan

$$2z-y+x.$$

De eerste voorwaarde geeft ons dan

$$\frac{z^2}{x}-2z=\left\{\frac{16z^2}{x^4}+(y-x)\frac{4z}{x^2}\right\}\frac{x^2}{4z}$$

$$=\frac{4z}{x^2}+y-x \quad \ldots \quad (2).$$

Uit de reeks (1) hebben wij de vergelijkingen

$$x-(x+y)=x+y-(xz-y) \text{ en } x-(x+y)=(xz-y)-\frac{z^2}{x},$$

waaruit volgt

$$0=x-$$

$$o = x - 2z + 3y \quad \text{en} \quad o = xz - \frac{z^2}{x},$$

uit deze laatste volgt

$$x^2 z = z^2 \quad \text{of} \quad z = x^2.$$

Deze waarde in de voorlaatste vergelijking gesteld, geeft

$$o = x - x^3 + 3y,$$

of

$$3y = x^3 - x.$$

De waarde van x en y in de vergelijking (2) gesteld, geeft

$$x^3 - 2x^2 = 4 + \tfrac{1}{3}(x^3 - x) - x,$$

of

$$2x^3 - 6x^2 = 12 - 4x,$$

en

$$x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = o;$$

deze vergelijking kan nu ook geschreven worden

$$x^2(x - 3) + 2(x - 3) = o,$$

of

$$(x^2 + 2)(x - 3) = o,$$

zoodat dezelve alleen voor $x = 3$ met eene geheele positieve waarde kan voldaan worden. Nemende dan $x = 3$, zoo wordt

$$z = x^2 = 9,$$

en

$$3y = x^3 - x = 27 - 3 = 24,$$

of

$$y = 8.$$

Hierdoor is dan het nummer der eerste letter

$\frac{z^2}{x} - 2z = 27 - 18 = 9$ en de letter I

Dat der 2e $2z = 18$ en de letter R

Dat der 3e $xz - y = 27 - 8 = 19$ en de letter S

Dat der 4e $x = 3$ en de letter C

Dat der 5e $y = 8$ en de letter H

Dat der 6e $2z - y + x = 18 - 8 + 3 = 13$ en de letter M

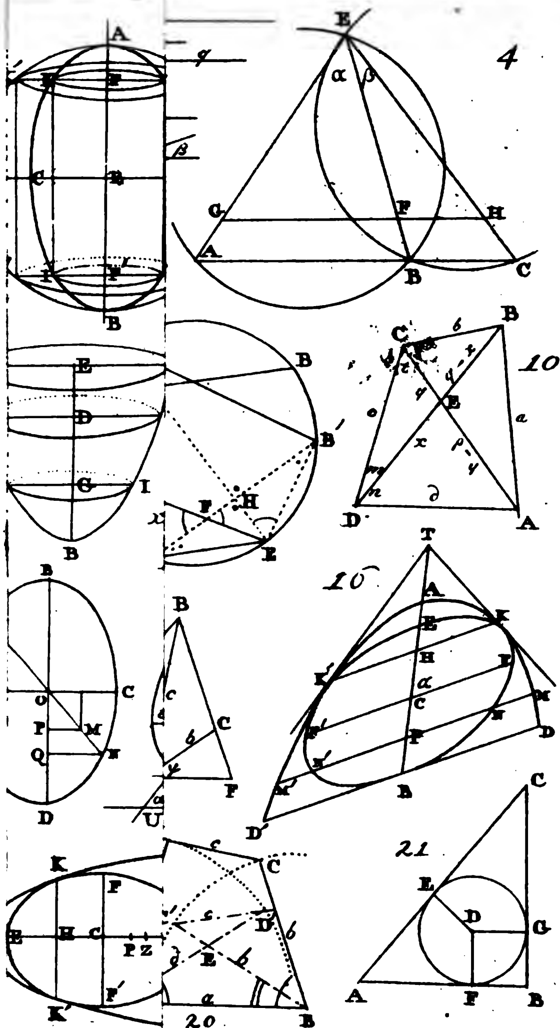
Dat der 7e $z = 9$ en de letter I

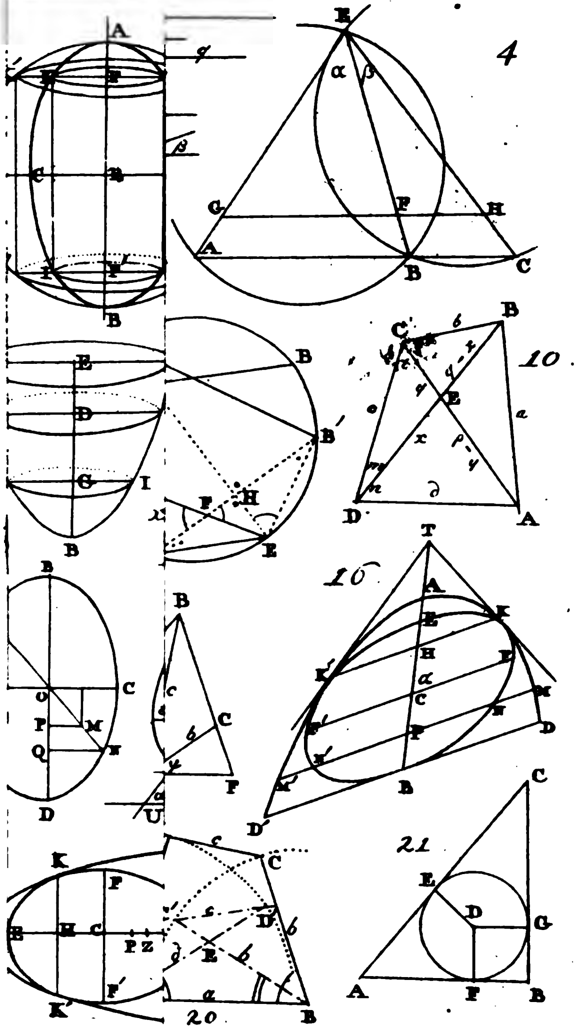
Dat der 8e $\frac{4z}{x^2} = 4$ en de letter D

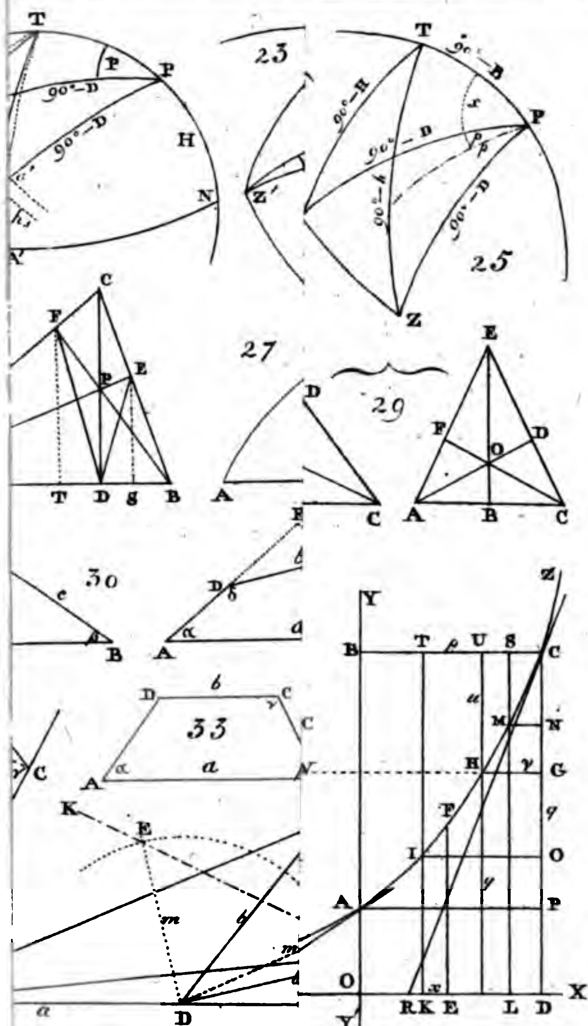
Dat der 9e $(y - x)\frac{4z}{x^2} = 4 \cdot 5 = 20$ en de letter T

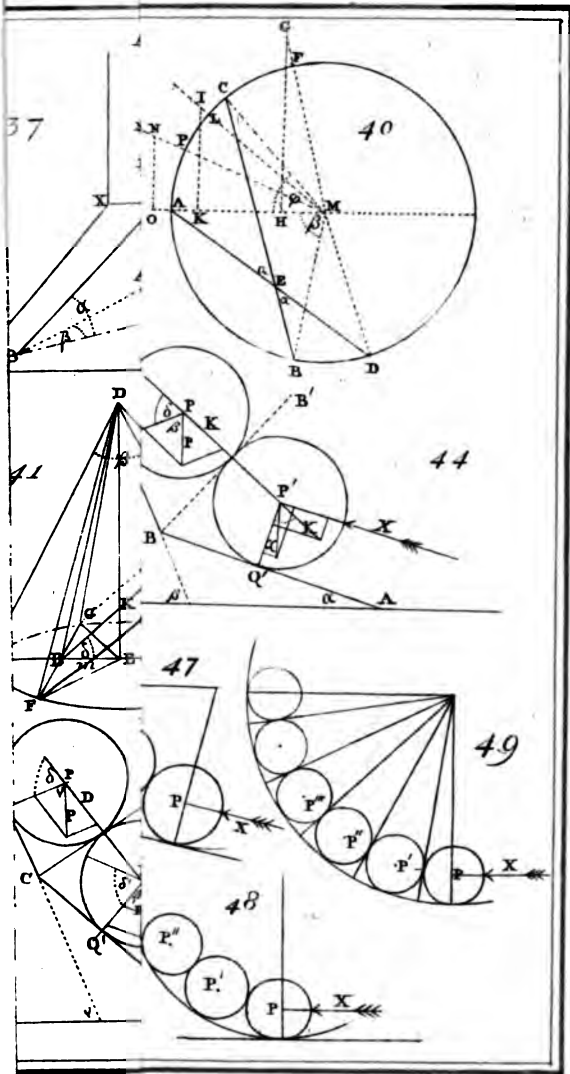
Alzoo is dan de naam I. R. SCHMIDT.

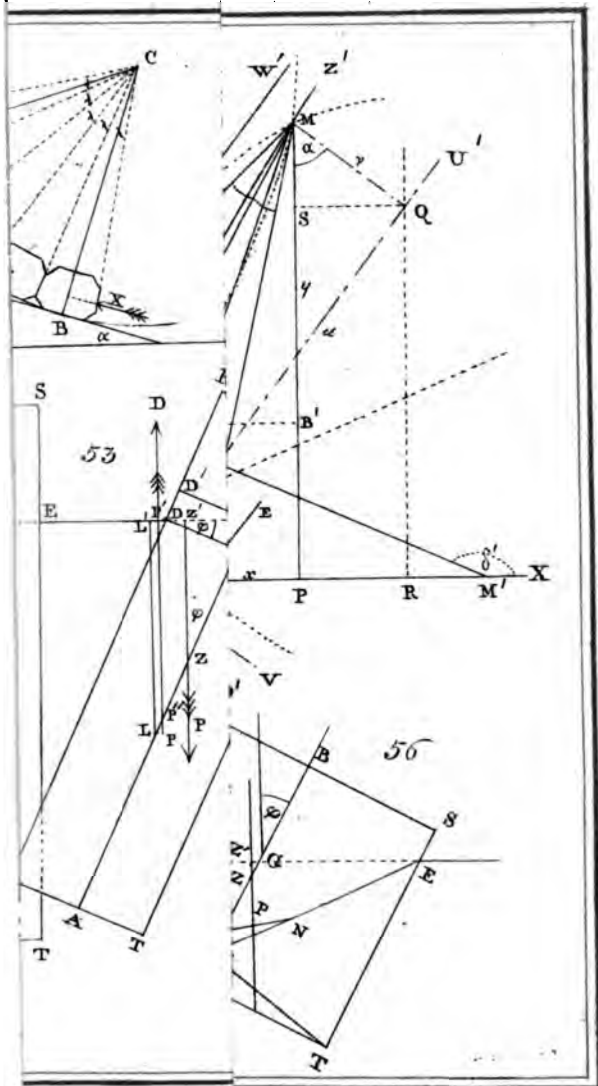


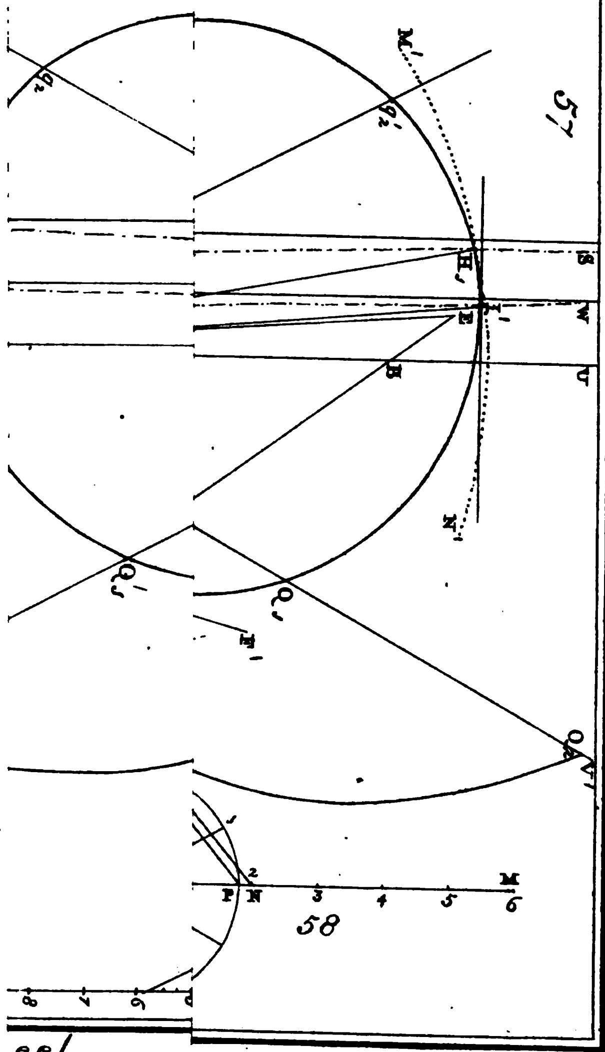

4
E
α β
G F H
A B C
10
C b B
D A
16
T
A
E
K
H
α
C
P
B
D
D'
21
C
E
D
G
A F B
20
c
C
D
b
E
a
B
K
F
E H C P Z
F'
K'
B
C
P M
Q
D
U

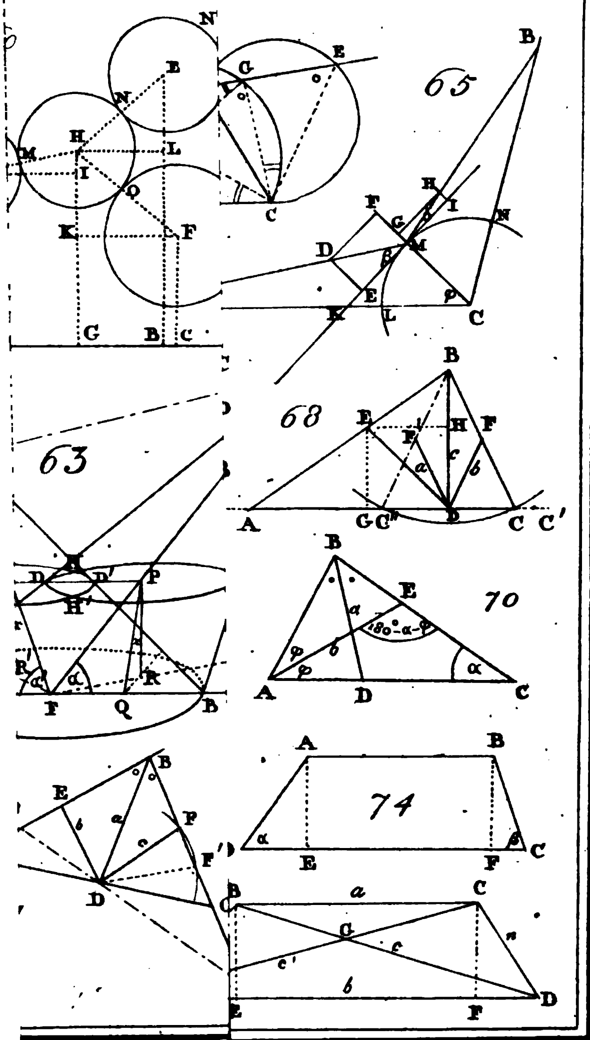

4
10
16
20
21
A
B
C
D
E
F
G
H
I
K
M
P
Q
T
U
Z

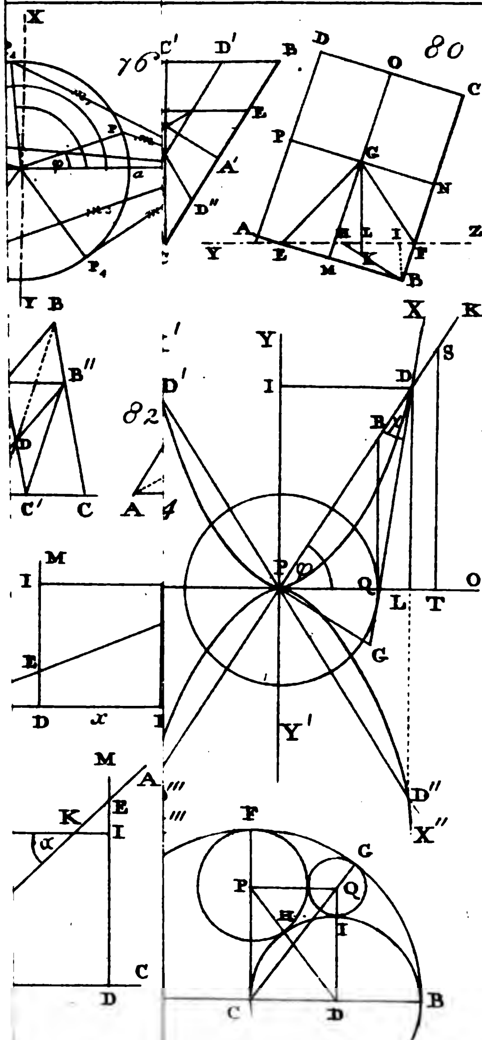

23
25
27
29
30
33
90°–D
90°–H
90°–B
90°–h
T
P
H
N
Z
E
F
O
D
A
B
C
X
Y
K
m
a
b

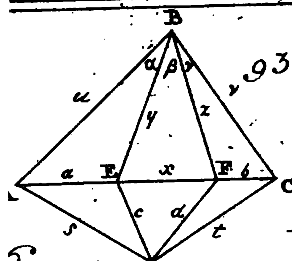

37
40
41
44
47
48
49

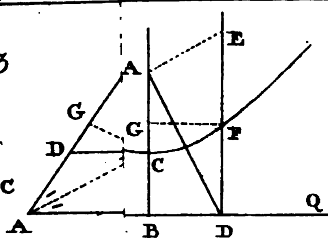

C
B
α
X
W′
Z′
M
α
U′
Q
S
B′
E
x
P
R
M′
X
S
D
53
E
D′
L
D
Z′
φ
Z
L
P
P
A
T
T
V
56
B
S
φ
G
E
P
N
T

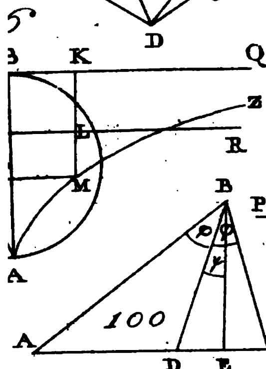

57
M
q
H
I
E
B
S
W
U
N
Q
O
A
P
N
M
2
3
4
5
6
58

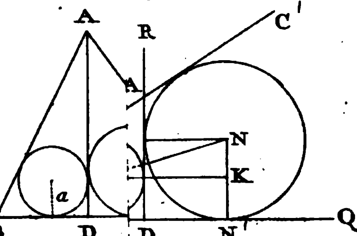

65
63
68
70
74

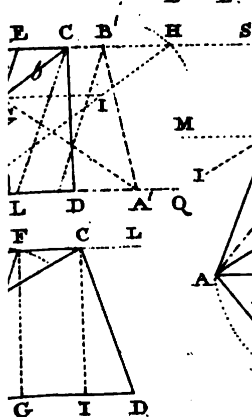

76
80
82
X
Y
φ
a
C′
D′
B
E
A′
D″
D
O
C
P
G
N
A
H
L
I
Z
Y
E
M
K
F
B
X
K
S
Y
I
D
R
D′
B″
C′
C
A
M
I
E
D
x
P
φ
Q
O
L
T
G
Y′
M
A
E
K
I
α
C
D
D″
X″
F
G
P
Q
H
I
C
D
B

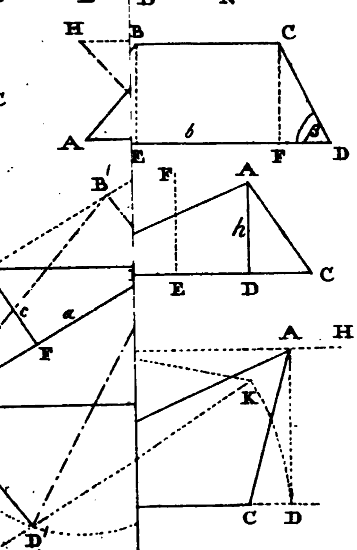

B
α β γ
u
y
z
v 93
a E x F b
C
c d
s t
D
5


E
A
G
G
F
D
C
Q
A
B
D


B K Q
Z
L
R
M
A
B
φ φ
γ
100
A
C
D E

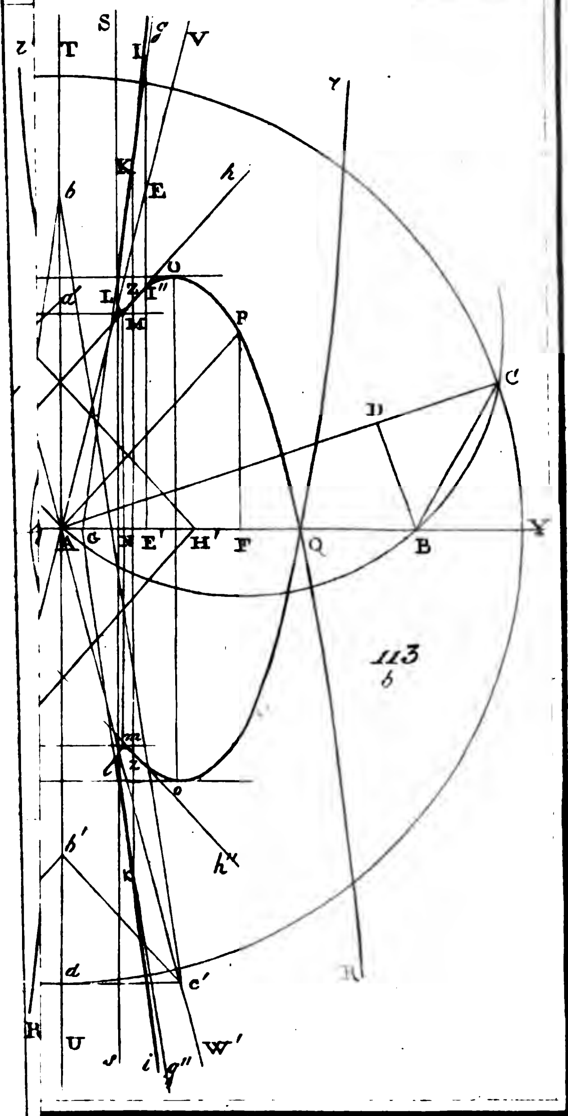

A
R
C'
A
N
K
P
a
Q
B D D N'

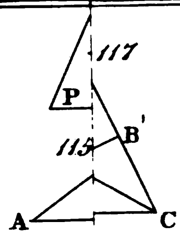

E C B' H S
b
I
L D A' Q
F C L
G I D

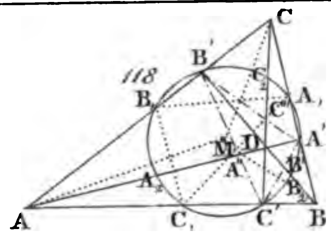

H B C
b
A E F D
B' F A
h
M B
I E D C
c a
F
A H
K
A
C D
K D'

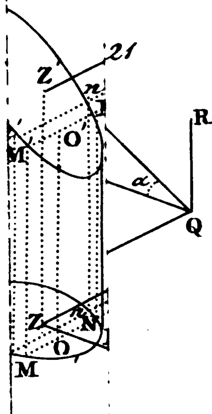
S

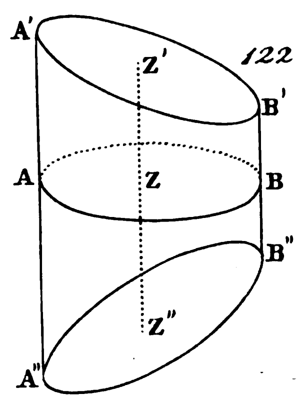
Pl IX

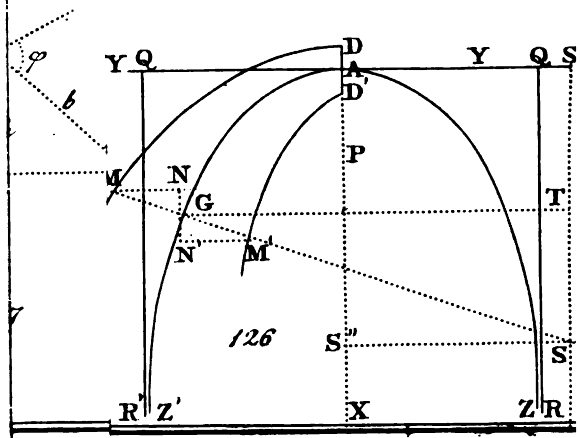



117
P
115
B'
A
C


118
C
B'
B,
A,
C"
A'
M
D
A"
A,
B
C,
C'
A
B

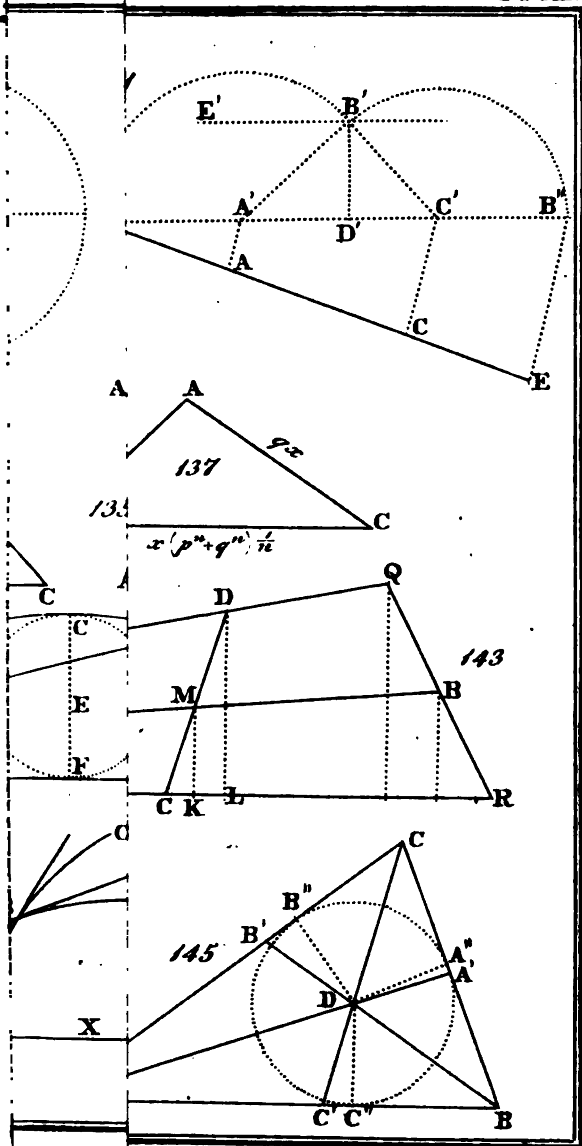

21
Z'
n
O'
M
α
R
Q
Z
N
O
M


A'
122
Z'
B'
A
Z
B
B"
Z"
A"

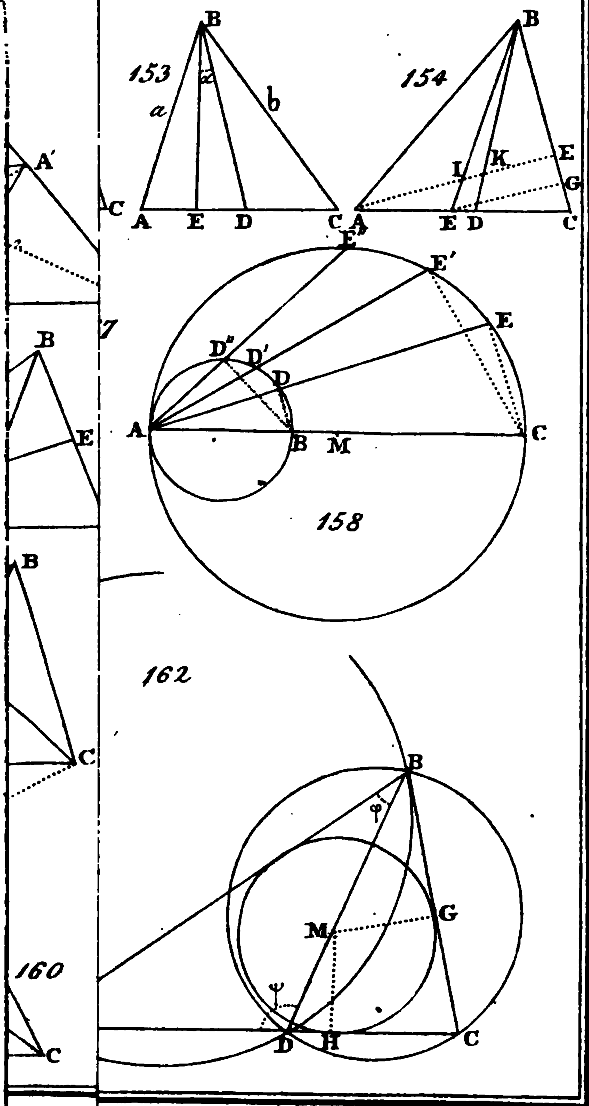

φ
b
D
Y
Q
A
Y
Q
S
D'
P
M
N
G
T
N'
M'
126
S"
S
R'
Z'
X
Z
R

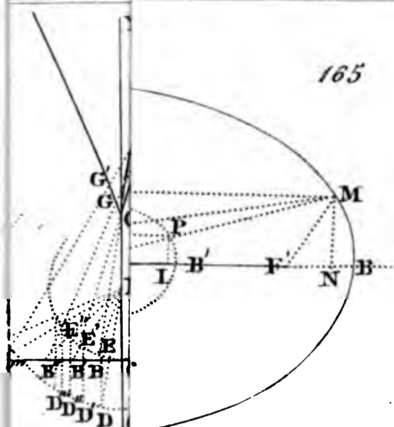
SKUN

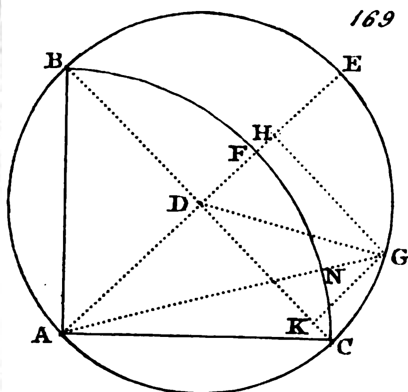
Pl. XI.



E'
B'
A'
D'
C'
B''
A
C
E
A
A
137
9x
135
C
x(p^n+q^n)^{1/n}
C
C
E
F
Q
D
143
M
B
C
K
L
R
C
B''
B'
145
A''
A'
D
X
C'
C''
B


153
B
x
a
b
A E D C
154
B
L K E
G
A E D C
E''
E'
E
D'' D'
D
A B M C
158
162
B
φ
M
G
ψ
D H C
160
A'
C
B
E
B
C
C





171

a

F

D